

ناوردای توپولوژیکی یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر روی مخروط واقع در یک میدان پتانسیلی

قربانعلی حقیقت‌دوست^{*}، جعفر اوج‌بگ

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی محض

پذیرش ۹۸/۰۲/۱۸

دریافت ۹۶/۱۲/۰۶

چکیده

در این مقاله توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین برای سیستم هامیلتونی با دو درجه آزادی روی مخروط واقع در یک میدان پتانسیلی توصیف شده است. هم‌چنین روش یافتن ناوردای توپولوژیکی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر از حالت فشرده به رویه‌های دوار نافشرده توسیع داده شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های هامیلتونی، رویه‌های هم‌انرژی، ناوردهای فومنکو-زی‌شانگ، میدان‌های پتانسیلی.

مقدمه

در بررسی کیفی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر یک مشخصه مهم، نوع توپولوژیکی رویه‌های هم‌انرژی است. نظریه رده‌بندی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر با دو درجه آزادی، نتیجه تلاش‌های ریاضی‌دان روسی، فومنکو و شاگردان اوست. بر اساس این نظریه به هر سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر با دو درجه آزادی محدود به چندگونا ۳-بعدی رویه هم‌انرژی غیرتکین، یک گراف با اعدادی روی یال‌های آن نسبت داده می‌شود که مولکول مارکدار یا ناوردای فومنکو-زی‌شانگ^۱ نامیده می‌شود. مولکول مارکدار توصیف کاملی از برگ‌بندی سیستم مورد نظر (نسبت به هم‌ارزی لیوویلی) به‌دست خواهد داد. ساختن مولکول‌های مارکدار به چندین روش امکان‌پذیر است. در این‌جا یکی از روش‌های ساختن مولکول‌های مارکدار که بر مبنای رسم دیاگرام انشعاب نگاشت ممانی^۲ است را در چند گام بیان می‌کنیم.

۱. دیاگرام انشعاب نگاشت ممانی $\phi: M^4 \rightarrow R^2(h, k)$ برای چندگونا M^4 را رسم می‌کنیم. نقطه x را نقطه تکین ϕ گویند، هرگاه $rank d\phi(x) < 2$ باشد. تصویر مجموعه تمام نقاط تکین تحت نگاشت ممانی را دیاگرام انشعاب می‌نامند. در نتیجه رسم دیاگرام انشعاب در صفحه R^2 چندین منحنی با تکینگی داریم و آن را با نماد Σ نشان می‌دهیم.

۲. $\phi^{-1}(\ell)$ پیش‌نگاره خط $\{H = h = \text{ثابت}\}$ روی صفحه (H, K) که H تابع هامیلتونی و K انتگرال افزوده است، را به‌دست می‌آوریم که چندگونا ۳-بعدی در M است، چندگونای حاصل را با نماد Q_h^3 نشان می‌دهیم.

۳. تمام نقاط ناحیه $\phi^{-1}(\ell) \cap N$ را توصیف می‌کنیم که در آن N مجموعه تمام نقاط تکین و $\Sigma = \phi(N)$ است. هم‌چنین هسین^۳ انتگرال افزوده K برای زیرچندگونای بحرانی متناظر در Q_h^3 را محاسبه می‌کنیم.

^{*} نویسنده مسئول gorbani@azaruniv.ac.ir

1. Fomenko-Zieschang
2. Momentum mapping
3. Hessian

۴. تعداد چنبره‌های لیوویلی و نحوه انشعاب در فضای پیش‌نگاره را مشخص می‌کنیم.

