شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا

قدرت‌اله فصیحی رامندی*، شاهرود اعظمی
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی محض

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله ابتدا مفاهیم مقدماتی منیفلد سایا را یاد آوری می‌کنیم بعد شار ریچی-بورگویگنون که تعمیمی از شار ریچی و شار یامابه است را روی منیفلدهای سایا معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از میدان برداری دیتورک معادله شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا را به معادلهٔ دیگری تحویل یافته می‌کنیم که خطی‌سازی این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی اکیداً سهموی است و با قضایای معادلات دیفرانسیل سهموی با مشتقات جزئی نشان می‌دهیم که تحت شرایطی شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا با شرط آغازین دارای جواب است و این جواب یکتا است. هم‌چنین، در نهایت نشان می‌دهیم که هر جواب از شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا بسته (فشرده و بدون مرز) خود متشابه است و سالیتون متناظر با آن سالیتون مانا است.

واژه‌های کلیدی: شار هندسی، سالیتون، منیفلد سایا، خود-متشابه.

مقدمه

مفهوم ساختارهای سایا و هندسه آن به‌علت کاربرد وسیع در ریاضیات و فیزیک نظری مورد توجه پژوهش‌گران است و دامنهٔ تحقیقات حول آن گسترده است [۱۰]. در فیزیک نظری، یک منیفلد سایا در واقع به‌عنوان فضای فاز یک سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفته می‌شود و هم‌چنین کاربردهای این مفهوم در مکانیک، اپتیک و نظریه کنترل زیاد است. علاوه بر این، نظریهٔ کلاسیکی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول برای یک تابع اسکالر را می‌توان به‌عنوان بررسی زیرمنیفلدهای یک منیفلد سایا در نظر گرفت.

از طرفی دیگر شارهای هندسی در ریاضیات و فیزیک به‌عنوان یک ابزار قدرتمند مطرح هستند و معمولاً برای دست یافتن به ساختارهای هندسی حائز شرایط مطلوب‌تر استفاده می‌شوند. شار هندسی یک تکامل ساختار هندسی تحت یک معادله دیفرانسیل وابسته به تابعکی روی یک منیفلد است که معمولاً وابسته به بعضی از انحناهای منیفلد است. در واقع شارهای هندسی سیستم‌های دینامیکی روی فضاهای نامتناهی البعد مترهای منیفلد است.

شار ریچی در سال ۱۹۸۲ به‌وسیلهٔ هامیلتون معرفی شد [۹]. و موجب حل مسائل مهمی در هندسه از جمله حدس مشهور پوانکاره شد. قدرت‌مند بودن این روش باعث شد تا شارهای هندسی مشابه آن تعریف و وجود و یکتایی جواب آنها بررسی شود. معروف‌ترین شارهای هندسی عبارتند از: شار گرمایی [۸]، شار انحنای میانگین [۶]، شار هارمونیک ریچی [۱۱]، شار هندسی هذلولوی [۷].

مفهوم شار ریچی روی منیفلدهای فینسلری و مفاهیم وابسته در این منیفلدها به‌وسیلهٔ پژوهش‌گران زیادی بررسی شده است (به‌عنوان مثال [۱] و [۲] ملاحظه شود).

*نویسنده مسئول ramandi2005@yahoo.com

فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی با متر ریمانی g_0 باشد. یکی دیگر از شارهای هندسی، شار ریچی-بورگویگنون بدین‌صورت است:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric + 2\rho Rg, \qquad g(0) = g_0$$

که در آن Ric تانسور ریچی از g(t)، R انحنای اسکالر و ρ عدد حقیقی ثابت است. این شار اولین بار به‌وسیلهٔ بورگویگنون (۱۹۸۱) معرفی شد [۴]. سپس کاتینو و همکارانش نشان دادند که این شار با شرط $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$ در زمان کوتاه دارای جواب یکتا است [۵].

در این مقاله مفهوم شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا را تعریف کرده و به بررسی وجود و یکتایی جواب آن می‌پردازیم. در[۱۲] بررسی وجود جواب و یکتایی شار ریچی روی منیفلدهای سایا بررسی شده است. شار هندسی که در این‌جا در نظر می‌گیریم حالت کلی‌تر است و در حالت خاص $\rho = 0$، نتایج ما منطبق با نتایج [۱۲] است. نتایج به‌دست آمده، نشان می‌دهد که شار ریچی-بورگویگنون روی یک منیفلد سایا به‌ازای $\rho < \frac{1}{4}$ دارای جواب یکتا در مدت کوتاه است و این منیفلدها سالیتون ریچی است.

پیش‌نیازها

در این بخش مفاهیم هندسی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. این مطالب استاندارد بوده و در منابع استاندارد یافت می‌شوند.

۱. ساختارهای همتافته و هرمیتی

تعریف ۱. یک فضای برداری همتافته، یک فضای برداری حقیقی و متناهی بعد V به‌همراه یک فرم دو خطی و ناتبهگون و متناوب Ω موسوم به فرم همتافته است. در این صورت، زوج (V,Ω) را یک فضای برداری همتافته گوییم.

خاصیت ناتبهگونی فرم همتافته ایجاب می‌کند که در یک فضای برداری همتافته (V,Ω) فضای برداری V و دوگان آن V^* به‌طور طبیعی یکریخت باشند. در واقع، نگاشت $v \mapsto \Omega(v,.)$ یک یکریختی طبیعی از V به V^* تعریف می‌کند.

گزارهٔ ۲. اگر (V,Ω) یک فضای برداری همتافته باشد، آن‌گاه یک پایه $\{\omega^i\}$ از V^* وجود دارد طوری‌که $\Omega = \sum \omega^i \wedge \omega^{n+i}$ و نسبت به پایه دوگان $\{\omega^i\}$ برای V، ماتریس Ω بدین‌صورت است:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. به‌ویژه، بعد Vعددی زوج $\dim(V) = 2n$ است.

اثبات: به [۳] رجوع کنید.

با توجه به گزارهٔ ۲، اگر (V,Ω) یک فضای برداری همتافته و 2n-بعدی باشد آن‌گاه

$$\Omega^n = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega = (-1)^{[\frac{n}{2}]} n!\, \omega^1 \wedge \cdots \omega^{2n}.$$

تعریف ۳. در یک فضای برداری همتافته (V, Ω) برای هر زیر فضای W از V تعریف می‌کنیم

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in W: \ \ \Omega(v, u) = 0\}$$

زیر فضای W از V را زیر فضای لاگرانژی گوییم هرگاه $W^{\perp} = W$.

تعریف ۴. یک نگاشت خطی T از فضای برداری همتافته (V_1, Ω_1) به فضای برداری همتافته (V_2, Ω_2) را یک نگاشت همتافته گوییم هرگاه حافظ فرم همتافته باشد $T^*(\Omega_2) = \Omega_1$، یعنی برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم:

$$\Omega_2(T(u), T(v)) = \Omega_1(u, v).$$

اکنون می‌توانیم این مفاهیم را در سطح منیفلدها تعریف کنیم.

