مدول‌های با خاصیت اشتراک هم‌محض

فرانک فرشادی‌فر
دانشگاه فرهنگیان، گروه ریاضی، تهران

دریافت ۹۷/۰۲/۱۲ پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

چکیده

در این مقاله، مدول‌هایی را که داری خاصیت اشتراک هم‌محض هستند را بررسی کرده و نتایج جدیدی در مورد این کلاس از مدول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: زیرمدول محض، زیرمدول هم‌محض. مدول با خاصیت اشتراک هم‌محض.

مقدمه

در سراسر این مقاله R یک حلقه جابه‌جایی با عضو واحد ناصفر و همه مدول‌ها یکانی هستند. به‌علاوه، $\mathbb{Z}$ نمایش‌گر مجموعه اعداد صحیح هستند.

در زیر برخی از تعریف‌های مورد نیاز آورده شده است.

تعریف: فرض کنیم M یک R–مدول باشد.

۱. زیرمدول N از M را *زیرمدول محض* گوییم هرگاه برای هر ایده‌آل I از R، $IN = N \bigcap IM$ [۲].

۲. M را *کاملاً محض* گوییم هرگاه هر زیرمدول از آن محض باشد[۵].

۳. زیرمدول N از M را *هم‌محض* گوییم هرگاه برای هر ایده‌آل I از R،

$$(N :_M I) = N + (0 :_M I).$$

این تعریف در واقع دوگان تعریف زیرمدول محض از یک R-مدول است [۴].

۴. M را *کاملاً* هم‌محض گوییم هرگاه هر زیرمدول از آن هم‌محض باشد [۵].

۵. Mرا *هم‌محض ساده* گوییم هرگاه $\langle 0 \rangle$ و Mتنها زیرمدول‌های هم‌محض Mباشند [۹].

Mرا *ضربی* گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به قسمی که $N = IM$ [۷].

۶. *می‌گوییم* M در *شرط پوچ ساز مضاعف* (DAC) صدق می‌کند هرگاه برای هر ایده‌آل I از R، $I = Ann_R((0_M : I$ [۸].

۷. M را *هم‌ضربی* گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌قسمی‌که $N = (0 :_M I)]$ [۳].

---

*نویسنده مسئول f.farshadifar@cfu.ac.ir

۸. M را *هم‌ضربی قوی* گوییم هرگاه M هم ضربی باشد و در شرط پوچساز مضاعف (DAC) صدق کند [۴].
زیرمدول N از M را کاملاً پایا گوییم هرگاه برای هر درونریختی $f: M \to M$، داشته باشیم $f(N) \subseteq N$ [۱۲].

۹. M را *دارای خاصیت جمع هم‌محض* گوییم هرگاه مجموع هر دو زیرمدول هم‌محض آن یک زیرمدول هم‌محض از آن باشد [۹].

انصاری طرقی و فرشادی‌فر [۴]، دوگان زیرمدول‌های محض را معرفی کرده و پاره‌ای از خصوصیات این کلاس از مدول‌ها را بررسی کردند. در این مقاله، مدول‌هایی را که داری خاصیت اشتراک هم‌محض هستند را بررسی کرده و نتایج جدیدی در مورد این کلاس از مدول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

نتایج اصلی

تعریف ۱. یک R–مدول M را *دارای خاصیت اشتراک هم‌محض* گوییم هرگاه اشتراک هر دو زیرمدول هم‌محض آن یک زیرمدول هم‌محض از آن باشد.

مثال ۲.

۱. هر مدول کاملاً هم‌محض دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. به‌ویژه، $\mathbb{Z}_n$ به‌عنوان $\mathbb{Z}_n$-مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر n یک عدد خالی از مربع باشد.

۲. هر مدول هم‌محض ساده دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

۳. $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ را به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $N = \mathbb{Z}_4 \oplus 0$ و $K = \mathbb{Z}(1,1$، زیرمدولی که به‌وسیلهٔ $(1,1)$ تولید می‌شود، باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که N و K زیرمدول‌های هم‌محضی از M هستند. اما $N \cap K = \{(0,0),(2,0)\}$ زیرمدول هم‌محضی از M نبوده و بنابراین M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نیست.