۵. گراف ریب و مشخصه‌های توپولوژیکی را توصیف و سرانجام ناوردهای عددی r_i, ε_i, n_k را محاسبه می‌کنیم. رده‌بندی توپولوژیکی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر نسبت به هم‌ارزی لیوویلی در میدان‌های پتانسیلی روی رویه‌های دوار برای حالتی که چندگونای M دیفئومورف با S^2 باشد در برگیرنده رده وسیعی از سیستم‌های مکانیکی است که حرکت ذره جرم‌دار روی کره ۲-بعدی با متریک دوار را توصیف می‌کند، که در [۴] بررسی شده است. استفاده از تابع پتانسیل مؤثر برای رده‌بندی سیستم‌های مورد نظر از نکات قابل توجه مقاله ایشان است. در این مقاله توصیف توپولوژیکی حرکت ذره جرم‌دار روی مخروط را بررسی می‌کنیم. برای روش ساخت دیاگرام انشعاب از [۱] و مفاهیم و تعاریف مقدماتی از [۲] استفاده شده است.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. یک ساختار هم‌تافته بر چندگونای هموار M یک ۲-فرم دیفرانسیل ω صادق در این شرایط است:

(الف) فرم ω بسته باشد، یعنی $d\omega = 0$.

(ب) فرم ω در هر نقطه چندگونا ناتهگون باشد یعنی، در مختصات موضعی $d(\omega_{ij}(x)) \neq 0$ که در آن $\omega_{ij}(x)$ ماتریس فرم ω در نقطه x است.

چندگونای M همراه با یک ساختار هم‌تافته، چندگونای هم‌تافته نامیده می‌شود.

برای دو تابع هموار H و K روی چندگونای هموار M کروسه $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$: $\{, \}$ با ضابطه $\{K, H\} = \omega(v, sgrad H)$ را کروسه پواسن گویند. کروسه پواسن پادمتقارن است و در شرط ژاکوبی و قاعده لایب‌نیتز صدق می‌کند.

تعریف ۲. فرض کنیم H یک تابع هموار بر چندگونای هم‌تافته M باشد. میدان برداری پادگرادیان $sgrad H$ را برای این تابع چنین تعریف می‌کنیم:

$$\omega(v, sgrad H) = v(H)$$

که در آن v یک بردار مماس بر چندگونای M است. سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = sgrad H(x)$$

روی چندگونای هم‌تافته M را یک سیستم هامیلتونی با تابع هامیلتونی H می‌نامند. در یک مختصات موضعی (p_i, q_i) ، میدان برداری هامیلتونی به فرم $(\frac{\partial H}{\partial q_i}, -\frac{\partial H}{\partial p_i})$ درمی‌آید.

تعریف ۳. سیستم هامیلتونی را انتگرال‌پذیر به مفهوم لیوویل گویند هرگاه نگاشت‌های هموار H و K انتگرال‌های اول سیستم دینامیکی v موجود بوده و به‌طور تابعی مستقل باشند، هم‌چنین $\{H, K\} = 0$ و میدان‌های پادگرادیان آنها کامل باشند.

تعریف ۴. لایه‌بندی^۱ چندگونای M^4 به مؤلفه‌های هم‌بندی از رویه‌های تراز مشترک انتگرال‌های H, K ، برگ‌بندی لیوویلی متناظر با دستگاه انتگرال‌پذیر $v = sgrad H$ نامیده می‌شود.

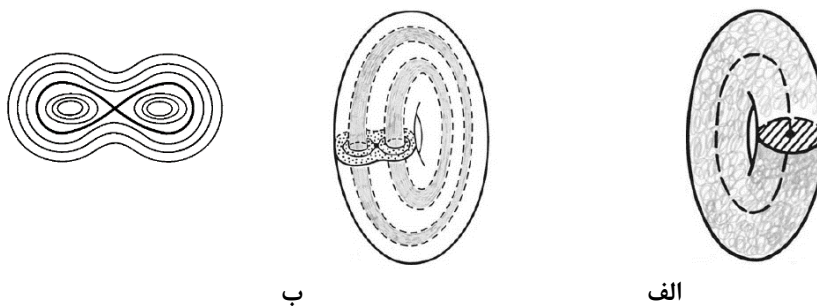
قضیه لیوویل [۲] ساختار برگ‌بندی لیوویلی نزدیک برگ‌های منظم را توصیف می‌کند. در این قضیه T_ξ را تراز منظم مشترک توابع H, K در نظر می‌گیریم، یعنی $T_\xi = \{x \in M | H(x)=h, K(x)=k\}$.