تعریف ۵. ۶-۲: یک منیفلد همتافته، یک منیفلد M به همراه یک ۲-فرم ω روی M است طوری‌که برای هر $p \in M$، زوج (T_pM, ω_p) یک فضای برداری همتافته باشد و $d\omega = 0$. در این صورت، زوج (M, ω) را یک منیفلد همتافته و ω را فرم همتافته گوییم.

با توجه به مطالبی که بیان شد، واضح است که یک منیفلد همتافته (M, ω) لزوماً جهت‌پذیر و از بعد زوج است.

گزارهٔ ۶. ۸-۲ (قضیه داربو): در یک منیفلد همتافته (M, ω) حول هر نقطه $p \in M$ یک دستگاه مختصات $(x^1, \cdots x^n, y^1, \cdots y^n)$ روی یک همسایگی U حول p وجود دارد طوری‌که $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$.

اثبات: به [۳] رجوع کنید.

تعریف ۷. ۹-۲: نگاشت هموار بین منیفلدهای همتافته $f: (M, \omega_1) \to (N, \omega_2)$ را یک نگاشت همتافته گوییم هرگاه $f^*(\omega_2) = \omega_1$.

تعریف ۸. ۱۰-۲: یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ در یک منیفلد همتافته (M, ω) را یک میدان برداری موضعاً هامیلتونی گوییم هرگاه $L_X \omega = 0$.

هرگاه X یک میدان برداری موضعاً هامیلتونی باشد آن‌گاه شار آن $\{\phi_t\}$ یک خانواده از نگاشت‌های همتافته است. هم‌چنین، می‌توان ثابت کرد که یک میدان برداری X موضعاً هامیلتونی است اگر و تنها اگر یک فرمی $i_X \omega = \omega(X, .)$ بسته باشد.

تعریف ۹. ۱۱-۲: میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ در منیفلد همتافته (M, ω) را یک میدان برداری هامیلتونی گوییم هرگاه تابع $f \in C^{\infty}(M)$ وجود داشته باشد که $i_X \omega = df$.

به سهولت بررسی می‌شود که کروشه لی دو میدان برداری موضعاً هامیلتونی، یک میدان برداری هامیلتونی است. در ادامه، نشان می‌دهیم در یک منیفلد همتافته (M, ω) می‌توان یک ساختار کروشه پواسون روی جبر توابع هموار $C^{\infty}(M)$ تعریف کرد.

به‌ازای هر تابع هموار f، df یک ۱-فرم است و میدان برداری یکتایی مانند X_f وجود دارد که $i_{X_f}\omega=df$.
اکنون برای $f,g\in C^\infty(M)$ تعریف می‌کنیم $\{f,g\}=\omega(X_f,X_g)$ با این عمل، $C^\infty(M)$ ساختار یک جبر لی دارد و نگاشت $f\mapsto X_f$ یک همریختی جبرهای لی بین $C^\infty(M)$ و $\mathcal{X}(M)$ است.

در ادامه این بخش، به مفاهیم و تعاریف متریکی در هندسه همتافته می‌پردازیم.

تعریف ۱۰. ۱۲-۲: یک ساختار تقریباً مختلط روی یک منیفلد هموار M، یک میدان تانسوری از نوع (۱،۱) است که $J^2=-Id$. در این صورت، زوج (M,J) را یک منیفلد تقریباً مختلط گوییم.

گزارهٔ ۱۱. ۱۳-۲: اگر (M,ω) یک منیفلد همتافته باشد، آن‌گاه یک متر ریمانی g و یک ساختار تقریباً مختلط J روی M وجود دارد طوری‌که برای هر $X,Y\in\mathcal{X}(M)$، $\omega(X,Y)=g(X,JY)$.

اثبات: به [۳] رجوع کنید.

تعریف ۱۲. ۱۴-۲: یک متر ریمانی g روی یک منیفلد تقریباً مختلط (M,J) را هرمیتی گوییم هرگاه حافظ ساختار تقریبا مختلط J باشد، یعنی برای هر $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ داشته باشیم g(JX,JY)=g(X,Y) در این صورت سه‌تایی (M,J,g) را یک ساختار تقریبا هرمیتی گویند.

وابسته به یک ساختار تقریباً هرمیتی (M,J,g)، یک دو فرمی موسوم به ۲-فرم اساسی بدین‌صورت تعریف می‌شود. در واقع، برای هر $X,Y\in\mathcal{X}(M)$

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY).$$

تعریف ۱۳. ۱۵-۲: یک منیفلد تقریباً هرمیتی (M,J,g) را تقریباً کاهلری گویند هرگاه دو فرم اساسی متناظر با آن بسته باشد یعنی، $d\Omega=0$ و آن را کاهلری گویند هرگاه علاوه بر این، $\nabla J=0$، که در آن ∇ التصاق لوی-چویتای وابسته به g است.

بنابراین، بررسی هندسه ریمانی یک منیفلد همتافته (M,ω) را می‌توان با بررسی هندسه ریمانی یک ساختار تقریباً کاهلری انجام داد.

۲. منیفلدهای سایا

با توجه به مطالب بخش قبل دیدیم که یک منیفلد از بعد فرد نمی‌تواند ساختار همتافته بپذیرد. ساختار سایا روی یک منیفلد فرد بعدی M ساختاری، شبیه ساختارهای همتافته منیفلدهای زوج بعدی است. در زیر، این مفهوم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۴. ۱۶-۲: یک ساختار سایا روی یک منیفلد $(2n+1)$-بعدی M، یک توزیع انتگرال‌ناپذیر و ماکسیمال $H\subset TM$ است. در این صورت (M,H) را یک منیفلد سایا گوییم.

فرض کنید که یک ۱- فرم α روی M وجود دارد طوری‌که $H=\ker(\alpha)$، در این صورت شرط انتگرال‌ناپذیری H معادل با این است که

$\alpha\wedge(d\alpha)^n>0$ یعنی $\Omega=\alpha\wedge(d\alpha)^n$ یک عنصر حجم روی M است، بنابراین منیفلدهای سایا لزوماً جهت‌پذیر هستند. از این به بعد، ۱-فرم α با مشخصات بالا را فرم سایای وابسته به منیفلد سایا (M,H) گوییم.

مثال ۱۵. ۱۷-۲: اگر مختصات روی $\mathbb{R}^{2n+1}$ به صورت $(x^1,y^1,\cdots,x^n,y^n,z)$ باشد، آن‌گاه یک ساختار سایای استاندارد طبیعی به‌کمک فرم سایای $\alpha = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$ ایجاد می‌شود. اگر $H=\ker\alpha$، آن‌گاه $(\mathbb{R}^{2n+1},H)$ یک منیفلد سایا است.