۴. فرض کنیم که p یک عدد اول باشد. چون زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ قابل مقایسه هستند، $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$–مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

لم ۳. ([۴]، ۹.۲)، اگر M یک R-مدولی باشد که دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است و N یک زیرمدول هم‌محض از M باشد، آن‌گاه N و M/N نیز دارای خاصیت اشتراک هم‌محض هستند.

زیرمدول N از R-مدول M را *کاملاً تحویل‌ناپذیر* گوییم هرگاه $N = \bigcap_{i \in I} N_i$، که در آن $\{N_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌های M است، آن‌گاه برای $i \in I$ای، $N = N_i$. هر زیرمدول از R-مدول M را می‌توان به‌صورت اشتراکی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل ناپذیر M نوشت. بالاخص، اشتراک تمام زیرمدول های کاملاً تحویل ناپذیر M برابر صفر است [۱۰].

تبصرهٔ ۴. فرض کنیم که N و K دو زیرمدول از R-مدول M باشند. اگر برای هر زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر L از M با شرط $K \subseteq L$ داشته باشیم $N \subseteq L$، آن‌گاه $N \subseteq K$ [۶].

قضیهٔ ۵. فرض کنیم M یک R–مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

برهان: فرض کنیم I ایده‌آل از R و N و K زیرمدول‌های هم‌محضی از M باشند. به‌وضوح،

$$N \bigcap K + (0:_M I) \subseteq (N \bigcap K :_M I).$$

حال فرض کنیم که L یک زیرمدول کاملاً تحویل ناپذیر از M باشد به‌طوری‌که

$$N \bigcap K + (0:_M I) \subseteq L.$$

چون M توزیع‌پذیر است،

$$(N + (0:_M I) + L) \bigcap (K + (0:_M I) + L) = L.$$

از این‌که L کاملاً تحویل‌ناپذیر است، می‌توان فرض کرد $N + (0:_M I) + L = L$. چون N هم‌محض است، که نتیجه می‌دهد $(N :_M I) \subseteq L$. پس $(N \bigcap K :_M I) \subseteq L$. از این‌رو، بنابر تبصرهٔ ۴، مطلوب حاصل است.

گزارهٔ ۶. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت M به‌عنوان R–مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر M به‌عنوان $R / Ann_R(M)$–مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد.

برهان: این واضح است.

قضیهٔ ۷ فرض کنیم M یک R–مدول هم‌ضربی قوی باشد. در این صورت M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

برهان: فرض کنیم N و K دو زیرمدول هم‌محض از M باشند. چون M هم‌ضربی است، ایده‌آل‌هایی مانند I و J از R موجودند به‌طوری‌که $N = (0:_M I)$ و $K = (0:_M J)$. پس

$$N \bigcap K = (0:_M I) \bigcap (0:_M J) = (0:_M I + J).$$

بنابر قضیهٔ ۱۳،۲ از [۴]، I و J ایده‌آل‌های محضی از R هستند. حال فرض کنیم که I_1 یک ایده‌آل از R باشد. چون بنابر ۳،۱، [۱۱]، R دارای خاصیت جمع محض است، $I_1(I + J) = I_1 \bigcap (I + J)$. از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} (N \bigcap K :_M I_1) &= ((0:_M I + J) :_M I_1) \\ &= (0:_M (I + J) \bigcap I_1). \end{aligned}$$

حال با توجه به این که M هم‌ضربی قوی است، داریم:

$$\begin{aligned} (0:_M (I + J) \bigcap I_1) &= (0:_M I + J) + (0:_M I_1) \\ &= N \bigcap K + (0:_M I_1). \end{aligned}$$

