

## روش‌های پیشگو-اصلاح کننده حالت متناهی در چارچوب روش‌های خطی کلی

جواد فرضی<sup>\*</sup>، افسانه مرادی

دانشگاه صنعتی سهند، دانشکده علوم پایه، تبریز

دریافت ۹۶/۰۵/۰۹

پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

### چکیده

روش‌های پیشگو-اصلاح کننده<sup>۱</sup> از الگوریتم‌های پرکاربرد برای حل مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. در این مقاله روش‌های PC در حالت متناهی در چارچوب روش‌های خطی کلی نمایش داده می‌شوند. در این نمایش جدید خطاهای محاسباتی کم‌تر از شکل اصلی است. تابع پایداری به شکل صریح و در شکل بسته ارائه می‌شود. همچنین، در پیاده‌سازی آن از برونمایی موضعی، با استفاده از تخمین میلن<sup>۲</sup> در گام‌های درونی یا بیرونی استفاده شده است. مثال‌های عددی رفتار عددی روش‌های ارائه شده را توصیف می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** روش‌های خطی کلی، روش پیشگو-اصلاح کننده، تخمین میلن، برونمایی موضعی، پایداری.

### مقدمه

حل معادلات دیفرانسل معمولی و مسائل مقدار اولیه زمینه بسیار وسیعی در بررسی‌های علوم و مهندسی است. بسیاری از مسائل کاربردی مانند ارتعاشات، انتشار موج، مدل بندی جمعیت، بررسی قیمت سهام، مسائل انتقال حرارت و غیره، به صورت معادله دیفرانسیل معمولی یا جزئی مدل بندی می‌شوند که برای حل آنها نیاز به روش‌های عددی دقیق و کارآمد است [۱۵]، [۱۶]. در این راستا، روش‌های خطی کلی<sup>۳</sup> (GLM) به وسیله بوچر<sup>۴</sup> در سال ۱۹۶۶ به عنوان تعمیمی از روش‌های مرسوم رونگه-کوتا و روش‌های چندگامی خطی ابداع شد [۱]. روش‌های GLM مجموعه کلی تری از این روش‌های موجود (روش‌های رونگه-کوتا، چندگامی خطی، پیشگو-اصلاح کننده و غیره) را در برمی گیرد و هدف آن استفاده از همه مزیت‌های این روش‌ها است. طراحی کلاس‌هایی از روش‌های GLM با توانمندی‌های مشخص، مانند کارایی برای حل معادلات سخت، جزو سوالات تحقیقاتی مهم در این زمینه بوده است. روش‌های خطی کلی ضمنی قطری (DIMSIM) [۲]، [۳] روش‌های رونگه-کوتای دوگامی به صورت GLM [۴] و روش‌های مشتق دوم (SGLM) [۵] مثال‌هایی از کلاس‌های روش‌های GLM هستند. روش‌های رونگه-کوتا و روش‌های چندگامی خطی دارای شکل روش خطی کلی متناظر هستند [۶]، [۱۲]. کاربرد روش‌های ضمنی برای حل معادلات در کنار خصوصیت‌های پایداری مناسب نیازمند حل دستگاه‌های غیرخطی با ابعاد بزرگ است. با محاسبه مقدار اولیه مناسب از روشی صریح (روش پیشگو) می‌توان با تعدادی تصحیح از طریق روش ضمنی (روش اصلاح کننده) در ضمن صرفه‌جویی در هزینه‌های محاسباتی به دقت مناسب دست یافت. همچنان که از روش پیشگو در هر مرحله یکبار استفاده می‌شود، تعداد استفاده از روش تصحیح کننده در مرتبه و ثابت خطای روش مؤثر است و همواره می‌توان در حالت متناهی به مرتبه دقت مناسب دست پیدا کرد [۷]. این مزیت‌ها بخشی از انگیزه بررسی و تولید

1. Predictor-Corrector

2. Milne

3. General Linear Methods

4. Butcher

روش‌هایی از کلاس GLM است که دارای ابزار مهم کنترل خطای خودکار نیز هستند. در این مقاله کلاس جدیدی از روش‌های GLM بر مبنای روش‌های پیشگو-اصلاح کننده (PC) ارائه می‌شود. روش‌های پیشگو-اصلاح کننده نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی دارند. تخمین خطای خودکار این روش‌ها براساس تخمین میلن، آنها را به روش‌های عملی مناسب برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مبدل ساخته است [۷]. در شکلول‌بندی ارائه شده در این مقاله، در کنار مزیت‌هایی مانند وجود شکل بسته برای تابع پایداری و استفاده آسان از تخمین‌های خطا (تخمین میلن) خطاهای محاسباتی نیز کم‌تر است. در روش‌های GLM ارائه شده، استفاده از تخمین خطا (برون‌یابی موضعی) در گام‌های درونی و بیرونی امکان‌پذیر است و تأثیر استفاده از این تخمین‌ها در ماتریس بلوکی روش GLM جدید نیز مشاهده می‌شود.

این مقاله در چهار بخش به این ترتیب تنظیم شده است: در بخش ۲ مفاهیم مورد نیاز از روش‌های خطی کلی و روش‌های پیشگو-اصلاح کننده ارائه می‌شود. در بخش ۳ چارچوب GLM روش‌های PC را ارائه کرده و در ادامه روش‌های PC مبتنی بر پیشگو و اصلاح کننده از نوع روش‌های آدامز<sup>۱</sup> را بررسی و سپس پایداری خطی روش جدید را بررسی و تابع پایداری آن را به شکل بسته و صریح ارائه می‌کنیم. همچنین، تأثیر برون‌یابی موضعی را در حالت‌های مختلف روش‌های PC بررسی و شکل GLM متناظر را به دست می‌آوریم. در نهایت با چند مثال عددی رفتار خطای روش جدید و روش اصلی را مقایسه می‌کنیم.

## پیش‌نیازها

در این بخش به‌طور اجمالی روش‌های خطی کلی [۶] و روش‌های پیشگو-اصلاح کننده [۷] را مرور می‌کنیم. شکل ماتریسی روش‌های GLM را ارائه کرده و حالت‌های مختلف روش‌های PC را بررسی می‌کنیم.

