تابع یکنوای عملگری و تحدب نرم مشتق‌های آن

زهرا رحیمی چگنی[۱]، امیرقاسم غضنفری*[۲]، کمال فلاحی[۱]
۱. دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران،
۲. دانشگاه لرستان، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۵/۲۰ پذیرش ۹۸/۱۱/۲۷

چکیده

فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ و A یک عملگرمثبت وارون‌پذیر روی فضای هیلبرت H باشد. نشان می‌دهیم اگر $|||.|||$ یک نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$|||D^n f(A)||| \leq \left\|f^{(n)}(A)\right\|$$

ثابت می‌کنیم تابع $\left\|f^{(n)}(.)\right\|$روی مجموعهٔ همهٔ عملگرهای مثبت وارون‌پذیر در $B(H)$ شبه‌محدب است. و هم‌چنین نشان می‌دهیم

$$|||f(A)-f(B)||| \leq max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\} |||A-B|||,$$

که این یک تظریف از نتیجه معروف زیر است:

$$|||f(A)-f(B)||| \leq f'(a)\,|||A-B|||,$$

که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و $A,B \geq a1_H$

در این مقاله برخی تقریب‌ها از طرف راست نامساوی‌های نوع ارمیت–ادامارد که شامل توابع مشتق‌پذیرند و نرم نگاشت‌های القاءشده به‌وسیلهٔ مشتق آنها روی مجموعه تمام عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه محدب یا s–محدب هستند، به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: نامساوی ارمیت - ادامارد، توابع مشتق پذیر، نرم یکانی پایا، تابع یکنوای عملگری.

معرفی و مقدمه

به‌ازای هر تابع محدب fروی $\mathbb{R}$ و $a,b \in \mathbb{R}$ که $a<b$ نامساوی (۱) همواره برقرار است:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (۱)$$

که این نامساوی به نامساوی ارمیت-ادامارد[۱] معروف است و عکس آن برای تابع مقعر f برقرار است.

قابل ذکراست که نامساوی ارمیت ادامارد ممکن است به‌عنوان یک تظریف[۲] از مفهوم تحدب در نظر گرفته شود که به‌راحتی از نامساوی ینسن[۳] نتیجه می‌شود. در سال‌های اخیر چندین گسترش و تعمیم برای تحدب کلاسیک مطرح شده‌اند (برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۲]، [۳] و مراجع ذکر شده در آنها مراجعه شود.)

اکنون با توجه به این‌که تعاریف تابع‌های شبه‌محدب و s–محدب تعمیمی از تعریف تابع محدب هستند، آنها را در ادامه بیان می‌کنیم.

*نویسنده مسئول ghazanfari.a@lu.ac.ir

1. Hermite-Hadamard
2. refinement
3. Jensen

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$شبه‌محدب گفته می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x و y عضو $[a,b]$ و $0\le\lambda\le 1$ داشته باشیم:

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\le max\{f(x),f(y)\}.$$

و برای یک ثابت $s\in(0,1]$ تابع f از $(0,\infty)$ به $\mathbb{R}$ ، $s-$محدب به مفهوم دوم در [۴]، گفته می‌شود، هرگاه برای هر x و y عضو $(0,\infty)$ و $0\le\lambda\le 1$ داشته باشیم :

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\le(1-\lambda)^s f(x)+\lambda^s f(y).$$

قبل از بیان نتایج، بربیان ترتیب عملگری در $B(H)$ و تعاریف تابع‌های یکنوای عملگری و محدب عملگری مروری داریم.

به‌ازای عملگرهای خودالحاق A و B در $B(H)$ می‌نویسیم$A\le B$، (یا $B\ge A$)، هرگاه برای هر بردار $h\in H$ داشته باشیم :

$$\langle Ah,h\rangle\le\langle Bh,h\rangle,$$

که این نامساوی را ترتیب عملگری می‌نامیم.

فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد و

$$\sigma(I)=\Big\{A\in B(H):\ sp(A)\subseteq I\ \text{ و}A\text{خودالحاق}\Big\}.$$

تابع پیوستهٔ حقیقی مقدار f روی بازهٔ I محدب عملگری[۱](مقعر عملگری[۲]) گفته می‌شود، هرگاه در ترتیب عملگری$B(H)$، به‌ازای هر$\lambda\in[0,1]$ و هر عملگر خودالحاق کراندار A و B در $\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)\le(\ge)(1-\lambda)f(A)+\lambda f(B).$$

تابع پیوستهٔ حقیقی مقدار f روی یک بازهٔ Iیکنوای عملگری[۳] نامیده می‌شود، هرگاه نسبت به‌ترتیب عملگری یکنوا باشد؛ به‌عبارت دیگر برای عملگرهایA وB عضو$\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$A\le B\Longrightarrow f(A)\le f(B)\,.$$

برای مشاهده و بررسی بعضی نتایج اساسی در مورد توابع محدب (مقعر) و یکنوای عملگری به [۵]، [۶] مراجعه شود.

فرض کنیدf یک تابع حقیقی روی $(0,\infty)$ و$f^{(n)}$ مشتق n–ام آن باشد. هم‌چنین فرض کنید f نگاشت القا شده به‌وسیلهٔ f روی عملگرهای مثبت باشد و $D^nf(A)$ مشتق فرشهٔ مرتبه n–ام این نگاشت در نقطهٔ A باشد.

برای هرA، مشتق $D^nf(A)$ یک عملگر n–خطی روی فضای همه عملگرهای خودالحاق است که نرم برای این عملگرها بدین‌صورت تعریف شده است:

$$\|D^nf(A)\|=sup\{\|D^nf(A)(B_1,\dots,B_n)\|:\ \|B_1\|=\cdots=\|B_n\|=1\}.$$

نرم $|||.|||$ روی $B(H)$ نرم یکانی پایا نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $A\in B(H)$ وهرعملگر یکانی U وV عضو $B(H)$، داشته باشیم $|||UAV|||=|||A|||$.

در صورتی که $|||.|||$یک نرم یکانی پایا روی فضای عملگرهای خودالحاق باشد، دراین‌صورت طبق این نرم، نرم مربوط به عملگر n–خطی $D^nf(A)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$|||D^nf(A)|||=sup\{|||D^nf(A)(B_1,\dots,B_n)|||:|||B_1|||=1,\dots,|||B_n|||=1\}.$$

1. Operator Convex
2. Operator Concave
3. Operator Monotone

چون $f^{(n)}(A) = D^n f(A)(1_H, \dots, 1_H)$ دراین صورت داریم:

$$\|f^{(n)}(A)\| = \|D^n f(A)(1_H, \dots, 1_H)\| \leq \|D^n f(A)\|.$$

حال اگر تعریف کنیم:

$$D^{(n)} = \{f : \|D^n f(A)\| = \|f^{(n)}(A)\| \quad \text{برای هر عملگر مثبت } A\}.$$

با توجه به [۷] هر تابع یکنوای عملگری به‌ازای $n = 1,2, \dots$ در $D^{(n)}$ است. هم‌چنین در [۸] نشان داده شده است که به‌ازای $n = 2,3, \dots$ تابع $f(t) = t^n$ و تابع با ضابطهٔ $f(t) = \exp(t)$ در $D^{(1)}$ هستندکه هیچ‌کدام از آنها یکنوای عملگری نیستند.

به‌علاوه در [۹] نشان داده شده است که تابع توانی $f(t) = t^p$ به‌ازای تمامی $p \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ به‌جز $p \in (1, \sqrt{2})$ در $D^{(1)}$ است.

در این مقاله نگاشت‌های مشتق‌پذیری که نرم نگاشت‌های القاء شده به‌وسیلهٔ مشتق آنها روی مجموعه عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه‌محدب یا s –محدب است را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هرگاه f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$، A یک عملگر مثبت وارون پذیر و $|||.|||$ یک *نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت* n *داریم*:

$$|||D^n f(A)||| \leq \|f^{(n)}(A)\|.$$

هم‌چنین ثابت می‌کنیم $\|f^{(n)}(.)\|$ (نرم نگاشت القاء شده به‌وسیلهٔ مشتق مرتبهٔ n-ام تابع یکنوای عملگری f روی $(0, \infty)$ برای عدد صحیح مثبت n) یک تابع شبه‌محدب است. در ادامه مثال‌ها و کاربردها برای حالت‌های خاص نیز برای علاقه‌مندان آن آورده شده است. در پایان یک تخمین خطا برای فرمول سیمپسون ارائه می‌دهیم.