بنابراین، M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. دراین صورت M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر به‌ازای ایده‌آل I از R و زیرمدول‌های هم‌محض N و K از M داشته باشیم

$$N \bigcap K + (0:_M I) = (N + (0:_M I)) \bigcap (K + (0:_M I)).$$

برهان: ابتدا فرض کنیم M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض، I ایده‌آل از R و N و K زیرمدول‌های هم‌محضی از M باشند. بنابر فرض، $N \bigcap K$ یک زیرمدول هم‌محض از M است. از این‌رو، داریم:

$$(N \bigcap K :_M I) = N \bigcap K + (0:_M I).$$

بنابراین حکم از این حقیقت که

$$(N \bigcap K :_M I) = (N :_M I) \bigcap (K :_M I)$$

نتیجه می‌شود. برعکس، فرض کنیم N و K دو زیرمدول هم‌محض از M و I یک ایده‌آل از R باشد. در این‌صورت بنابر فرض،

$$N \bigcap K + (0 :_M I) = (N + (0 :_M I)) \bigcap (K + (0 :_M I)).$$

حال چون $(N :_M I) = N + (0 :_M I)$ و $(K :_M I) = K + (0 :_M I)$، داریم

$$(N + (0 :_M I)) \bigcap (K + (0 :_M I)) = (N :_M I) \bigcap (K :_M I) = (N \bigcap K :_M I)$$

و مطلوب حاصل است.

گزارهٔ ۹. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک R–مدول باشد. اگر برای هر ایده‌آل ماکزیمال P از R، M_P دارای خاصیت اشتراک هم‌محض به عنوان R_P–مدول باشد، آنگاه M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض به عنوان R–مدول است.

برهان: فرض کنیم N و K دو زیرمدول هم‌محض از M باشند. در این صورت برای هر ایده‌آل ماکزیمال P از R، بنابر گزارهٔ ۳.۲ از [۹]، N_P و K_P زیرمدول‌های هم‌محضی از M_P به‌عنوان R_P–مدول هستند. برای هر ایده‌آل ماکزیمال P از R، چون M_P دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است، $N_P \bigcap K_P = (N \bigcap K)_P$ یک زیرمدول هم‌محض از M_P است. بنابراین بنابر گزارهٔ ۳.۲ از [۹]، $N \bigcap K$ یک زیرمدول هم‌محض از M است.

گزارهٔ ۱۰. فرض کنیم R یک PID و M یک R–مدول باشد. در این صورت M دارای خاصیت اشتراک محض است اگر و فقط اگر M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد.

برهان: حکم از این حقیقت که بنابر قضیه ۲.۱۲ از [۴]، هر زیرمدول از M محض است اگر و فقط اگر هم‌محض باشد نتیجه می‌شود.

(مدول موضعاً دوری تعریف شود)

نتیجهٔ ۱۱. فرض کنیم R یک PID و M یک R–مدول موضعاً دوری (بالاخص، M یک R–مدول ضربی) باشد. در این صورت M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

برهان: این از گزاره قبل و نتیجه ۲.۱۷ از [۹] نتیجه می‌شود.

مثال ۱۲. $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Z}$ دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

تبصرهٔ ۱۳. اگر یک R-مدول M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد، آن‌گاه ممکن است $M \oplus M$ دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نباشد. به‌عنوان مثال، $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Z}_4$ دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. اما $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نیست.

قضیهٔ ۱۴. فرض کنیم $M = \underset{i \in I}{\oplus} M_i$ یک R–مدول باشد، که هر M_i یک زیرمدول از M است. اگر M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد، آن‌گاه هر M_i دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. عکس قضیهٔ زمانی که هر زیرمدول هم‌محض از M کاملاً پایا باشد برقرار است.

برهان: فرض کنیم که M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد. چون هر M_i یک جمع‌وند از M است، بنابر برهان لم ۱۱,۳ از [۵]، هر M_i یک زیرمدول هم‌محض از M است. از این‌رو، بنابر لم ۳، هر M_i دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. برای دیدن قسمت عکس، فرض کنیم که N و K دو زیرمدول هم‌محض از M باشند. در این‌صورت بنابر فرض، N و K کاملاً پایا هستند. از این‌رو، بنابر ۸.۱۱، [۱۲]، $N=\underset{i\in I}{\oplus}(N\cap M_i)$ و $K=\underset{i\in I}{\oplus}(K\cap M_i)$. بنابراین

$$N\cap K=(\underset{i\in I}{\oplus}(N\cap M_i))\cap(\underset{i\in I}{\oplus}(K\cap M_i))=\underset{i\in I}{\oplus}((N\cap M_i)\cap(K\cap M_i)).$$