حالت اول: اگر T_{ξ} همبند و فشرده باشد آن گاه T_{ξ} دیفئومورف با چنبره ۲- بعدی است. اگر T_{ξ} فشرده ولی ناهمبند باشد آن گاه T_{ξ} اجتماعی از چنبره های لیوویلی است. در این حالت دو برگ را هم ارز لیوویلی گوییم اگر دیفئومورفیزیکی از برگ اولی به دومی وجود داشته باشد که برگ ها را به هم دیگر بنگارد و جهت روی چندگونا های ۳- بعدی Q_h^3 و $Q_{h'}^3$ و نیز جهت دایره های بحرانی شارهای هامیلتونی را حفظ کند.

حالت دوم: اگر T_{ξ} همبند و نافشرده باشد آن گاه T_{ξ} دیفئومورف با استوانه است. هم ارزی لیوویلی در این حالت نیز مشابه حالت اول تعریف می شود.

اکنون به بیان دو نوع ۳- اتم حالت فشرده (حالت اول) از دیدگاه توپولوژی می پردازیم. توپولوژی ۳- اتم A یک چنبره توپر برگ بندی شده به چنبره های هم مرکز حول محور است که به صورت ضرب ۲- اتم هاشور خورده در شکل ۱ الف با دایره S^1 است.

توپولوژی ۳- اتم B به صورت ضرب ۲- اتم نشان داده شده سمت چپ در شکل ۱ ب و دایره S^1 است. برگ بندی لیوویلی، القایی از ۲- اتم متناظر است، به عبارتی دیگر (۲- اتم متناظر $A, B = S^1 \times$). انواع دیگری از ۳- اتم ها در [۲] معرفی شده اند.



شکل ۱.

تبصره ۱. اتم های نافشرده یک سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر برگ های منظم، استوانه است که آنها را با $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نشان می دهیم [۶].

تعریف ۵. اگر x یک نقطه بحرانی از رتبه صفر نگاشت ممانی باشد به گونه ای که $dK \neq 0$ در این صورت طبق قضیه داربو^۱ [۲] مختصات کانونی (p_1, q_1, p_2, q_2) در همسایگی x چنان وجود دارد که $K = p_1$ با توجه به این که H و K با هم جابه جا می شوند یعنی $\{H, K\} = 0$ از این رو، H نمی تواند به q_1 وابسته باشد، یعنی $H = H(p_1, p_2, q_2)$. از آن جاکه x نقطه بحرانی نگاشت ممانی است بنابراین $\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0$. نقطه x را ناتبهگون گوییم هرگاه در مینان زیر غیر صفر باشد

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_2} \end{vmatrix}$$

تعریف ۶. تابع $\hat{F}$ روی Q_h^3 را یک تابع بات^۲ گویند هرگاه مجموعه همه نقطه های بحرانی آن یک زیر چندگونا ی بحرانی ناتبهگون تشکیل دهند. یعنی مجموعه نقطه های بحرانی اجتماع از هم جدایی از زیر چندگونا های هموار باشد که هر یک از آنها ناتبهگون است.

1. Darboux's theorem

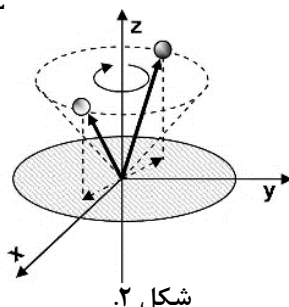
2. Bott

تعریف ۷. چندگونای M مجهز به متریک g را چندگونای دوار گویند (با یک متریک دوار)، اگر عمل هموار و مؤثر^۱ دایره S^1 روی چندگونا M به وسیله ایزومتريها مشخص شود. روبه‌های ۲-بعدی دوار در R^3 مثالی از چندگوناهاى دوار هستند.