در ارتباط با فرم‌های سایا گزارهٔ ۱۶. که نظیر قضیهٔ موزر در منیفلدهای سایا است را داریم.

گزارهٔ ۱۶. ۱۸-۲: فرض کنید $\alpha(t)$ که $t\in[0,1]$، یک خانواده از فرم‌های سایا روی منیفلد بسته (فشرده و بدون مرز) M باشد و $\alpha(0)=\alpha$، در این صورت یک خانواده از دیفئومورفیسم‌های ψ_t وجود دارد که

$$\alpha(t)=\psi_t^*\alpha\,.$$

اثبات: به [۳] رجوع کنید.

هم‌چنین، فضای همه فرم‌های سایا روی یک منیفلد هموار M یک فضای آفین با فضای برداری هادی $A^1(M)$ فضای همه یک فرم‌های دیفرانسیلی روی M است. گزارهٔ ۱۷. را داریم.

گزارهٔ ۱۷. ۱۹-۲: فرض کنید α یک فرم سایا و η یک ۱-فرم روی M باشند. عددد حقیقی و مثبت T وجود دارد که $\alpha(t)=\alpha+t\eta$ برای هر $t\in[0,T]$ یک فرم سایا است.

اثبات: به [۱۲] رجوع کنید.

در منیفلدهای سایا، یک میدان برداری طبیعی (نسبت به ساختار سایا) می‌توان بدین‌صورت تعریف کرد:

تعریف ۱۸. ۲۰-۲: میدان برداری ریب یا میدان برداری مشخصه ξ برای یک فرم سایای α با این معادلات تعریف می‌شود:

$$\alpha(\xi)=1,\qquad d\alpha(\xi,.)=0.$$

به‌کمک میدان برداری مشخصه ξ می‌توان یک تجزیه طبیعی از کلاف مماس بدین‌صورت ایجاد کرد: $TM=L_\xi\oplus H$ که در آن L_ξ زیر فضای عمودی تولیده شده توسط ξ است. مشابه، ساختار تقریباً مختلط در منیفلدهای کاهلری، وابسته به هر فرم سایای α، یک میدان تانسوری نوع (۱،۱) مانند ϕ وجود دارد که

$$L_\xi=\ker(\phi),\qquad H=Im(\phi)$$

هرگاه میدان تانسوری ϕ در این شرط صدق کند:

$$\phi^2=-I+\alpha\otimes\xi$$

که در آن I تابع همانی است، آن‌گاه آن را یک ساختار تقریباً سایا می‌نامیم. چهارتایی (M,α,ξ,ϕ) را یک ساختار تقریباً سایا می‌نامند. زیرا $\phi(\xi)=0$، بنابراین تجزیه کلاف مماس را می‌توان به‌صورن (۱) بازنویسی کرد.

$$TM=\ker(\phi)\oplus Im(\phi) \tag{۱}$$

به‌کمک تعریف میدان برداری مشخصه و اتحاد کارتان، واضح است که مشتق لی α در امتداد میدان برداری ξ برابر صفر است $L_\xi\alpha=0$. بنابراین، می‌توان گفت که فرم سایای α تحت فلوی میدان برداری مشخصه ξ پایا است و این تعریف‌های کلی را داریم:

تعریف ۱۹. ۲-۲۱: تابع هموار $f: M \to N$ بین منیفلدهای سایای M و N به‌ترتیب با فرم‌های سایای α_M و α_N را سایا گوییم هرگاه حافظ فرم سایا باشد یعنی، $f^*(\alpha_N) = \alpha_M$.

تعریف ۲۰. ۲-۲۲: میدان برداری X روی منیفلد سایای M با فرم سایای α را موضعا سایا گوییم هرگاه $L_X\alpha = 0$ و آن را سایا گوییم هرگاه تابع هموار $f \in C^\infty(M)$ وجود داشته باشد طوری‌که $L_X\alpha = f\alpha$.

به‌کمک اتحاد $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ می‌توان بررسی کرد که کروشه لی دو میدان بردای سایا مجدداً میدان برداری سایا است و بنابراین، مجموعه همه میدان‌های برداری سایا که آن را با $\mathcal{X}^c M$ نشان می‌دهیم، یک زیرجبر لی از جبر لی میدان‌های برداری $\mathcal{X}(M)$ است. در ادامه، نگاشت دو سوئی که از $\mathcal{X}^c M$ به $C^\infty(M)$ وجود دارد را معرفی می‌کنیم. بنابراین، با انتقال عمل کروشه لی می‌توان یک عمل کروشه پواسون روی جبر توابع هموار $C^\infty(M)$ ایجاد کرد. تعریف کنید

$$\rho_1 : \mathcal{X}^c M \to C^\infty(M), \qquad X \mapsto \alpha(X)$$
$$\rho_2 : C^\infty(M) \to \mathcal{X}^c M, \qquad f \mapsto X_f$$

که در آن X_f میدان برداری سایایی است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\alpha(X_f) = f, \qquad d\alpha(X_f, .) = df(\xi)\alpha - df$$

هم‌چنین به سادگی می‌توان دید که $L_{X_f}\alpha = df(\xi)\alpha$. اکنون برای توابع هموار $f, g \in C^\infty(M)$ عمل کروشه پواسون بدین‌صورت تعریف می‌شود: $\{f, g\} = [X_f, X_g]$.

۲-۱. هندسۀ ریمانی منیفلدهای سایا

در بررسی هندسه ریمانی منیفلدهای سایا به سبب داشتن ساختارهای اضافه، منطقی است با مترهای ریمانی کار کنیم که در شرایط سازگاری خاصی صدق کنند.

تعریف ۲۱. ۲-۲۳: یک متر ریمانی g روی منیفلد تقریباً سایای (M, α, ξ, ϕ) را سازگار گوییم هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$،

$$g(X, Y) = g(\phi(X), \phi(Y)) + \alpha(X)\alpha(Y)$$

در این صورت $(M, \alpha, \xi, \phi, g)$ را یک ساختار تقریباً سایای متریک گوییم. هم‌چنین، یک ساختار تقریباً سایای متریک را:

الف) ساساکی گوییم هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$،

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \alpha(Y)X$$

ب) منیفلد K-سایا گوییم هرگاه $\nabla\xi = -\phi$ و

پ) α-اینشتینی گوییم هرگاه $Ric(X, Y) = ag(X, Y) + b\alpha(X)\alpha(Y)$

که در آن a و b توابع هموار روی M و ∇ التصاق لوی-چویتای وابسته به g است.

شایان گفتن است که نسبت به یک متر سازگار g تجزیه (1)، یک تجزیه متعامد است. نشان داده شده است که هر منیفلد ساساکی، یک منیفلد K-سایا است ولی عکس آن فقط در بعد $\dim(M)=3$ صحیح است. نکات زیر در ارتباط با ساختارهای تقریباً سایای متریک در ادامه کار نیاز است و در این‌جا بیان می‌شوند.