به‌سادگی می‌توان دید که $N\cap M_i$ و $K\cap M_i$ زیرمدول‌های هم‌محضی از M_i هستند. پس $(N\cap M_i)\cap(K\cap M_i)$ یک زیرمدول هم‌محض از M_i است. از این‌رو، بنابر گزارهٔ ۲.۱۱ از [۴]، $N\cap K$ یک زیرمدول هم‌محض از M است و مطلوب حاصل است.

گزارهٔ ۱۵. فرض کنیم دو R–مدول M_1 و M_2 داری خاصیت اشتراک هم‌محض باشند و $Ann_R(M_1)+Ann_R(M_2)=R$. در این صورت $M_1\oplus M_2$ دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

برهان: فرض کنیم N و K دو زیرمدول هم‌محض از $M_1\oplus M_2$ باشند. چون

$$Ann_R(M_1)+Ann_R(M_2)=R,$$

بنابر [۱]، داریم $N=N_1\oplus N_2$ و $K=K_1\oplus K_2$، که در آن N_1 ، K_1 زیرمدول‌هایی از M_1 و N_2، K_2 زیرمدول‌هایی از M_2 هستند، از این‌رو،

$$N\cap K=(K_1\oplus K_2)\cap(N_1\oplus N_2)=(N_1\cap K_1)\oplus(N_2\cap K_2).$$

حال بنابر فرض، $N_1\cap K_1$ زیرمدول هم‌محضی از M_1 و $N_2\cap K_2$ زیر مدول هم‌محضی از M_2 است. از این‌رو، بنابر گزارهٔ ۲.۱۱ از [۴]، $(N_1\cap K_1)\oplus(N_2\cap K_2)$ زیرمدول هم‌محضی از $M_1\oplus M_2$ است. پس $N\cap K$ زیرمدول هم‌محضی از $M_1\oplus M_2$ است و مطلوب حاصل است.

قضیهٔ ۱۶. فرض کنیم $R=R_1\times R_2$ و $M=M_1\times M_2$ یک R–مدول باشد، که در آن M_1 یک R_1–مدول و M_2 یک R_2–مدول است. در این صورت M دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر برای $i=1,2$، M_i دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد.

برهان: با توجه به گزاره ۲.۲ از [۹]، برهان سر راست است.

منابع

1. Abbas M. S., "On fully stable modules", Ph.D. Thesis, University of Baghdad (1990).
2. Anderson W., Fuller K. R., "Rings and Categories of Modules", Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1974).
3. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "The dual notion of multiplication modules", Taiwanese J. Math. 11 (4) (2007) 1189-1201.

4. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "Strong comultiplication modules", CMU. J. Nat. Sci., 8 (1) (2009) 105-113.
5. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "Fully idempotent and coidempotent modules", Bull. Iranian Math. Soc, 38 (4) (2012) 987-1005.
6. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "The dual notion of some generalizations of prime submodules", Comm. Algebra, 39 (2011) 2396-2416.
7. Barnard A., "Multiplication modules", J. Algebra 71 (1981) 174-178.
8. Faith C., "Rings whoso modules have maximal submodules", Publ. Mat. 39 (1995) 201-214.
9. Farshadifar F., "Copure submodules and related results", Cankaya University Journal of Science and Engineering, 16 (2) (2019) 010-015.
10. Fuchs L., Heinzer W., Olberding B., "Commutative ideal theory without finiteness conditions: Irreducibility in the quotient filed, in: Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra", Lect. Notes Pure Appl. Math. 249 (2006) 121-145.
11. Adil G., Naoum and Bahar H., Al-Bahraany, "Modules with the pure sum property", Iraqi J. Sci., 43 (3) (2002) 39-51.
12. Wisbauer R., "Foundations of Modules and Rings Theory", Gordon and Breach, Philadelphia, PA (1991).