### ۱. روش‌های خطی کلی

دستگاه خودگردان معادلات دیفرانسیل را در نظر می‌گیریم:

$$y' = f(y(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

$$y(t_0) = y_0,$$

که  $f: R^m \rightarrow R^m$  و  $y_0 \in R^m$ . یک روش خطی کلی برای مسئله مقدار اولیه (۱-۲) را می‌توان با بردار  $c = [c_1, c_2, \dots, c_s]^T$  و چهار ماتریس  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $U = [u_{ij}]$  و  $V = [v_{ij}]$  به شکل برداری-ماتریسی نمایش داد که در آن:

$$A \in \mathbb{R}^{s \times s}, \quad U \in \mathbb{R}^{s \times r}, \quad B \in \mathbb{R}^{r \times s}, \quad V \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

برای نمایش چنین روش خطی کلی از نماد  $GLM(c, A, U, B, V)$  استفاده می‌شود. برای راحتی، روش خطی

کلی را با ماتریس افراز شده با ابعاد  $(s+r) \times (s+r)$  بدین صورت نمایش داده می‌شود:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array} \right).$$

در هر گام یک روش خطی کلی یک بردار ورودی و یک بردار خروجی وجود دارد که مقادیر تقریبی را برای جواب دقیق ارائه می‌کنند. به بیان دقیق‌تر، در گام  $m$ ، بردار ورودی  $y^{[n-1]}$  با مؤلفه‌های  $y_i^{[n-1]}$  و بردار خروجی  $y^{[n]}$  با مؤلفه‌های  $y_i^{[n]}$ ،  $i = 1, 2, \dots, r$  وجود دارند، که این مقادیر خروجی بردار ورودی برای گام  $(n+1)$  هستند.

یک گام GLM تعداد  $s$  مرحله درونی و  $r$  مرحله بیرونی وجود دارد. مراحل درونی با بردار مقادیر مرحله‌ای  $Y$  ارتباط دارند. متناظر با هر مقدار مرحله‌ای  $Y_i$ ، مقدار مشتق  $F_i$ ،  $i=1,2,\dots,r$ ، را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$F_i = f(Y_i).$$

با استفاده از شبکه یکنواخت  $t_n = t_0 + nh$ ،  $n=0,1,\dots,N$  و طول گام  $h$  می‌توان روند به‌هنگام‌سازی بردار خروجی را براساس عناصر ماتریس‌های  $A$ ،  $U$ ،  $B$  و  $V$  بدین صورت نوشت:

$$Y_i = \sum_{j=1}^s h a_{ij} F_j + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]}, \quad i=1,2,\dots,s,$$

$$y_i^{[n]} = \sum_{j=1}^s h b_{ij} F_j + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}, \quad i=1,2,\dots,r.$$

روش GLM بیان شده در (۴-۲) را می‌توان برحسب بردارهای ورودی و خروجی:

$$y^{[n-1]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \\ \vdots \\ y_r^{[n-1]} \end{pmatrix}, \quad y^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \\ \vdots \\ y_r^{[n]} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_s \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F(Y_1) \\ F(Y_2) \\ \vdots \\ F(Y_s) \end{pmatrix},$$

بدین صورت برداری- ماتریسی نوشت:

$$\begin{pmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \otimes I & U \otimes I \\ B \otimes I & V \otimes I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(Y) \\ y^{[n-1]} \end{pmatrix}.$$

برای بررسی گسترده روش‌های GLM و آشنایی با مفاهیم پایداری، پیش‌سازی، سازگاری و همگرایی به منابع [۱۰]-[۱۶] و [۶] مراجعه شود.

**تعریف ۱.** یک روش GLM «پیش‌سازگار» است هرگاه

$$Uq_0 = e, \quad Vq_0 = q_0,$$

که  $q_0 \in \mathbb{R}^r$  و  $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^r$  را «بردار پیش-سازگاری» می‌نامند.

**تعریف ۲.** یک روش GLM «سازگار» است هرگاه پیش‌سازگار با بردار پیش-سازگاری  $q_0$  باشد و برداری مانند  $q_1$  موجود باشد به‌طوری‌که

$$Be + Vq_1 = q_0 + q_1,$$

که بردار  $q_1$  را «بردار سازگاری» می‌نامند.

**تعریف ۳.** روش GLM «صفر-پایدار» است هرگاه مقدار ثابت  $k$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$||V^n|| \leq k,$$

برای هر  $n = 0, 1, \dots$

برای بررسی صفر پایداری روش GLM باید نشان داد که صفرهای چندجمله‌ای مینیمال ماتریس ضرایب  $V$  دارای ریشه‌ای با اندازه بزرگ‌تر از یک نیست و ریشه‌های با اندازه یک ساده‌اند. برای تعریف همگرایی یک روش GLM فرض می‌کنیم روند آغازین  $S_h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  وجود داشته باشد که برای هر  $h > 0$  بردار آغازین

در آن  $y^{[0]} = y^{[0]}(h) \in \mathbb{R}^{mr}$  را اختصاص می‌دهد به‌طوری‌که  $y^{[0]} = (q_0 \otimes I)y(t_0)$  که  $\lim_{h \rightarrow 0} S_h(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} y^{[0]} = (q_0 \otimes I)y(t_0)$  که  $q_0 \in \mathbb{R}^r$  بردار پیش‌سازگاری است.

**تعریف ۴.** یک روش GLM «همگرا» است هرگاه برای هر مسئله مقدار اولیه (۱-۲) بردار غیرصفر  $q_0 \in \mathbb{R}^r$  و روش آغازین  $S_h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  موجود باشند به‌طوری‌که برای هر  $\bar{x} > x_0$ ، دنباله بردارهای  $y^{[n]}$  محاسبه شده با  $n$  گام GLM و با  $h = (\bar{t} - t_0)/n$  و  $y^{[0]} = S_h(y_0)$  به‌زای هر  $\bar{t} \in [t_0, T]$  همگرا به  $q_0 y(\bar{t})$  باشد. برای بررسی همگرایی یک روش GLM کافی است صفرپایداری و سازگاری روش را بررسی کنیم.

## ۲. روش‌های پیشگو-اصلاح‌کننده

ایده روش‌های پیشگو-اصلاح‌کننده، به بررسی روش‌های ضمنی بدون استفاده از حل دستگاه غیرخطی می‌پردازد. مهم‌ترین مزیت روش‌های ضمنی وجود ناحیه پایداری بزرگ‌تر در مقایسه با روش‌های صریح است که اجازه انتخاب طول گام‌های بزرگ‌تر در حل مسئله‌های سخت را می‌دهد. استفاده از حل‌کننده‌های دستگاه غیرخطی هزینه‌های محاسباتی اضافی را به مسئله تحمیل می‌کند و یکی از مزیت‌های روش‌های پیشگو-اصلاح‌کننده جلوگیری از حل دستگاه غیرخطی و کاهش محاسبات است. روش‌های PC براساس تکرار نقطه ثابت است که بسیار ارزان‌تر از حل‌هایی هست که نیاز به محاسبه ژاکوبین دارند. به عبارت دیگر، خصوصیات خوب روش‌های آدامز اجازه پیش‌بینی دقیق تعداد تکرار مورد نیاز برای رسیدن به دقت خاص را می‌دهد. در روش‌های PC یک حدس اولیه  $y_{n+k}^{[0]}$  مناسب با استفاده از روش صریح (روش پیشگو) به دست می‌آوریم و با استفاده از تکرار نقطه ثابت که براساس روش ضمنی است دقت آن را بهبود می‌بخشیم. حدس اولیه بهتر، هزینه‌های محاسباتی و به‌ویژه تعداد محاسبه توابع در روش‌های PC را به میزان چشم‌گیری کاهش می‌دهد. جفت  $k$ ، گامی بدین صورت است:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \cdot \sum_{j=0}^k \alpha_j^* y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j^* f_{n+j},$$

که در آن  $n = 0, 1, \dots$  و  $\alpha_j, \beta_j, \alpha_j^*, \beta_j^*$  به ترتیب ضرایب روش‌های ضمنی و صریح است. هم‌چنین فرض می‌کنیم  $p^*$  و  $p$  به ترتیب مرتبه‌های روش‌های صریح و ضمنی باشند. در این مقاله به‌طور کلی از  $*$  برای نمایش روش صریح استفاده می‌کنیم. اکنون، اعمال روش چندگامی خطی ضمنی به مسئله مقدار اولیه (۱-۲)، معادل با حل دستگاه غیرخطی زیر در هر گام برای  $y_{n+k}$  است.