اگر (M,α,ξ,ϕ,g) یک ساختار تقریباً سایای متریک باشد آن‌گاه برای هر اسکالر مثبت a یک ساختار تقریباً سایای متریک با مشخصات

$$\bar{\alpha}=a\alpha,\quad \bar{\phi}=\phi,\quad \bar{\xi}=\frac{1}{a}\xi,\quad \bar{g}=ag+a(a-1)\alpha\otimes\alpha$$

ایجاد می‌شود که به تغییر D-هموتوتیک ساختار (M,α,ξ,ϕ,g) مشهور است. گزارهٔ مهم ۲۲ را نیز داریم.

گزارهٔ ۲۲. ۲۴-۲: فرض کنید α یک فرم سایا و ψ یک تبدیل روی M باشند. آن گاه $\psi^*\alpha$ یک فرم سایا است و مولفه‌های آن بدین‌صورت است:

$$\bar{g}=\psi^* g,\quad \bar{\phi}=(\psi^{-1})_*\phi\psi_*,\quad \bar{\xi}=(\psi^{-1})_*\xi.$$

در ادامه این بخش، به بحث وجود چنین ساختارهایی می‌پردازیم. درواقع، یک فرایند برای ساختن ساختارهای تقریباً سایای متریک را شرح می‌دهیم.

فرض کنید M یک منیفلد $(2n+1)$ بعدی باشد و یک متر ریمانی h را روی آن ثابت کنید. اگر α یک فرم سایا روی M باشد، آن‌گاه $d\alpha$ یک فرم همتافته روی کلاف برداری H است. اندمورفیسم $A\in Aut(H)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم: برای هر $X,Y\in\Gamma H$، $d\alpha(X,Y)=h(X,AY)$. چون $d\alpha$ متناوب است، بنابراین $h(X,AY)=-h(AX,Y)$. فرض کنید A^* الحاقی A نسبت به h باشد، در این صورت AA^* در هر نقطه متقارن و مثبت معین است، بنابراین قطری‌پدیر با مقادیر ویژه $\{\lambda_i\}$ اکیداً مثبت است. فرض کنید $\sqrt{AA^*}$ ریشه دوم AA^* باشد که درواقع، ماتریسی قطری با درایه‌های $\sqrt{\lambda_i}$ روی قطر اصلی است. اندومورفیسم A با $\sqrt{AA^*}$ جابه‌جا می‌شود. قرار دهید

$J=(\sqrt{AA^*})^{-1}A,$ در این صورت، J با A و $\sqrt{AA^*}$ جابه‌جا می‌شود که نتیجه می‌دهد:

$$J^*=A^*(\sqrt{AA^*})^{-1}=-A(\sqrt{AA^*})^{-1}=-J$$

و

$$J^2=-JJ^*=-(\sqrt{AA^*})^{-1}A^*A(\sqrt{AA^*})^{-1}=-Id.$$

برای هر $X,Y\in\Gamma H$، قرار دهید $m(X,Y)=h(X,\sqrt{AA^*}Y)$. به سادگی بررسی می‌شود که m یک متر روی کلاف برداری H است و $d\alpha(X,Y)=m(X,JY)$. بنابراین به‌کمک قطبی‌سازی یک متر ریمانی یکتا (نسبت به h)

m روی توزیع H و یک میدان تانسوری یکتا (نسبت به h) J از نوع (۱،۱) وجود دارد که برای هر $X,Y\in\Gamma H$ داریم

$$J^2(X)=-X,\qquad m(X,JY)=d\alpha(X,Y).$$

فرض کنید ξ میدان برداری مشخصه وابسته به‌صورت سایای α باشد، m را به یک متر ریمانی g روی M با تعریف $g(X,\xi)=\alpha(X)$ تعمیم می‌دهیم. هم‌چنین، J را به اندومورفیسم ϕ با تعریف $\phi(\xi)=0$ تمدید می‌کنیم، بنابراین داریم

$$\phi^2=-I+\alpha\otimes\xi,\qquad g=-g^T+\alpha\otimes\alpha$$

که در آن g^T بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$g^T(X,Y)=d\alpha(X,\phi Y).$$

شار ریچی-بورگویگنون و بررسی وجود جواب آن

در این بخش شار ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا را تعریف کرده و به بررسی وجود و یکتایی جواب‌های کوتاه مدت برای آن می‌پردازیم. در تعریف این شار هندسی، از شار ریچی-بورگویگنون در منیفلدهای ریمانی ایده گرفته‌ایم.

فرض کنید (M,α) یک منیفلد سایا n-بعدی (n عددی فرد است) باشد و هم‌چنین فرض کنید $(M,\alpha(t))$ یک خانواده هموار و ۱-پارامتری از ساختارهای تقریباً سایای متریک روی M باشد. معادلهٔ (۲) را شار ریچی-بورگویگنون روی M گوییم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}=-2i_{\xi}(Ric-\rho Rg)\\ \alpha(0)=\alpha\end{cases}\qquad(۲)$$

که در آن $\xi=\xi(t)$ میدان برداری مشخصه وابسته به $\alpha=\alpha(t)$، ρ یک اسکالر حقیقی، Ric تانسور انحنای ریچی و R انحنای اسکالر وابسته به متر $g=g(t)$ است.

به‌ازای یک ۱-فرم η روی M و برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک t، می‌دانیم $\alpha(t)=\alpha+t\eta$، یک فرم سایا است. فرض کنیم $(\xi(t),\phi(t),g(t))$ سایر مولفه‌های سایای مرتبط با آن باشد. برای خطی‌سازی معادلهٔ (۲) لازم است که مشتقات $\xi(t)$، g(t)، $Ric_{g(t)}$ و $R_{g(t)}$ را در $t=0$ محاسبه کنیم.

گزارهٔ ۲۳. ۱-۳: فرض کنید $\alpha(t)=\alpha+t\eta$ و $\xi(t)$ میدان برداری مشخصه وابسته به $\alpha(t)$ باشد، در این صورت

$$\xi'(0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \xi(t)=-\eta(\xi)\xi-\phi((i_{\xi}d\eta)^{\sharp}).$$

اثبات: به [۱۲] رجوع شود.