نتایج اصلی

۱. تابع‌های شبه‌محدب و یکنوای عملگری :

در بعضی مسائل در نظریه‌های تقریب[1] و اختلال[2] وقتی با نرم توابع سرو کار داریم، برخورداربودن خود توابع از ویژگی‌هایی مانند محدب بودن، یکنوایی، شبه‌محدب و s –محدب ضروری نیست و فقط داشتن این خواص برای نرم آن توابع کافی است.

فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازهٔ I در $\mathbb{R}$ باشد. در ادامه این مقاله تابع $\|f(.)\|$، نرم نگاشت القاء شده به‌وسیلهٔ f روی مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خودالحاق بدین‌صورت است:

$$\|f(.)\|: \sigma(I) \to [0, \infty),$$
$$A \to \|f(A)\|.$$

مثال ۱. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد. دراین صورت اگر fمحدب عملگری باشد، آن‌گاه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است، چون

$$0 \leq f\big((1-t)A + tB\big) \leq (1-t)f(A) + tf(B),$$

و بنابراین

1. Approximation theory
2. Perturbation theory

$$\|f((1-t)A+tB)\| \le (1-t)\|f(A)\| + t\|f(B)\|.$$

در نتیجه اگر r یک عدد حقیقی در $[-1,0] \cup [1,2]$ باشد، چون تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^r$ یک تابع محدب عملگری روی $(0,\infty)$ است، آن‌گاه به‌ازای هر $I \subseteq (0,\infty)$، تابع $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است.

و از آن‌جاکه اگر r یک عدد حقیقی با شرط $r \ge 2$ باشد، دراین‌صورت تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x)=x^r$ روی $(0,\infty)$ محدب است و

$$\begin{aligned}\left\|\left((1-t)A+tB\right)^r\right\| &= \|(1-t)A+tB\|^r \\ &\le \left((1-t)\|A\|+t\|B\|\right)^r \\ &\le (1-t)\|A\|^r + t\|B\|^r.\end{aligned}$$

پس اگر r یک عدد حقیقی در بازهٔ $[-1,0] \cup [1,\infty)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر بازهٔ $I \subseteq (0,\infty)$، تابع $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است.

ب) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I \subseteq (0,\infty)$ باشد. اگر f یکنوای عملگری باشد، آن‌گاه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ شبه محدب است .چون:

$$\begin{aligned}\left\|f\left((1-t)A+tB\right)\right\| &= f(\|(1-t)A+tB\|) \\ &\le f\left((1-t)\|A\|+t\|B\|\right) \\ &\le f(max\{\|A\|,\|B\|\}) \\ &= max\{f(\|A\|),f(\|B\|)\} \\ &= max\{\|f(A)\|,\|f(B)\|\}.\end{aligned}$$

فرض کنید $0 \le r \le 1$ و $f(x)=x^r$ که در آن $0 < x < \infty$. نامساوی زیر نیز نتیجه می‌دهدکه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ برای هر بازهٔ $I \subseteq (0,\infty)$، شبه‌محدب است.

$$\left\|\left((1-t)A+tB\right)^r\right\| = \|(1-t)A+tB\|^r \le (max\{\|A\|,\|B\|\})^r = max\{\|A\|^r,\|B\|^r\}.$$

ج) برای $f(x)=-x^2+1$ روی $\mathbb{R}$، تابع $\|f(.)\|$ شبه‌محدب نیست، زیرا:

$$1 = \|f(0)\| = \left\|f\left(\frac{-1_H+1_H}{2}\right)\right\| \not\le max\{\|f(-1_H)\|,\|f(1_H)\|\} = 0.$$

که چون هر تابع محدب، شبه‌محدب نیز است می‌توان نتیجه گرفت که این تابع محدب هم نیست.