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}.$$

معمولاً این دستگاه غیرخطی را با تکرار نقطه ثابت:

$$y_{n+k}^{[v+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[v]}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}, \quad v = 0, 1, \dots$$

حل می‌شود، که در آن  $y_{n+k}^{[0]}$  یک حدس اولیه است که می‌تواند با روش پیشگو به دست آید.

جفت (۵-۲) را می‌توان به چندین حالت پیاده‌سازی کرد. اولاً، می‌توان برای حدس اولیه  $y_{n+k}^{[0]}$  از پیشگو استفاده کرد، سپس تکرار (۷-۲) را تاجایی که به همگرایی برسد ادامه داد. این حالت، اصلاح تا همگرایی نامیده می‌شود و در عمل مفید نیست چون تعداد تکرارها مشخص نیست. در حالت دیگر می‌توان تعداد تکرارها را متناهی در نظر گرفت و

این تعداد را بر اساس دقت روش PC و خطای آن تعیین کرد. در این حالت به ترتیب از P و C برای نشان دادن یک عمل پیشگو و اصلاح کننده و از E برای نشان دادن یک محاسبه تابع  $f$  در نقطه داده شده  $(t, y)$ ، استفاده می‌شود. دو حالت عمده  $E^\mu P(EC)^\mu$  و  $P(EC)^\mu E^{1-t}$  می‌تواند به عنوان یک حالت واحد  $P(EC)^\mu E^{1-t}$  نوشته شود که در آن  $\mu$  یک عدد صحیح مثبت، نشان‌دهنده تعداد تکرارها به وسیله روش اصلاح کننده است و  $t=0$  یا  $t=1$  به هنگام سازی تابع را در انتهای تکرار تعیین می‌کند. حالت  $P(EC)^\mu E^{1-t}$  بدین صورت نوشته می‌شود:

$$P: \quad y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[\mu]} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[\mu-t]},$$

$$(EC)^\mu: \begin{cases} f_{n+k}^{[v]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[v]}), \\ y_{n+k}^{[v+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[\mu]} = h \beta_k f_{n+k}^{[v]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[\mu-t]}, \end{cases}$$

$$E^{1-t}: \quad f_{n+k}^{[v]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[v]}), \quad \text{if } t=0,$$

که در آن  $v=0, 1, \dots, \mu-1$  است.

### جفت PC به عنوان GLMs

در این بخش، چارچوب GLM را برای جفت PC براساس روش‌های چندگانه خطی معرفی می‌کنیم. در برخی حالت‌های خاص از جفت PC، همانند روش‌های آدامز-بشفورث<sup>۱</sup> و آدامز-مولتون<sup>۲</sup>، ماتریس افزاشده GLM ساختار ساده‌ای دارد که در ادامه این بخش بحث خواهیم کرد.

#### ۱. جفت PC روش چندگانه خطی به عنوان GLM

برای نمایش روش‌های پیشگو-اصلاح کننده حالت متناهی  $P(EC)^\mu E^{1-t}, t=0, 1$  به شکل GLM متناظر، تعداد مقادیر خروجی  $r$  و تعداد مراحل درونی  $s$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$s = \mu - t + 1, \quad r = 2k,$$

که در آن  $k$  تعداد گام‌های روش اصلاح کننده است. در این صورت بردار ورودی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$y^{[n-1]} = \begin{pmatrix} y_{n+k-1}^{[\mu]} \\ \vdots \\ y_n^{[\mu]} \\ hf_{n+k-1}^{[\mu]} \\ \vdots \\ hf_n^{[\mu]} \end{pmatrix}, \quad Y^{[n]} = \begin{pmatrix} Y_1^{[n]} \\ Y_2^{[n]} \\ \vdots \\ Y_{\mu-t+1}^{[n]} \end{pmatrix},$$

از این رو شکل روش خطی کلی برای حالت  $P(EC)^\mu E^{1-t}, t=0, 1$  می‌تواند بدین صورت نوشته شود:

$$\begin{pmatrix} Y_1^{[n]} \\ Y_2^{[n]} \\ \vdots \\ Y_{\mu-t+1}^{[n]} \\ y_{n+k}^{[\mu]} \\ \vdots \\ y_{n+1}^{[\mu]} \\ hf_{n+k}^{[\mu-t]} \\ \vdots \\ hf_{n+1}^{[\mu-t]} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} A \otimes I & U \otimes I \\ \hline B \otimes I & V \otimes I \end{array} \right) \begin{pmatrix} hf(Y_1^{[n]}) \\ hf(Y_2^{[n]}) \\ \vdots \\ hf(Y_{\mu-t+1}^{[n]}) \\ y_{n+k-1}^{[\mu]} \\ \vdots \\ y_n^{[\mu]} \\ hf_{n+k-1}^{[\mu-t]} \\ \vdots \\ hf_n^{[\mu-t]} \end{pmatrix},$$

که در آن ماتریس ضرایب روش بدین صورت مشخص می‌شود:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_{k-1}^* & \cdots & -\alpha_1^* & -\alpha_0^* & \beta_{k-1}^* & \cdots & \beta_1^* & \beta_0^* \\ \beta_k & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_{k-1} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_k & 0 & -\alpha_{k-1} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ \hline \beta_k & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_{k-1} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right).$$

با توجه به این که روش‌های پیشگو-اصلاح کننده سازگار و صفرپایدار هستند می‌توان قضیه ۵ را بیان کرد.

لم ۵. شکل روش خطی کلی (۳-۳) برای روش پیشگو-اصلاح کننده (۸-۲) پیش سازگار، سازگار و سازگار مرحله‌ای، با بردار پیش سازگار  $q_0$  و بردار سازگار  $q_1$ ، است.

$$q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} k+1 \\ k \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

اثبات: روش‌های پیشگو-اصلاح کننده (۸-۲) سازگارند بنابراین با استفاده از روابط سازگاری برای این روش‌ها و با ضرب ماتریسی ساده نتیجه می‌شود:

$$Uq_0 = e, \quad Vq_0 = q_0.$$

9

$$Be + Vq_1 = q_0 + q_1,$$

بنابراین، روش GLM(c,A,U,B,V) بیان شده در (۳-۳) با بردار از پیش‌سازگاری  $q_0$ ، از پیش‌سازگار و با بردار  $q_1$  سازگار است.