برای محاسبه مشتق $g(t)$ در $t=0$، با توجه به این‌که فرم‌های سایا به‌وسیلهٔ دیفئومورفیسم‌هایی به‌هم مرتبط هستند بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $g(t)^T=f(t)g^T$، بنابراین

$$g(t)=g(t)^T+\alpha(t)\otimes\alpha(t)=f(t)g^T+\alpha(t)\otimes\alpha(t)$$

بنابراین

$$g'(0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ g(t)=\alpha\otimes\eta+\eta\otimes\alpha+f'(0)g^T.\qquad(۵)$$

می‌دانیم خطی‌شده تانسور انحنای ریچی در امتداد h با این رابطه داده می‌شود:

$$(Ric_{ij})'(0)=\frac{1}{2}\left(-\Delta h_{ik}-\nabla_i\nabla_k tr(h)+\nabla_i\nabla^t h_{tk}+\nabla_k\nabla^t h_{it}\right)$$
$$+(lower\ \ order\ \ terms)$$

که با توجه به (۵)، h همان $\alpha\otimes\eta+\eta\otimes\alpha$ است و از قرارداد جمع‌بندی اینشتین نیز در بالا استفاده کرده‌ایم.

هم‌چنین، می‌دانیم خطی‌شده انحنای اسکالر در امتداد h با این رابطه داده می‌شود:

$$R'(0)=-\Delta(trh)+\nabla^s\nabla^t h_{st}+(lower\ \ order\ \ terms)$$

که در آن h همان $\alpha\otimes\eta+\eta\otimes\alpha$ است.

بنابراین، $DE_\alpha(\eta)$ خطی‌سازی اپراتور $E=-2i_\xi(Ric-\rho Rg)$ در α در امتداد η بدین‌صورت است:

$$DE_\alpha(\eta)=-2i_{\xi_0}\left(Ric'(0)-\rho R'(0)g_0\right)+2i_{\xi_0}\rho R_{g_0}h$$
$$-2i_{\xi'(0)}(Ric_{g_0}-\rho R_{g_0}g_0)$$

پس برای هر ۱-فرم η داریم

$$DE_\alpha(\eta)_i=\left[\Delta h_{ik}+\nabla_i\nabla_k tr(h)-\nabla_i\nabla^t h_{tk}-\nabla_k\nabla^t h_{it}\right.$$
$$\left.-2\rho(\Delta(trh)-\nabla^s\nabla^t h_{st})(g_0)_{ik}\right]\xi_0^k+(lower\ \ order\ \ terms)$$

اکنون علامت اصلی این اپراتور خطی شده را در جهت یک بردار کتانژانت a به‌دست می‌آوریم.

$$\sigma_a(DE_\alpha)(\eta)_i=\left[a^t a_t h_{ik}+a_i a_k \operatorname{tr}_{g_0}(h)-a_i a^t h_{kt}-a_k a^t h_{it}\right.$$
$$\left.-2\rho a^t a_t \operatorname{tr}_{g_0}(h)(g_0)_{ik}+2\rho a^t a^s h_{ts}(g_0)_{ik}\right]\xi_0^k$$

طبق معمول، چون علامت یک تابع همگن است می‌توان فرض کرد که $|a|_{g_0}=1$ و می‌توانیم محاسبات را در یک پایه متعامد یکه‌ای $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ از T_pM انجام دهیم که $a=g_0(e_1,.)$، یعنی برای هر $i\neq 1$، $a_i=0$. بنابراین، به‌دست می‌آوریم

$$\sigma_a(DE_\alpha)(\eta)_i=\left[h_{ik}+\delta_{i1}\delta_{k1}\operatorname{tr}_{g_0}(h)-\delta_{i1}h_{k1}-\delta_{k1}h_{i1}\right.$$
$$\left.-2\rho\operatorname{tr}_{g_0}(h)\delta_{ik}+2\rho h_{11}\delta_{ik}\right]\xi_0^k$$

نمایش ماتریسی این تابع علامت را در دستگاه مختصات $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ برای هر ۱-فرم η به‌دست می‌آوریم. ابتدا دقت می‌کنیم که شرط $\alpha(\xi_0)=1$ معادل با این است که $\alpha_k\xi_0^k=1$. هم‌چنین، $g(\xi_0,X)=\alpha(X)$ به معنی این است که $\xi_0^k=\alpha_k$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $i=1$، در این صورت

$$\sigma_a(DE_\alpha)(\eta)_i=\left[h_{1k}+\delta_{k1}\operatorname{tr}_{g_0}(h)-h_{k1}-\delta_{k1}h_{11}-2\rho\operatorname{tr}_{g_0}(h)\delta_{1k}+2\rho h_{11}\delta_{1k}\right]\xi_0^k$$
$$=(\operatorname{tr}_{g_0}(h)-h_{11})\xi_0^1-2\rho(\operatorname{tr}_{g_0}(h)-h_{11})\xi_0^1=(\operatorname{tr}_{g_0}(h)-h_{11})(1-2\rho)\alpha_1$$
$$=(1-2\rho)\alpha_1\sum_{k=2}^n h_{kk}=2(1-2\rho)\alpha_1\sum_{k=2}^n\alpha_k\eta_k$$

پس مؤلفه‌های $\sigma_a(DE_\alpha)(\eta)_1$ در دستگاه مختصات گفته شده بدین‌صورت است:

$$(0,2(1-2\rho)\alpha_1\alpha_2,\cdots,2(1-2\rho)\alpha_1\alpha_n)$$

حالت دوم: $i\neq 1$، در این صورت

$$\begin{aligned}\sigma_a(DE_\alpha)(\eta)_i &= \big[h_{ik}-\delta_{k1}h_{i1}-2\rho\,\mathrm{tr}_{g_0}(h)\delta_{ik}+2\rho h_{11}\delta_{ik}\big]\xi_0^k\\ &= h_{ik}\xi_0^k-h_{i1}\xi_0^1-2\rho\,\mathrm{tr}_{g_0}(h)\xi_0^i+2\rho h_{11}\xi_0^i=(\sum_{k=2}^n h_{ik}\alpha_k)-2\rho\alpha_i\sum_{k=2}^n h_{kk}\\ &= (\sum_{k=2}^n[\alpha_i\eta_k+\alpha_k\eta_i]\alpha_k)-4\rho\alpha_i\sum_{k=2}^n\alpha_k\eta_k=\sum_{k=2}^n(1-4\rho)\alpha_i\alpha_k\eta_k+\sum_{k=2}^n\alpha_k^2\eta_i\\ &= \sum_{k=2}^n(1-4\rho)\alpha_i\alpha_k\eta_k+(1-\alpha_1^2)\eta_i.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_a(DE_\alpha)=\begin{pmatrix}0 & 2(1-2\rho)\alpha_1\alpha_2 & \cdots & 2(1-2\rho)\alpha_1\alpha_n\\ 0 & & & \\ \vdots & & A[n-1] & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

که در آن $A[n-1]$ یک ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ است که بدین‌صورت داده می‌شود:

$$A[n-1]=\begin{pmatrix}(1-4\rho)\alpha_2^2+(1-\alpha_1^2) & (1-4\rho)\alpha_2\alpha_3 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_2\alpha_n\\ (1-4\rho)\alpha_3\alpha_2 & (1-4\rho)\alpha_3^2+(1-\alpha_1^2) & \cdots & (1-4\rho)\alpha_3\alpha_n\\ \vdots & & \ddots & \\ (1-4\rho)\alpha_n\alpha_2 & (1-4\rho)\alpha_n\alpha_3 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_n^2+(1-\alpha_1^2)\end{pmatrix}$$

می‌توان دید که ماتریس $\sigma_a(DE_\alpha)$ دارای یک مقدار ویژه صفر است و $n-1$ مقدار ویژه دیگر آن، همان مقادیر ویژه ماتریس $A[n-1]$ است که به‌کمک لم ۲۴ محاسبه می‌شوند.