قضیهٔ ۱. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، در این‌صورت $\left\|f^{(n)}(.)\right\|$ شبه‌محدب است؛ یعنی به‌ازای تمامی عملگرهای مثبت و معکوس‌پذیر A و B و $0 \le v \le 1$ داریم:

$$\left\|f^{(n)}\left((1-v)A+vB\right)\right\| \le max\left\{\left\|f^{(n)}(A)\right\|,\left\|f^{(n)}(B)\right\|\right\}. \qquad (۲)$$

اثبات. می‌دانیم که هرتابع یکنوای عملگری f روی $(0,\infty)$ یک نمایش انتگرالی به‌صورت (۳) دارد:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1} - \frac{1}{\lambda+t}\right) d\mu(\lambda), \qquad (۳)$$

که در آن α و β اعداد حقیقی، $\beta \ge 0$ و μ یک اندازه مثبت روی $(0,\infty)$ است [5, (V. 49)]، که:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2+1} d\mu(\lambda) < \infty .$$

نمایش انتگرالی (۳) نتیجه می‌دهد که هر تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ بی‌نهایت مشتق‌پذیر است، بنابراین

$$f(A) = \alpha 1_H + \beta A + \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{\lambda^2+1} 1_H - (\lambda+A)^{-1}\right] d\mu(\lambda). \qquad (۴)$$

به‌علاوه از نمایش انتگرالی رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید:

$$f'(t) = \beta + \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda+t)^2}\, d\mu(\lambda). \qquad (۵)$$

در نتیجه:

$$\left\| f'(\mathrm{A}) \right\| = \left\| \beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2}\, d\mu(\lambda) \right\|.$$

حال فرض کنید $a_0 = inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ و $b_0 = inf\{\langle Bx, x\rangle : \|x\| = 1\}$. *دراین‌صورت چون* $\beta \geq 0$ داریم :

$$\left\| f'(A) \right\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + a_0)^{-2}\, d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2\, d\mu(\lambda),$$

و به‌طور مشابه،

$$\left\| f'(B) \right\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + b_0)^{-2}\, d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + B)^{-1}\|^2 d\mu(\lambda).$$

فرض کنید $a_0 \leq b_0$.دراین‌صورت،

$$a_0 \leq (1-v)a_0 + vb_0 \leq \inf\{\langle [(1-v)A + vB]x, x\rangle : \|x\| = 1\},$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\left\| f'(A) \right\| \geq \left\| f'\big((1-v)A + vB\big) \right\|,$$

و نامساوی (۲) برای $n = 1$ ثابت می‌شود.

به‌طور مشابه برای $n \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\| f^{(n)}(A) \right\| &= \left\| (-1)^{n+1} n! \int_0^\infty (\lambda + A)^{-n-1}\, d\mu(\lambda) \right\| \\ &= n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1}\, d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

به‌کمک روند مشابه می‌توان نشان داد که در این حالت دوباره نامساوی (۲) برقرار است و این اثبات را کامل می کند.

قضیهٔ ۲. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ و $|||.|||$ یک نرم یکانی پایا است. اگر A یک عملگر مثبت وارون‌پذیرباشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n این رابطه برقرار است:

$$|||D^n f(A)||| \leq \left\| f^{(n)}(A) \right\|,$$

و در نتیجه $f \in D^{(n)}$.

اثبات. از رابطهٔ (۴) داریم:

$$Df(A)(B) = \beta B + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1} d\mu(\lambda)\,.$$

چون طبق [IV،۴۰، ۵] داریم:

$$|||(\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1}||| \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|\, |||B|||\, \|(\lambda + A)^{-1}\|,$$

بنابراین:

$$||| Df(A)(B)||| \leq \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2\, d\mu(\lambda) = \left\| f'(A) \right\|.$$

هم‌چنین به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم:

$$D^n f(A)(B_1, B_2, \dots, B_n) =$$
$$(-1)^{n+1} \int_0^\infty \left[\sum_\sigma \left((\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(1)} (\lambda + A)^{-1} \dots (\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(n)} (A + \lambda)^{-1} \right) \right] d\mu(\lambda).$$

با استفاده از (*IV*، ۴۰) در [۵] به‌دست می‌آوریم:

$$|||D^n f(A)||| \leq \; n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1} \, d\mu(\lambda) = \left\| f^{(n)}(A) \right\|.$$

و این اثبات را کامل می کند.