## ۲. شکل GLM برای روش آدامز-پیشگو-اصلاح کننده

معروف‌ترین جفت برای روش پیشگو-اصلاح کننده روش‌های آدامز-بشفورث (صریح) و روش‌های آدامز-مولتون (ضمنی) است. شکل روش خطی کلی PC براساس روش‌های آدامز در حالت متناهی  $t = 0, 1$ ،  $P(EC)^t E^{1-t}$  را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|ccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \beta_{k-1}^* & \cdots & \beta_1^* & \beta_0^* \\ \beta_k & \cdots & 0 & 0 & 1 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_k & 0 & 1 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ \hline \beta_k & \cdots & 0 & 0 & 1 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right).$$

در اینجا مثال‌هایی از جفت PC و شکل GLM متناظر آن‌ها ارائه می‌کنیم:

۱. اولین جفت PC، روش از مرتبه دو است:

$$y_{n+2}^p = y_{n+1} + \frac{1}{2}h(3f_{n+1} - f_n),$$

$$y_{n+2}^c = y_{n+1} + \frac{1}{2}h(f_{n+1} + f_{n+2}^p),$$

که در آن داریم

$$f_{n+2}^p = f(t_{n+2}, y_{n+2}^p).$$

برای ارجاع‌های بعدی تأکید می‌کنیم که  $LTE^1$  روش‌های پیشگو-اصلاح کننده (۳-۶) بدین صورت است:

$$y_{n+2} - y_{n+2}^p = \frac{5}{12}h^3 y_i''' + o(h^4),$$

$$y_{n+2} - y_{n+2}^c = -\frac{1}{12}h^3 y_i''' + o(h^4).$$

شکل روش خطی کلی (۳-۵) برای جفت پیشگو-اصلاح کننده (۳-۶) در حالت‌های  $PEC$  و  $P(EC)^2$  به ترتیب بدین صورت بیان می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \frac{y_{n+2}^{[1]}}{hf_{n+2}^{[0]}} \\ hf_{n+1}^{[0]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(Y_1) \\ \frac{y_{n+1}^{[1]}}{hf_{n+1}^{[0]}} \\ hf_n^{[0]} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \frac{y_{n+2}^{[1]}}{hf_{n+2}^{[0]}} \\ hf_{n+1}^{[0]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(Y_1) \\ hf(Y_2) \\ \frac{y_{n+1}^{[1]}}{hf_{n+1}^{[0]}} \\ hf_n^{[0]} \end{pmatrix}.$$

۲. جفت PC دوم، روش مرتب G چهارم زیر است

$$y_{n+4}^p = y_{n+3} + \frac{1}{24} h(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n),$$

$$y_{n+4}^c = y_{n+3} + \frac{1}{24} h(9f_{n+4}^p + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}).$$

مشابه روش مرتبه دوم توجه داشته باشید که LTE این جفت PC بدین صورت است:

$$y_{n+4} - y_{n+4}^p = \frac{251}{720} h^5 y_i^{(5)} + o(h^5),$$

$$y_{n+4} - y_{n+4}^c = -\frac{19}{720} h^5 y_i^{(5)} + o(h^5).$$

حالت‌های  $PEC$  و  $P(EC)^2$  برای جفت پیشگو-اصلاح‌کننده (۳-۹) و شکل GLM متناظر آن‌ها به ترتیب بدین

صورت است:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \frac{y_{n+4}^{[2]}}{hf_{n+4}^{[1]}} \\ hf_{n+3}^{[1]} \\ hf_{n+2}^{[1]} \\ hf_{n+1}^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{55}{24} & \frac{-59}{24} & \frac{37}{24} & \frac{-9}{24} \\ \frac{9}{24} & 1 & \frac{19}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(Y_1) \\ \frac{y_{n+3}^{[2]}}{hf_{n+3}^{[1]}} \\ hf_{n+2}^{[1]} \\ hf_{n+1}^{[1]} \\ hf_n^{[1]} \end{pmatrix},$$



$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ y_{n+4}^{[2]} \\ hf_{n+4}^{[1]} \\ hf_{n+3}^{[1]} \\ hf_{n+2}^{[1]} \\ hf_{n+1}^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{55}{24} & -\frac{59}{24} & \frac{37}{24} & -\frac{9}{24} \\ \frac{9}{24} & 0 & 1 & \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{9}{24} & 0 & 1 & \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(Y_1) \\ hf(Y_2) \\ y_{n+3}^{[2]} \\ hf_{n+3}^{[1]} \\ hf_{n+2}^{[1]} \\ hf_{n+1}^{[1]} \\ hf_n^{[1]} \end{pmatrix}.$$

### ۳. نظریه پایداری خطی

برای بررسی خواص پایداری روش‌های GLM به صورت (۳-۳)، معادلهٔ آزمون خطی استاندارد را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$y = \xi y, \quad t \geq 0,$$

که در آن  $\xi$  یک پارامتر مختلط است. با اعمال روش (۳-۳) به معادلهٔ آزمون مذکور، داریم:

$$Y^{[n]} = (I - zA)^{-1} U y^{[n-1]}, \\ y^{[n]} = M(z) y^{[n-1]},$$

که  $z = h\xi$  و ماتریس  $I - zA$  ناتکین است. ماتریس  $M(z)$  پایداری روش خطی کلی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$M(z) = V + zB(I - zA)^{-1}U.$$

متناظر با ماتریس پایداری تابع پایداری روش  $p(w, z)$  به صورت [۶]، [۱۱]:

$$p(w, z) = \det(wI - M(z)),$$

تعریف می‌شود که  $w \in \mathbb{C}$ . برای روش شکل GLM جفت PC براساس روش‌های آدامز (۵-۳) تابع پایداری بدین صورت است:

$$p(w, z) = \det(wI - M(z)) = \det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1,r-1} & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2,r-1} & p_{2r} \\ 0 & -1 & w & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & w \end{pmatrix},$$

که در آن

$$\begin{cases} p_{11} = w - (1 + z\beta_k), \\ p_{12} = \beta_{k-1} - z\beta_k\beta_{k-1}^*, \\ \vdots \\ p_{1,r-1} = -\beta_1 - z\beta_1^*, \\ p_{1r} = -\beta_0 - z\beta_0^*, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{21} = -\sum_{j=1}^s z^j \beta_k^{j-1}, \\ p_{22} = w - (z^s \beta_{k-1}^s \beta_{k-1}^* + (\sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1}) \beta_{k-1}), \\ \vdots \\ p_{2,r-1} = -(z^s \beta_k^{s-1} \beta_1^* + (\sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1}) \beta_1), \\ p_{2r} = -(z^s \beta_k^{s-1} \beta_0^* + (\sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1}) \beta_0). \end{array} \right.$$

فرض کنید  $\sigma^*(w)$  و  $\sigma(w)$  به ترتیب چندجمله‌ای مشخصه‌ی دوم روش‌های پیشگو و اصلاح کننده باشند

$$\sigma^*(w) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* w^j, \quad \sigma(w) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j w^j.$$

حال قضیه ۶ را داریم.