لم ۲۴. ۲-۳: چندجمله‌ای مشخصه $A[n-1]$ بدین‌صورت است:

$$f(\lambda)=(\lambda+\alpha_1^2-1)^{n-2}[\lambda+(\alpha_1^2-1)(2-4\rho)].$$

پس ماتریس $\sigma_a(DE_\alpha)$ دارای مقدار ویژه 0 از تکرار ۱، مقدار ویژه $1-\alpha_1^2$ از تکرار $(n-2)$ و مقدار ویژه $(1-\alpha_1^2)(2-4\rho)$ از تکرار ۱ است.

بنابر مطالب بالا، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ (۲) اکیداً سهموی نیست. در ادامه کار، یک شار جدید به‌کمک میدان برداری دیتورک تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این شار اکیداً سهموی است و از طریق جواب این شار جدید، جوابی برای شار (۲) به‌دست می‌آوریم.

میدان برداری دیتورک را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$V^k = g^{pq}(\Gamma_{pq}^k - \overline{\Gamma}_{pq}^k)$$

که در آن $\overline{\Gamma}_{pq}^k$ علایم کریستوفل وابسته به متر g_0، $g = g(t)$ متر وابسته به ساختار سایای $\alpha(t)$ و Γ_{pq}^k علایم کریستوفل وابسته به g هستند. چون تفاضل دو التصاق یک تانسور است بنابراین، این تعریف یک میدان برداری سرتاسری V را مشخص می‌کند. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه همه فرم‌های سایا روی منیفلد M باشد. اکنون اپراتور $\mathcal{L}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}: \mathcal{A} \to A^1(M), \qquad \mathcal{L}(\alpha(t)) = i_\xi(L_V g)$$

که در آن $L_V g$ مشتق لی متر $g = g(t)$ وابسته به $\alpha(t)$ در امتداد میدان برداری دیتورک V است. به‌سادگی، بررسی می‌شود که

$$\mathcal{L} = L_V \alpha(t) + i_{[\xi,V]} g(t).$$

که در آن $\xi = \xi(t)$ است. $DP_{g_0}(h)_{ik}$ خطی‌شده $P(g) = L_V g$ در g_0 و در امتداد h بدین‌صورت است:

$$DP_{g_0}(h)_{ik} = \nabla_i \nabla^t h_{tk} + \nabla_k \nabla^t h_{it} - \nabla_i \nabla_k \operatorname{tr}_{g_0}(h)$$

بنابراین $D\mathcal{L}_\alpha(\eta)$ خطی شده $\mathcal{L}$ در α در امتداد η بدین‌صورت است:

$$D\mathcal{L}_\alpha(\eta)_i = \left(-\nabla_i \nabla_k \operatorname{tr}_{g_0}(h) + \nabla_i \nabla^t h_{tk} + \nabla_k \nabla^t h_{it}\right)\xi_0^k + (lower\ \ order\ \ terms)$$

که مانند قبل h همان $\alpha \otimes \eta + \eta \otimes \alpha$ است. علامت اصلی این اپراتور با نمادگذاری‌های قبل بدین‌صورت است:

$$\sigma_a(D\mathcal{L}_\alpha)(\eta)_i = \left(-\delta_{i1}\delta_{k1}\operatorname{tr}_{g_0}(h) + \delta_{i1}h_{k1} + \delta_{k1}h_{i1}\right)\xi_0^k$$

حال شار تحویل یافته ریچی-بورگویگنون (۶) را تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = -2i_\xi(Ric - \rho Rg) + i_\xi(L_V g) \\ \alpha(0) = \alpha \end{cases} \tag{۶}$$

مطالب بالا نشان می‌دهد که علامت اصلی اپراتور متناظر با شار (6) در امتداد بردار کتانژانت a و در یک پایه متعامد یکه‌ای $\{a^\flat, e_2, \cdots, e_n\}$ بدین‌صورت است:

$$\sigma_a(DE + D\mathcal{L})_\alpha(\eta)_i = \left(h_{ik} - 2\rho \operatorname{tr}_{g_0}(h)\delta_{ik} + 2\rho h_{11}\delta_{ik}\right)\xi_0^k$$

حال، نمایش ماتریسی این تابع علامت را در دستگاه مختصات $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ برای هر ۱-فرم η به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید $i = 1$، در این صورت

هرگاه $i \neq 1$

$$\begin{aligned} \sigma_a(DE + D\mathcal{L})_\alpha(\eta)_i &= \left(h_{1k} - 2\rho \operatorname{tr}_{g_0}(h)\delta_{1k} + 2\rho h_{11}\delta_{1k}\right)\xi_0^k \\ &= h_{ik}\xi_0^k - 2\rho(\operatorname{tr}_{g_0}(h) - h_{11})\xi_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^n h_{1k}\alpha_k - 4\rho\alpha_1 \sum_{k=2}^n \alpha_k \eta_k \\ &= \sum_{k=1}^n [\alpha_1\eta_k + \alpha_k\eta_1]\alpha_k - 4\rho\alpha_1 \sum_{k=2}^n \alpha_k\eta_k \\ &= (1+\alpha_1^2)\eta_1 + (1-4\rho)\alpha_1 \sum_{k=2}^n \alpha_k\eta_k \end{aligned}$$

آن‌گاه،

$$\begin{aligned}\sigma_a(DE+D\mathcal{L})_\alpha(\eta)_i &= \left(h_{ik}-2\rho\mathrm{tr}_{g_0}(h)\delta_{ik}+2\rho h_{11}\delta_{ik}\right)\xi_0^k = h_{1k}\xi_0^k-2\rho(\mathrm{tr}_{g_0}(h)-h_{11})\xi_0^i\\ &=\sum_{k=1}^n h_{ik}\alpha_k-4\rho\alpha_1\sum_{k=2}^n\alpha_k\eta_k = h_{i1}\alpha_1+\sum_{k=2}^n h_{ik}\alpha_k-4\rho\alpha_1\sum_{k=2}^n\alpha_k\eta_k\\ &=\alpha_1^2\eta_i+\alpha_1\alpha_i\eta_1+\sum_{k=2}^n(1-4\rho)\alpha_i\alpha_k\eta_k+(1-\alpha_1^2)\eta_i\\ &=\eta_i+\alpha_1\alpha_i\eta_1+\sum_{k=2}^n(1-4\rho)\alpha_i\alpha_k\eta_k\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_a(DE+D\mathcal{L})_\alpha(\eta)=\begin{pmatrix}1+\alpha_1^2 & (1-4\rho)\alpha_1\alpha_2 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_1\alpha_n\\ \alpha_1\alpha_2 & & & \\ \vdots & & B[n-1] & \\ \alpha_1\alpha_n & & & \end{pmatrix}$$