۲. نامساوی‌های از نوع ارمیت–ادامارد:

تعمیم ها و تظریف‌های زیادی از نامساوی ارمیت- ادامارد (۱) به‌دست آمده است، که از میان آنها می‌توان به تعمیم این نامساوی برای توابع مشتق‌پذیری که قدرمطلق مشتق آنها توابعی محدب هستند، اشاره کرد.

دراگومیر و آگروال [۱۰]، نشان می‌دهند برای $a, b \in \mathbb{R}$ اگر $f: [a, b] \to \mathbb{R}$یک تابع مشتق‌پذیر روی (a, b)باشد و اگر $|f'|$ بر $[a, b]$ محدب باشد، آن‌گاه

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{(b-a)\left(|f'(a)| + |f'(b)| \right)}{8}.$$

که برای اثبات این نامساوی از این رابطه استفاده کرده‌اند:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1 - 2t)\, f'(ta + (1-t)b) dt.$$

هم‌چنین این بخش را با بیان لم کاربردی ۱ ادامه می‌دهیم تا بتوانیم نتایج به‌دست آمده به وسیلهٔ آنها را به عملگرهای خودالحاق روی یک فضای هیلبرت تعمیم دهیم.

لم ۱. **[۱۱ لم ۱]**، فرض کنید$I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازهٔ باز و f از I به $\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم روی I است، به‌طوری‌که f'' روی I پیوسته باشد. هرگاهA وB عملگرهای خودالحاق در $\sigma(I)$ باشند و $v \in [0,1]$، آن‌گاه:

$$\int_0^1 (t - v) Df\big((1-t)A + tB\big)(B - A) dt =$$
$$vf(A) + (1-v)f(B) - \textstyle\int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt. \qquad (۶)$$

گزاره ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی فاصلهٔ باز $I \subseteq (0, \infty)$ باشد، هم‌چنین فرض کنید $f \in c^2(I) \cap D^{(1)}$ و $\left\| f'(.) \right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، دراین‌صورت به‌ازای هر A و B در $\sigma(I)$ داریم:

$$\left\| vf(A) + (1-v)f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt \right\|$$
$$\leq \frac{1}{6} [2(1-v)^3 - 3(1-v) + 2] \left\| f'(A) \right\| \|A - B\|$$
$$+ \tfrac{1}{6} (2v^3 - 3v + 2) \left\| f'(B) \right\| \|A - B\|, \qquad (۷)$$

اثبات. با استفاده از لم ۱، و چون $\left\| f'(.) \right\|$ محدب است داریم:

$$\left\| vf(A) + (1-v)f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 (t-v) Df\big((1-t)A+tB\big)(A-B)\,dt \right\|$$
$$\le \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \left\| Df\big((1-t)A+tB\big) \right\| dt$$
$$= \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \left\| f'\big((1-t)A+tB\big) \right\| dt$$
$$\le \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \Big((1-t) \left\| f'(A) \right\| + t \left\| f'(B) \right\| \Big) dt\,,$$

حال به‌کمک این تساوی می‌توان نامساوی رابطهٔ (۷) را نتیجه گرفت

$$\int_0^1 |\mathrm{t}-\upsilon|\, t dt = \frac{1}{6}(2v^3 - 3v + 2).$$

با بحثی مشابه در اثبات گزارهٔ ۱، یک نامساوی جدید از نامساوی ارمیت –ادامارد به‌دست می‌آوریم که آن را در نتیجهٔ ۱ بیان می‌کنیم:

نتیجهٔ ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی یک بازهٔ باز $I \subseteq (0,\infty)$ باشد ، $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ و هم‌چنین فرض کنید:

$$X = \upsilon f(A) + (1-\upsilon) f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt$$

الف) اگر $\left\| f'(.) \right\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه به‌ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\|X\| \le \left(v^2 - v + \frac{1}{2}\right) \|A - B\| max\left\{ \left\| f'(A) \right\|, \left\| f'(B) \right\| \right\}. \qquad (۸)$$