قضیه ۶. تابع پایداری روش خطی کلی (۵-۳) با  $k+1$  ورودی عبارت است از:

$$p(w, z) = (w - (1 + z\beta_k)) [w^k - z^s \beta_k^{s-1} \sigma^*(w) - \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1} \sum_{l=0}^{k-1} w^l] \\ - [\sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1} \sigma(w) + \sum_{j=1}^s z^j \beta_k^j \sigma^*(w)]$$

اثبات. با محاسبه دترمینان در تابع پایداری روش (۵-۳) داریم

$$p(w, z) = p_{11} \left( \sum_{j=2}^r p_{2j} w^{r-j} \right) - p_{21} \left( \sum_{j=2}^r p_{1j} w^{r-j} \right),$$

با جای‌گذاری مقادیر  $p_{ij}$ ،  $i, j = 1, 2, \dots, r$  در معادله بالا داریم:

$$p(w, z) = (w - (1 + z\beta_k)) [(w - (z^s \beta_k^{s-1} \beta_{k-1}^* + \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1})) w^{r-2} - (z^s \beta_k^{s-1} \beta_{k-2}^* + \\ + \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1}) w^{r-3} - \dots - (z^s \beta_k^{s-1} \beta_1^* + \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1}) w - (z^s \beta_k^{s-1} \beta_0^* + \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1})] + \\ \sum_{j=1}^s z^j \beta_k^{j-1} [-(\beta_{k-1} + z\beta_k \beta_{k-1}^*) w^{r-2} - \dots - (\beta_1 + z\beta_k \beta_1^*) w - (\beta_0 + z\beta_k \beta_0^*)] \\ = (w - (1 + z\beta_k)) [w^{r-1} - z^s \beta_k^{s-1} \sigma^*(w) - \sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1} \sum_{l=0}^{r-2} w^l \\ - [\sum_{j=1}^{s-1} z^j \beta_k^{j-1} \sigma(w) + \sum_{j=1}^s z^j \beta_k^j \sigma^*(w)]].$$

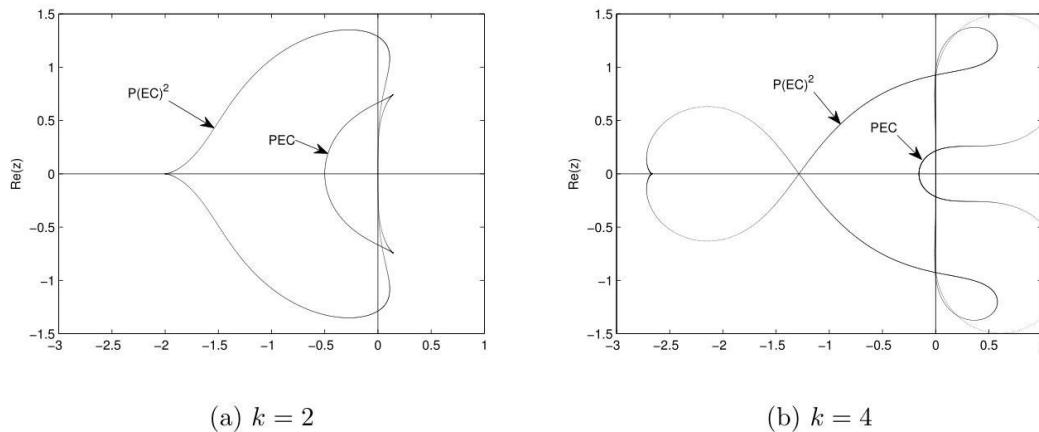
بنابراین، اثبات قضیه کامل می‌شود.

بنا به قضیه ۶ تابع پایداری روش‌های (۷-۳) و (۸-۳) بدین صورت است:

$$p(w, z) = w^3 - w^2 - 2zw^2 + \frac{3}{2}zw - \frac{1}{2}z,$$

$$p(w, z) = w^3 - w^2 - \frac{3}{4}z^2w^2 - zw^2 + \frac{1}{4}z^2w$$

ناحیه پایداری مطلق برای روش‌های (۷-۳)، (۸-۳)، (۱۰-۳) و (۱۱-۳) در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱.

#### ۴. شکل‌بندی GLM برای روش‌های PC با برون‌یابی موضعی<sup>۱</sup>

کاربرد تخمین میلن برای روش‌های پیشگو-اصلاح کننده یک کنترل خطای زمانی را مهیا می‌کند. در حقیقت، نیازی به تخمین مستقیم جمله  $y^{(p+1)}(t_n)$  نیست. بنابراین، در این حالت، تخمین  $PLTE^2$  با شکل‌بندی ساده و مستقیم دردسترس است. افزودن تخمین میلن به جواب (برون‌یابی موضعی)، تقریب دقیق‌تری را نتیجه می‌دهد. از نماد  $L$  برای استفاده از برون‌یابی موضعی در حالت‌های مختلف استفاده می‌کنیم و حالت‌های نتیجه شده با  $P(ECL)^\mu E^{1-t}$  معرفی می‌شوند. برای اعمال تخمین میلن، بهتر است که پیشگو و اصلاح کننده دارای مرتبه‌های یکسان باشند،  $p^* = p$ . در این صورت این حالت‌ها بدین صورت کلی تعریف می‌شوند [۷]:

$$\left. \begin{aligned} P: \quad & y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[\mu]} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[\mu-t]} \\ & f_{n+k}^{[v]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[v]}) \\ (ECL)^\mu: \quad & \hat{y}_{n+k}^{[v+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[\mu]} = h \beta_k f_{n+k}^{[v]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[\mu-t]} \\ & y_{n+k}^{[v+1]} = (1+W) \hat{y}_{n+k}^{[v+1]} - W y_{n+k}^{[0]} \\ E^{1-t}: \quad & f_{n+k}^{[\mu]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[\mu]}) \text{ if } t=0. \end{aligned} \right\} v=0, 1, \dots, \mu-1$$

که در آن  $W = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}$  و  $C_{p+1}$  و  $C_{p+1}^*$  ثابت‌های خطای روش‌های PC و تخمین میلن برای PLTE داده شده است.