که در آن $A[n-1]$ یک ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ است که بدین‌صورت داده می‌شود:

$$B[n-1]=\begin{pmatrix}(1-4\rho)\alpha_2^2+1 & (1-4\rho)\alpha_2\alpha_3 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_2\alpha_n\\ (1-4\rho)\alpha_3\alpha_2 & (1-4\rho)\alpha_3^2+1 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_3\alpha_n\\ \vdots & & \ddots & \\ (1-4\rho)\alpha_n\alpha_2 & (1-4\rho)\alpha_n\alpha_3 & \cdots & (1-4\rho)\alpha_n^2+1\end{pmatrix}$$

لم ۲۵. ۳-۳: چندجمله‌ای ویژه ماتریس $\sigma_a(DE+D\mathcal{L})_\alpha(\eta)$ بدین‌صورت است:

$$f(\lambda)=(\lambda-1)^{n-1}[\lambda-(1-4\rho)(1-\alpha_1^2)-\alpha_1^2].$$

بنابراین ماتریس $\sigma_a(DE+D\mathcal{L})_\alpha(\eta)$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار $n-1$ و مقدار ویژه $(1-4\rho)(1-\alpha_1^2)+\alpha_1^2$ از تکرار ۱ است. پس به‌ازای هر $\rho<\dfrac{1}{4(1-\alpha_1^2)}$، معادله (6) اکیداً سهموی است.

فرض کنید $g(x)=\dfrac{1}{4(1-x)}$ و $x\in[0,1)$، شرط این‌که برای عدد حقیقی r به‌ازای هر $x\in[0,1)$ داشته باشیم $r<g(x)$ این است که $r<\inf\limits_{0\le x<1}g(x)$، یعنی $r<\dfrac{1}{4}$.

بنابراین، قضیهٔ ۲۶ را داریم.

قضیهٔ ۲۶. ۴-۳: شار تحویل یافته (۶) برای هر عدد حقیقی $\rho<\dfrac{1}{4}$ اکیداً سهموی است.

نتیجهٔ ۲۷. ۵-۳:شار تحویل یافته (۶) برای هر عدد حقیقی $\rho<\dfrac{1}{4}$ دارای جواب یکتا در زمان کوتاه است.

در ادامه نشان می‌دهیم که از یک جواب از شار تحویل یافته (۶) می‌توان به یک جواب از شار ریچی-بورگویگنون(۲) رسید. به این منظور ابتدا میدان‌های برداری وابسته به زمان زیر را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید

$$X=-\sharp d\alpha([\xi,V],.)$$

که در آن $\alpha = \alpha(t)$، $\xi = \xi(t)$ میدان برداری وابسته به $\alpha(t)$ است و V همان میدان برداری دیتورک است. هم‌چنین، عمل موسیقیایی $\sharp$ وابسته به متر $g = g(t)$ انجام می‌شود. تابع هموار $g = \alpha(t)(V)$ یک تابع وابسته به زمان t است و بنابراین میدان برداری سایای Y_g نیز یک میدان برداری وابسته به t است و گزارهٔ ۲۸ را داریم.

گزارهٔ ۲۸. برای میدان‌های برداری وابسته به زمان X و Y_g داریم

$$L_X \alpha(t) + L_{Y_g} \alpha(t) = i_{[\xi,V]} g(t).$$

اثبات: به [۱۲] رجوع کنید.

قضیهٔ ۲۹. فرض کنید $\rho < \frac{1}{4}$ و (M,α) یک منیفلد سایای فشرده باشد. آن‌گاه $\epsilon > 0$ وجود دارد طوری‌که شار ریچی-بورگویگنون (2) در $M \times [0,\epsilon)$ یک جواب یکتا دارد.

اثبات: خانواده یک پارامتری از نگاشت‌های $\psi_t : M \to M$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(x) = -V(\psi_t(x),t) - X(\psi_t(x)) - Y_g(\psi_t(x)), \qquad \psi_0 = Id_M$$

نگاشت‌های ψ_t تا مادامی که جواب‌های $\alpha(t)$از (6) وجود دارند، موجود بوده و دیفئومورفیسم هستند. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک جواب شار تحویل یافته (6) در $[0,T)$ است. قرار می‌دهیم $\bar{\alpha}(t) = \psi_t^* \alpha(t)$، در این صورت $\bar{\alpha}(0) = \alpha$، زیرا $\psi_0 = Id_M$ و داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\psi_t^*\alpha(t)) &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\,(\psi_{t+s}^*\alpha(t+s)) = \psi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)) + \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\,(\psi_{t+s}^*\alpha(t)) \\
&= \psi_t^*(-2i_\xi(Ric - \rho R g) + i_\xi(L_V g)) - \psi_t^*(i_\xi(L_V g)) \\
&= -2i_{(\psi_t^{-1})_*\xi}\Big(Ric(\psi_t^* g) - \rho R_{\psi_t^* g}\psi_t^* g\Big) + \psi_t^*(i_\xi(L_V g)) - \psi_t^*(i_\xi(L_V g)) \\
&= -2i_{(\psi_t^{-1})_*\xi}\Big(Ric(\psi_t^* g) - \rho R_{\psi_t^* g}\psi_t^* g\Big)
\end{aligned}$$

اثبات یکتایی جواب، دقیقاً شبیه اثبات یکتایی جواب شار ریچی روی منیفلدهای سایا است که در [۱۲] ثابت شده است. در واقع، یکتایی جواب شار تحویل‌یافته در یک بازهٔ زمانی مناسب، نشان می‌دهد که شار ریچی-بورگویگنون (۲) ، به‌ازای $\rho < \frac{1}{4}$ دارای جواب یکتا در مدت کوتاه است.

سالیتون‌ها

در این بخش مفهوم سالیتون ریچی-بورگویگنون روی منیفلدهای سایا را تعریف می‌کنیم و نتایجی در ارتباط با آن به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۳۰. ۴-۱: یک منیفلد سایای (M,α,ξ,ϕ,g) را سالیتون ریچی-بورگویگنون گوییم هرگاه یک ثابت γ و یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ وجود داشته باشد که

$$2i_\xi(Ric - \rho R g) + L_X \alpha = \gamma\alpha$$

وابسته به علامت γ، سالیتون ریچی-بورگویگنون را انقباضی ($\gamma > 0$)، مانا ($\gamma = 0$) و یا انبساطی ($\gamma < 0$) گوییم. هرگاه علاوه بر این، میدان برداری X، گرادیان یک تابع هموار روی M باشد، آن‌گاه تعریف سالیتون ریچی-بورگویگنون گرادیان حاصل می‌شود.