ب) اگر $\left\| f'(.) \right\|$ روی $\sigma(I)$ ، s–محدب باشد، آن‌گاه به‌ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\|X\| \le \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1-\upsilon}{s+1} + \frac{2(1-\upsilon)^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \right) \left\| f'(A) \right\| \|A-B\|$$
$$+ \left(\frac{1}{s+2} - \frac{\upsilon}{s+1} + \frac{2\upsilon^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \right) \left\| f'(B) \right\| \|A-B\|. \qquad (۹)$$

ج) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ باشد. دراین صورت به‌ازای هر نرم یکانی پایای $|||.|||$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$|||X||| \le \left(v^2 - v + \frac{1}{2}\right) |||A-B||| max\left\{ \left\| f'(A) \right\|, \left\| f'(B) \right\| \right\}. \qquad (۱۰)$$

۳. کاربردها

به‌عنوان یک کاربرد مهم از نتایج این مقاله، کران‌هایی برای $\|f(A)-f(B)\|$ باتوجه به $\|A-B\|$ می‌یابیم که یکی از مسائل اصلی در قضیهٔ اختلال است.

نامساوی‌های زیر، نامساوی‌های مرتبط با (X، ۴۶)-(X، ۴۳)-[۵] در [۵] است که برای توابع یکنوای عملگری برقرارهستند.

نتیجهٔ ۲. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازهٔ باز $I \subseteq (0,\infty)$ باشد و $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ در این‌صورت به‌ازای هر $A, B \in \sigma(I)$

اگر $\left\| f'(.) \right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A) - f(B)\| \le \frac{1}{2}\Big(\left\| f'(A) \right\| + \left\| f'(B) \right\| \Big) \|A-B\|, \qquad (۱۱)$$

اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A)-f(B)\| \le max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}\|A-B\|, \qquad (۱۲)$$

اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$، $s-$محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A)-f(B)\| \le \frac{1}{s+1}\left(\left\|f'(A)\right\| + \left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|, \qquad (۱۳)$$

ب) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ باشد. در این‌صورت برای هر نرم یکانی پایای $|||.|||$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$|||f(A)-f(B)||| \le max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}|||A-B|||. \qquad (۱۴)$$

اثبات: الف) فرض کنید $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، با استفاده از (۷) برای $v=1$ و $v=0$، این نامساوی‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\left\|f(A)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt\right\| \le \left(\frac{1}{3}\left\|f'(A)\right\| + \frac{1}{6}\left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|$$

و

$$\left\|f(B)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt\right\| \le \left(\frac{1}{6}\left\|f'(A)\right\| + \frac{1}{3}\left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|.$$

و $v=1$ محدب باشد، آن‌گاه از نامساوی (۸) یا (۹) برای $s-$ شبه‌محدب یا $\left\|f'(.)\right\|$روی $\sigma(I)$حال در صورتی‌که ، نامساوی‌های مطلوب در قسمت (الف) را به‌دست می‌آوریم.$v=0$

ب) به‌کمک رابطهٔ (۱۰) برای $v=1$ و $v=0$، نامساوی‌های زیر را به‌دست می‌آوریم، که به نوع خود جالب هستند.

$$|||f(A)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt||| \le \frac{1}{2}|||A-B|||max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\},$$

$$|||f(B)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt||| \le \frac{1}{2}|||A-B|||max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}.$$

بنابراین نامساوی مطلوب (۱۴) را به‌دست می‌آوریم و اثبات کامل می‌شود.

به‌کمک نتیجهٔ ۲، مثال ۲ را بیان می‌کنیم:

مثال۲. الف) برای $f(t)=t^{r+1}$ که $0<r<1$ داریم:

$$\|A^{r+1}-B^{r+1}\| \le \frac{(r+1)}{2}(\|A\|^r+\|B\|^r)\|B-A\|.$$

ب) برای $f(t)=t^r$ که $0<r<1$ داریم:

$$|||A^r-B^r||| \le r(max\{\|A^{-1}\|,\|B^{-1}\|\})^{1-r}|||A-B|||.$$

ج) برای $f(t)=\log t$ روی $(0,\infty)$،

$$|||\log(A)-\log(B)||| \le (max\{\|A^{-1}\|,\|B^{-1}\|\})|||A-B|||.$$

تذکر۲ . فرض کنید که f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,,\infty)$ باشد و فرض کنیدA وB دو عملگر مثبت باشند به‌طوری‌که برای عدد مثبت a، $A\ge a1_H$ و $B\ge a1_H$.