$$T_{n+1} = W(y_{n+k}^{[\mu]} - y_{n+k}^{[0]}).$$

1. Local Extrapolation  
2. Principle Local Truncation Error

مشابه حالت‌های  $P(EC)^{\mu} E^{1-t}$  می‌توان شکل‌بندی GLM متناظر با حالت‌های  $P(ECL)^{\mu} E^{1-t}$  را به‌دست آورد. نمایش GLM برای حالت‌های  $P(ECL)^{\mu} E^{1-t}$  بدین صورت داده می‌شود:

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_k & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} -\alpha_{k-1}^* & \cdots & -\alpha_1^* & -\alpha_0^* \\ -\alpha_{k-1} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{k-1} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \end{array} \begin{array}{cccc} \beta_{k-1}^* & \cdots & \beta_1^* & \beta_0^* \\ \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c|cccc} \tilde{\beta}_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} -\tilde{\alpha}_{k-1} & \cdots & -\tilde{\alpha}_1 & -\tilde{\alpha}_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{cccc} \tilde{\beta}_{k-1} & \cdots & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

که در آن

$$\tilde{\beta}_k = (1+W)\beta_k, \quad \tilde{\alpha}_j = -W\alpha_j^* - (1+W)\alpha_j, \quad \tilde{\beta}_j = (1+W)\beta_j - W\beta_j^*, \quad j=0,1,\dots,k-1.$$

شکل GLM برای جفت PCها براساس روش‌های آدامز با برون‌یابی موضعی بدین صورت است:

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_k & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} 1 & \beta_{k-1}^* & \cdots & \beta_1^* \\ 1 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \beta_{k-1} & \cdots & \beta_1 \end{array} \begin{array}{cc} \beta_0^* \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_0 \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c|cccc} \tilde{\beta}_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} 1 & \tilde{\beta}_{k-1} & \cdots & \tilde{\beta}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \begin{array}{cc} \tilde{\beta}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right).$$

به عنوان مثال، حالت PECL را در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های  $A$ ،  $U$ ،  $B$  و  $V$  برای این حالت بدین صورت نتیجه می‌شود:

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & \beta_{k-1}^* & \cdots & \beta_1^* & \beta_0^* \\ \tilde{\beta}_k & 1 & \tilde{\beta}_{k-1} & \cdots & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right).$$

جفت پیشگو-اصلاح کننده (۳-۶) را در نظر بگیرید، داریم:  $W = \frac{-1}{6}$ . شکل GLM این جفت PC در حالت PECL و

$P(ECL)^2$  به ترتیب بدین صورت است:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline \frac{5}{12} & 1 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline \frac{5}{12} & 0 & 1 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

به طور مشابه برای جفت پیشگو-اصلاح کننده (۳-۹)، داریم:  $W = \frac{-19}{270}$  و در حالت‌های PECL و  $P(ECL)^2$

به ترتیب شکل GLM آن‌ها بدین صورت به دست می‌آیند:

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & \frac{55}{24} & -\frac{59}{24} & \frac{37}{24} & -\frac{9}{24} \\ \hline \frac{2259}{6480} & 1 & \frac{5814}{6480} & -\frac{2376}{6480} & \frac{954}{6480} & \frac{171}{6480} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & 1 & \frac{55}{24} & -\frac{59}{24} & \frac{37}{24} & -\frac{9}{24} \\ \frac{9}{24} & 0 & 1 & \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \hline \frac{2259}{6480} & 0 & 1 & \frac{5814}{6480} & -\frac{2376}{6480} & \frac{954}{6480} & \frac{171}{6480} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

## نتایج عددی

در این بخش مزیت نمایش جدید GLM را با چندین مثال عددی نشان می‌دهیم، مقایسه‌های عددی روش‌های ارائه شده در بخش ۳ را با و بدون برون‌یابی موضعی ارائه می‌دهیم و تخمین میلن را نیز گزارش می‌کنیم. محاسبات در نرم افزار MATLAB صورت گرفته است.

مثال ۷. مسئله مقدار اولیه زیر را

$$y'(t) = -10(y-1)^2, \quad y(0) = 2,$$

با جواب دقیق

$$y(t) = \frac{2+10t}{1+10t}$$

در نظر می‌گیریم. تخمین میلن و خطاهای  $L_\infty$  با طول گام  $h = 10^{-2}$  در بازه زمانی  $[0, 5]$ ، برای روش PC مرتبه دوم و چهارم (۳-۶) و (۳-۹) در حالت متناهی  $PEC$  و شکل روش خطی کلی متناظر آن‌ها (۳-۷) و (۳-۱۰) به ترتیب در جدول ۱ و ۳ ارائه شده‌اند و به‌طور مشابه برای حالت متناهی  $P(EC)^2$ ، روش‌های (۳-۸) و (۳-۱۱)، نتایج عددی در جدول‌های ۲ و ۴ ارائه می‌شوند.

جدول ۱. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۱-۴ با روش PC مرتبه دوم (۳-۶) و شکل روش خطی کلی آن (۳-۷)

t	$y_{GLM}$	$y_{PC}$	$y_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	2.0000	2.0000	2.0000	0	0	7.9365E-3
1	1.0909	1.0899	1.0909	7.8191E-6	9.7385E-4	6.8331E-5
2	1.0476	1.0473	1.0476	2.2318E-6	3.6946E-4	2.0681E-5
3	1.0323	1.0321	1.0323	9.0529E-7	1.7668E-4	8.6184E-6
4	1.0244	1.0243	1.0244	5.1158E-7	1.0936E-4	4.9310E-6
5	1.0196	1.0195	1.0196	3.2830E-7	7.4895E-5	3.1888E-6

جدول ۲. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۱-۴ با روش PC مرتبه دوم (۳-۶) و شکل GLM (۳-۸)

t	$y_{GLM}$	$y_{PC}$	$y_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	2.0000	2.0000	2.0000	0	0	0
1	1.0909	1.0899	1.0909	9.2861E-6	9.7385E-4	6.8331E-5
2	1.0476	1.0473	1.0476	2.4224E-6	3.4067E-4	1.8761E-5
3	1.0323	1.0321	1.0323	1.0914E-7	1.7668E-4	8.6184E-6
4	1.0244	1.0243	1.0244	6.1803E-7	1.0936E-4	4.9310E-6
5	1.0196	1.0195	1.0196	3.9711E-7	7.4895E-5	3.1888E-6

جدول ۳. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۱-۴ با روش PC مرتبه چهارم (۳-۹) و شکل GLM (۳-۱۰)

t	$y_{GLM}$	$y_{PC}$	$y_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	2.0000	2.0000	2.0000	0	0	0
1	1.0909	1.0899	1.0909	5.0033E-6	6.9698E-4	2.8863E-5
2	1.0476	1.0473	1.0476	1.3724E-6	2.4620E-4	7.9291E-5
3	1.0323	1.0321	1.0323	6.2974E-7	1.2821E-4	3.6425E-6
4	1.0244	1.0243	1.0244	3.6000E-7	7.9548E-4	2.0839E-6
5	1.0196	1.0195	1.0196	2.3266E-7	5.4567E-5	1.3475E-6