در زیر، مفهوم جواب‌های خود-متشابه را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که سالیتون بودن یک منیفلد سایا با خود-متشابه بودن جواب‌های شار ریچی-بورگویکنون روی آن معادل است.

تعریف ۳۱. ۲-۴: فرض کنید $(M,\alpha(t))$ یک جواب از شار ریچی-بورگویگنون (۲) در بازهٔ $[0,T]$ باشد. گوییم $\alpha(t)$ یک جواب خود-متشابه است هرگاه اسکالرهای $\sigma(t)$ و دیفئومورفیسم‌های ψ_t وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\alpha(t) = \sigma(t)\psi_t^*(\alpha).$$

اکنون می‌توان قضیهٔ ۳۲ را بیان کرد.

قضیهٔ ۳۲. ۳-۴: فرض کنید $(M,\alpha(t))$ یک جواب از شار ریچی-بورگویگنون (۲) باشد، در این صورت میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ وجود دارد که (M,α,X) یک سالیتون ریچی-بورگویگنون است. برعکس، برای هر سالیتون ریچی بورگویگنون (M,α,X) اسکالرهای $\sigma(t)$ و دیفئومورفیسم‌های ψ_t وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha(t) = \sigma(t)\psi_t^*(\alpha)$ یک جواب از شار ریچی-بورگویگنون است.

اثبات: فرض کنید $\alpha(t)$ یک جواب خود-متشابه از شار ریچی-بورگویگنون (۲) باشد. بدون کاسته شدن از کلیت حکم می‌توان فرض کرد $\sigma(0)=1$ و $\psi_0 = Id$. فرض کنید $Y = Y(t)$ خانواده‌ای از میدان‌های برداری وابسته به زمان باشد که توسط دیفئومورفیسم‌های ψ_t تولید می‌شود می‌توان نوشت:

$$-2i_{\xi_0}(Ric(g_0) - \rho R g_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sigma'(0)\alpha + L_{Y(0)}\alpha$$

در نتیجه

$$2i_{\xi_0}(Ric(g_0) - \rho R g_0) + L_{Y(0)}\alpha = \sigma'(0)\alpha$$

بنابراین، (M,α,X) یک سالیتون ریچی-بورگویگنون است که در آن $X = Y(0)$.

برعکس، فرض کنید (M,α,X) یک سالیتون ریچی-بورگویگنون باشد. قرار می‌دهیم $\sigma(t) = \sqrt{1-2\gamma t}$ و $Y(t) = \frac{1}{\sigma^2(t)}X$. هرگاه، ψ_t دیفئومورفیسم‌های تولیده شده به‌وسیلهٔ $Y(t)$، باشند آن‌گاه $\alpha(t) = \sigma(t)\psi_t^*(\alpha)$ یک جواب از شار ریچی-بورگویگنون (۲) است. در واقع، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{-\gamma}{\sigma(t)}\psi_t^*(\alpha) + \sigma(t)\psi_t^*(L_{Y_t}\alpha) \\
&= \frac{1}{\sigma(t)}\psi_t^*(-\gamma\alpha + L_X\alpha) \\
&= \frac{1}{\sigma(t)}\psi_t^*\left(-2i_{\xi_0}(Ric(g_0) - \rho R g_0)\right) \\
&= -\frac{2}{\sigma(t)} i_{(\psi_t^{-1})_*\xi_0}\psi_t^*(Ric(g_0) - \rho R g_0)
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -2 i_{\xi(t)}[Ric(g(t)) - \rho R g(t)].$$

نتیجهٔ ۳۳. ۴-۴: فرض کنید M یک منیفلد سایای فشرده (و بدون مرز) باشد، هر جواب از شار ریچی-بورگویگنون (۲) خود-متشابه است و سالیتون متناظر با آن مانا است.

اثبات: با توجه به قضایای بالا و قضیهٔ موزر در منیفلدهای سایا (گزارهٔ ۱۶)، حکم به سادگی نتیجه می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک شار هندسی که در واقع مشابه شار ریچی-بورگویگنون در منیفلدهای ریمانی است را برای ساختارهای سایا معرفی کرده و به بررسی وجود و یکتایی جواب‌های زمان کوتاه آن پرداخته‌ایم. محاسبات نشان می‌دهد که در حالت $\rho < \frac{1}{4}$ جواب یکتا برای زمان کوتاه داریم. در ادامه کار به تعریف و بررسی سالیتون‌های این شار پرداختیم. در این مقاله، هدف اصلی بررسی وجود و یکتایی جواب‌های مدت کوتاه برای شار ریچی-بورگویگنون بوده است. در ادامهٔ این کار می‌توان، تحول ساختارهای هندسی روی منیفلدهای سایا تحت این شار را مطالعه و بررسی کرد.

منابع

1. Azami S., Razavi A., "Existence and uniqueness for solution of Ricci flow on Finsler manifolds", Int. J. of Geom. Meth. in Mod. Phy., Vol. 10, No. 3 (2013) 1-21.
2. Bidabad B., Sedaghat M. K., "Ricci flow on Finsler surfaces", to appear in Journal of Geometry and Physics, 129 (2018) 238-254.
3. Blair D. E., "Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds", Birkhäuser, Boston (2010).
4. Bourguignon J. P., "Ricci curvature and Einstein metrics, Global differential geometry and global analysis", Lecture nots in Math., 838 (1981) 42-63.
5. Catino G., Cremaschi L., Djadli Z., Mantegazza C., Mazzieri L., "The Ricci-Bourguignon flow, Pacific J. Math. (2015).
6. Chen Y. G., Giga Y., Goto S., "Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Generalized Mean Curvature Flow Equations", J. Diff. Geom. 33 (1991) 749-786.
7. Dai W. R., Kong D. X., Liu K., "Hyperbolic gometric flow (I): short-time existen and nonlinear stability K., Pure and applide mathematics quarterly, 6 (2010) 331-359.
8. Eells Jr J., Sampson J. H., "Harmonic mappings of Riemannian manifolds", American Journal of Mathematics, 86, No. 1, (1964) 109-160.
9. Hamiton R. S., "Three-manifolds with positive Ricci Curvature", J. Differential Geometry, 17, No. 2 (1982) 255-306.

10. Kholodenko A. L., "Applications of contact geometry and topology in physics", World scientific (2013).

11. Müller R., "Ricci flow coupled with harmonic map flow", Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 45 (2012) 101-142.

12. Pirhadi V., Razavi A., "Ricci Flow on Contact Manifolds", Siberian athematical Journal, Vol 56, No. 5, (2015) 912-921.