به‌وسیلهٔ قضیهٔ [۳.۸، X از ۵]، برای هر نرم یکانی پایا نامساوی (۱۵) برقرار است:

$$|||f(A)-f(B)||| \le f'(a)|||A-B|||. \qquad (۱۵)$$

هم‌چنین از تساوی (۵)، داریم:

$$f'(A) = \beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2}\, d\mu(\lambda) \le \beta 1_H + \left[\int_0^\infty (\lambda + a)^{-2}\, d\mu(\lambda)\right] I = f'(a)I$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\} \le f'(a).$$

بنابراین نامساوی (۱۴) یک تظریف (۱۵) است. این تظریف می‌تواند اکید باشد، چون برای تابع $f(t) = t^r$ که $0 < r < 1$ و $A = B = b1_H$ با شرط $b > a$، داریم:

$$max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\} = r\, max\{\|A^{r-1}\|, \|B^{r-1}\|\} = rb^{r-1} < ra^{r-1} = f'(a).$$

در قضیهٔ ۳، فرمول سیمپسون برای توابع یکنوای عملگری را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد. دراین‌صورت برای هر نرم یکانی پایای $|||.|||$ و هر $A, B \in \sigma(I)$ داریم:

$$|||\frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt||| \le$$

$$\frac{5}{72}|||A - B|||\left[max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\} + max\left\{\left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}\right].$$

اثبات. چون

$$\int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)A + t\frac{A+B}{2}\right) dt +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt,$$

بنابراین داریم:

$$|||\frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt||| \le$$

$$\frac{1}{2}|||\frac{f(A) + 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)A \quad + t\frac{A+B}{2}\right) dt\,|||$$

$$+|||\frac{2f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt|||\frac{1}{2}.$$

به‌کمک نامساوی (۱۴) به‌ازای $\upsilon = \frac{1}{3}$ و برای $\upsilon = \frac{2}{3}$ به‌دست می‌آوریم که:

$$|||\frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f((1-t)A + B)\, dt|||$$

$$\le \frac{5}{72}|||A - B|||\left[max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\} + max\left\{\left\|f'(B)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\}\right].$$

و اثبات کامل می‌شود.

منابع

1. Barnet N. S., Cerone P., Dragomir S. S., "Some new inequalities for Hermite-Hadamard divergence in information theory", Stochastic analysis and applications. Vol. 3, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY (2003) 7-19.
2. Dragomir S. S., Pearce C. E. M., "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications", (RGMIA Monographs http:// rgmia.Vu.Edu.au/ monographs/ Hermite hadamard. Html), Victoria University (2000).
3. Wu S., "On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications", Rocky Mountain J. Math. 39 (5) (2009) 1741-1749.
4. Hudzik H., Maligranda L., "Some remarks on s-convex functions", Aequationes Math., 48 (1994) 100-111.
5. Bhatia R., "Matrix analysis", Springer-verlag, New York (1997).
6. Furuta T., Micic Hot J., Pecaric J., Seo Y., "Mond-Pecaric Method in Operator Inequalities (Inequalities for bounded self adjoint operators on a Hilbert space)", Monographs in Inequalities, Vol. 1. Element, Zagreb (2005).
7. Bhatia R., "Perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 226 (1995) 539-545.
8. Bhatia R., "First and second order perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 208 (1994) 367-376.
9. Bhatia R., Sinha K. B., "Variation of real powers of positive operators", Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 913-925.
10. Dragomir S. S., Agarwal R. P., "Tow inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula", Appl. Math. Lett. 11(5) (1998) 91-95.
11. Ghazanfari A. G., "Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are operator convex", Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016) 1695-1703.