جدول ۴. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۱-۴ با روش PC مرتبه چهارم (۹-۳) و شکل GLM (۱۱-۳)

t	$y_{GLM}$	$y_{PC}$	$y_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	2.0000	2.0000	2.0000	0	0	0
1	1.0909	1.0899	1.0909	5.0464E-5	7.6014E-4	2.8822E-5
2	1.0476	1.0473	1.0476	1.3842E-5	2.6374E-4	7.9232E-5
3	1.0323	1.0321	1.0323	6.3517E-6	1.3629E-4	3.6407E-6
4	1.0244	1.0243	1.0244	3.6310E-6	7.4182E-4	2.0831E-6
5	1.0196	1.0195	1.0196	2.3466E-6	5.7566E-5	1.3471E-6

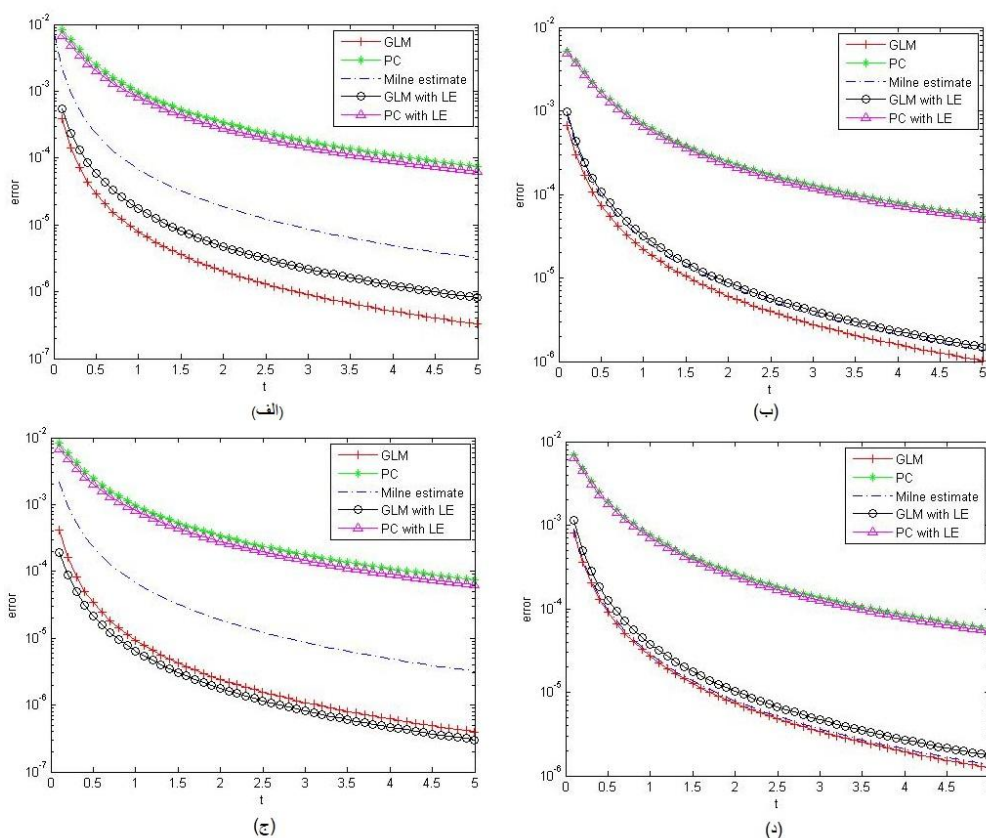
مثال ۸. در این مثال مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$u'' = -u(u^2 + v^2)^{-3/2}, \quad v'' = -v(u^2 + v^2)^{3/2},$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

که دارای جواب دقیق زیر است:

$$u(t) = \cos(t), \quad v(t) = \sin(t).$$



شکل ۲. مقایسه خطاهای روش PC و GLM برای مثال ۷: الف) روش مرتبه دوم حالت PEC ب) روش مرتبه

چهارم حالت (PEC)، ج) روش مرتبه دوم حالت  $(P(EC)^2)$ ، د) روش مرتبه چهارم حالت  $(P(EC)^2)$

مشابه مثال ۷ این مسله را در بازه زمانی  $[0, 5]$  با طول گام  $h = 10^{-2}$  حل می‌کنیم. تخمین میلن و خطاهای  $L_\infty$ ،

برای روش PC مرتبه دوم و چهارم (۳-۶) و (۳-۹) در حالت متناهی PEC و شکل روش خطی کلی آن‌ها (۳-۷) و

(۳-۱۰) به ترتیب در جدول ۵ و ۷ ارائه شده‌اند و به‌طور مشابه برای حالت متناهی  $P(EC)^2$  نتایج عددی در جدول

۶ و ۸ ارائه می‌شوند.

جدول ۵. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۴-۲ با روش PC مرتبه دوم (۳-۶) و شکل GLM (۳-۷)

t	$u_{GLM}$	$u_{PC}$	$u_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0
1	5.4028E-1	5.4271E-1	5.4030E-1	2.3285E-5	2.4092E-3	6.9339E-4
2	-4.1618E-1	-4.1446E-1	-4.1615E-1	3.2673E-5	1.6840E-3	7.6203E-4
3	-9.9004E-1	-9.9381E-1	-9.8999E-1	4.6669E-5	3.8181E-3	1.2549E-4
4	-6.5380E-1	-6.7105E-1	-6.5364E-1	1.5741E-4	1.7403E-2	6.1151E-4
5	2.8337E-1	2.5235E-1	2.8366E-1	2.9081E-4	3.1317E-2	7.9971E-4

t	$v_{GLM}$	$v_{PC}$	$v_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	0	0	0	0	0	0
1	8.4147E-1	8.4296E-1	8.4174E-1	4.4787E-6	1.4913E-3	4.5298E-4
2	9.0931E-1	9.0915E-1	9.0930E-1	1.4611E-5	1.4381E-4	3.4754E-4
3	1.4110E-1	1.3749E-1	1.4112E-1	2.1499E-5	3.6344E-3	8.2857E-4
4	-7.5683E-1	-7.6170E-1	-7.5680E-1	2.9219E-5	4.9020E-3	5.3844E-4
5	-9.5881E-1	-9.4642E-1	-9.5892E-1	1.1205E-4	1.2508E-2	2.3870E-4

جدول ۶. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۴-۲ با روش PC مرتبه دوم (۳-۶) و شکل GLM (۳-۸)

t	$u_{GLM}$	$u_{PC}$	$u_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0
1	5.4028E-1	5.4271E-1	5.4030E-1	2.3254E-5	2.4092E-3	6.9725E-4
2	-4.1618E-1	-4.1446E-1	-4.1615E-1	3.2651E-5	1.6840E-3	7.6287E-4
3	-9.9004E-1	-9.9381E-1	-9.8999E-1	4.6717E-5	3.8181E-3	1.2753E-4
4	-6.5380E-1	-6.7105E-1	-6.5364E-1	1.5763E-4	1.7403E-2	6.1015E-4
5	2.8337E-1	2.5235E-1	2.8366E-1	2.9121E-4	3.1317E-2	8.0024E-4

t	$v_{GLM}$	$v_{PC}$	$v_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	0	0	0	0	0	0
1	8.4147E-1	8.4296E-1	8.4174E-1	4.4601E-6	1.4913E-3	4.5473E-4
2	9.0931E-1	9.0915E-1	9.0930E-1	1.4610E-5	1.4381E-4	3.4563E-4
3	1.4110E-1	1.3749E-1	1.4112E-1	2.1543E-5	3.6344E-3	8.2825E-4
4	-7.5683E-1	-7.6170E-1	-7.5680E-1	2.9279E-5	4.9020E-3	5.4008E-4
5	-9.5881E-1	-9.4642E-1	-9.5892E-1	1.1220E-4	1.2508E-2	2.3684E-4

جدول ۷. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۴-۲ با روش PC مرتبه چهارم (۳-۹) و شکل GLM (۳-۱۰)

t	$u_{GLM}$	$u_{PC}$	$u_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0
1	5.4028E-1	5.4271E-1	5.4030E-1	7.4833E-5	1.7704E-3	2.9507E-4
2	-4.1618E-1	-4.1446E-1	-4.1615E-1	1.0921E-4	1.2044E-3	3.2139E-4
3	-9.9004E-1	-9.9381E-1	-9.8999E-1	1.4313E-4	2.9435E-3	5.2392E-5
4	-6.5380E-1	-6.7105E-1	-6.5364E-1	4.5545E-4	1.3336E-2	2.5995E-4
5	2.8337E-1	2.5235E-1	2.8366E-1	8.4620E-4	2.3983E-2	3.3763E-4

t	$v_{GLM}$	$v_{PC}$	$v_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	0	0	0	0	0	0
1	8.4147E-1	8.4296E-1	8.4174E-1	1.0066E-5	1.1125E-3	1.9116E-4
2	9.0931E-1	9.0915E-1	9.0930E-1	3.8767E-5	8.7780E-5	1.4646E-4
3	1.4110E-1	1.3749E-1	1.4112E-1	8.3267E-5	2.7641E-3	3.4947E-4



4	-7.5683E-1	-7.6170E-1	-7.5680E-1	1.0435E-4	3.7272E-3	2.2812E-4
5	-9.5881E-1	-9.4642E-1	-9.5892E-1	3.4662E-4	9.4734E-2	1.0026E-4

جدول ۸. خطاهای  $L_\infty$  و تخمین میلن برای آزمایش ۴-۲ با روش PC مرتبه چهارم (۳-۸) و شکل GLM (۳-۱۱)

t	$u_{GLM}$	$u_{PC}$	$u_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0
1	5.4028E-1	5.4271E-1	5.4030E-1	7.4832E-5	1.7704E-3	2.9507E-4
2	-4.1618E-1	-4.1446E-1	-4.1615E-1	1.0921E-4	1.2044E-3	3.2139E-4
3	-9.9004E-1	-9.9381E-1	-9.8999E-1	1.4313E-4	2.9435E-3	5.2392E-5
4	-6.5380E-1	-6.7105E-1	-6.5364E-1	4.5545E-4	1.3336E-2	2.5995E-4
5	2.8337E-1	2.5235E-1	2.8366E-1	8.4620E-4	2.3983E-2	3.3763E-4

t	$v_{GLM}$	$v_{PC}$	$v_{exact}$	$E_{GLM}$	$E_{PC}$	تخمین میلن
0	0	0	0	0	0	0
1	8.4147E-1	8.4296E-1	8.4174E-1	1.0066E-5	1.1125E-3	1.9116E-4
2	9.0931E-1	9.0915E-1	9.0930E-1	3.8767E-5	8.7780E-5	1.4646E-4
3	1.4110E-1	1.3749E-1	1.4112E-1	8.3266E-5	2.7641E-3	3.4947E-4
4	-7.5683E-1	-7.6170E-1	-7.5680E-1	1.0435E-4	3.7272E-3	2.2812E-4
5	-9.5881E-1	-9.4642E-1	-9.5892E-1	3.4662E-4	9.4734E-2	1.0026E-4

### نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های پیشگو-اصلاح کننده در چارچوب روش خطی کلی ارائه و مشاهده کردیم که شکلول بندی جدید دارای دقت بیشتری نسبت به شکلول بندی سنتی آن است. همچنین با استفاده از تخمین میلن، برون‌یابی موضعی را اعمال کرده و ساختار GLM متناظر آن را ارائه کردیم.

### منابع

1. Butcher J. C., "On the convergence of numerical solutions to ordinary differential equations", Mathematics of Computation, Vol. 20 (1966) 1-10.
2. Butcher J. C., "Diagonally-implicit multi-stage integration methods", Applied Numerical Mathematics, Vol. 11 (1993) 347-363.
3. Butcher J. C., Jackiewicz Z., "Construction of diagonally implicit general linear methods of type 1 and 2 for ordinary differential equations, Applied Numerical Mathematics, Vol. 21 (1996) 385-415.
4. Jackiewicz Z., Tracogna S., "A General Class of Two-Step Runge-Kutta Methods for Ordinary Differential Equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 32 (1995) 1390-1427.
5. Butcher J. C., Hojjati G., "Second derivative methods with RK stability", Numerical Algorithms, Vol. 40 (2005) 415-429.
6. Jackiewicz Z., "General Linear Methods for Ordinary Differential Equations", Wiley (2009).

7. Lambert J. D., "Numerical Methods for Ordinary Differential Systems", The Initial Value Problem: Wiley (1991).
8. Butcher J. C., "General linear methods for ordinary differential equations", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 79 (2009) 1834-1845.
9. Butcher J. C., "Numerical Methods for Ordinary Differential Equations", Wiley (2008).
10. Butcher J. C., "General linear methods", Computers & Mathematics with Applications, Vol. 31(1996) 105-112.
11. Burrage K., Butcher J. C., "Non-linear stability of a general class of differential equation methods", BIT, 20 (1980) 185-203.
12. Butcher J. C., "General linear method: A survey", Appl. Numer. Math. 1 (1985) 273-284.
13. Butcher J. C., Jackiewicz Z., "Implementation of diagonally implicit multi-stage integration methods for ordinary differential equations", SIAM J. Numer. Anal. 34, No. 6 (1997) 2119-2141.
14. Butcher J. C., Jackiewicz Z., "Construction of high order diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations", Appl. Numer. Math. 27, No. 1, (1998) 112.
15. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G., "Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems", Second Revised Edition, Springer-Verlag, Corrected 3rd printing (2008).
16. Hairer E., Wanner G., "Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems", Second Revised Edition, Springer-Verlag, Corrected printing (2002).