طرح مسئله و نتایج اصلی

جسمی به جرم m روی مخروطی در R^3 با معادله $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۲ را ببینید). در مختصات استوانه‌ای، هامیلتونین که همان انرژی کل است را بدین صورت داریم:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(1+a^2) + r^2\dot{\theta}^2) + U$$



شکل ۲.

قرار می‌دهیم:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(1+a^2) + r^2\dot{\theta}^2) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = P_r = m\dot{r}(1+a^2) \text{ و } \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = P_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات جرم ذره را واحد در نظر می‌گیریم. از این‌رو، هامیلتونین در مختصات جدید به صورت

$$H = \frac{1}{2(1+a^2)}P_r^2 + \frac{1}{2r^2}P_\theta^2 + ar,$$

در می‌آید. حرکت ذره به وسیله تابع هموار $f(r) = \pm r$ روی $[0, +\infty)$ در میدان پتانسیلی $V(r) = ar$ تعریف شده است. نقطه متناظر با $r = 0$ تکینى مخروط است.

تعریف ۸. تابع پتانسیل مؤثر بدین صورت تعریف می‌شود

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

که در آن L ممانی زاویه‌ای، r فاصله بین دو جرم، $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ و $U(r)$ شکل عمومی پتانسیل است.

گزاره ۱. برای زوج $(f(r), V(r))$ داده شده، سیستم با هامیلتونین H روی مخروط انتگرال‌پذیر به مفهوم لیوویل است.

اثبات: ایده اثبات کاملاً مشابه با اثبات گزاره ۱ [۴] hsj. فضای فاز سیستم از بعد چهار است، زیرا هر نقطه آن به وسیله مختصات $(r, \theta, P_r, P_\theta)$ داده شده که در آن (r, θ) مختصات نقطه و (P_r, P_θ) گشتاورها هستند. سیستم دارای دو

انتگرال، انتگرال انرژی به صورت

$$H = \frac{1}{2(1+a^2)}P_r^2 + \frac{1}{2r^2}P_\theta^2 + ar,$$

و انتگرال افزوده اول به صورت $K = P_\theta$ است، زیرا $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$. حرکت ذره روی مخروط به وسیله این معادله

توصیف می‌شود:

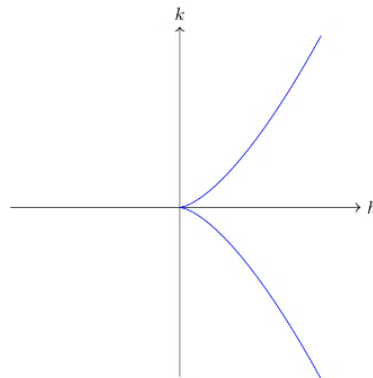
$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

با توجه به این که دو انتگرال برای سیستم داریم، از این رو، از تعریف انتگرال پذیری به مفهوم لیوویل اثبات گزاره کامل است.

لم ۱. سیستم دینامیکی تعریف شده روی کلاف هم مماسی مخروط دارای خانواده ای ۲-پارامتری از نقاط رتبه ۱ به صورت $(r, \theta, 0, k(r))$ هستند که در آن $k(r) = \pm\sqrt{ar^3}$ است. سیستم دینامیکی هیچ نقطه ای از رتبه صفر ندارد. تصویر نقاط تکین از رتبه ۱ تحت نگاشت ممانی بدین صورت است:

$$h(r) = \frac{3}{2}ar \quad \text{و} \quad k(r) = \pm\sqrt{ar^3},$$

که روی $[0, +\infty)$ تعریف شده است. دیاگرام انشعاب نسبت به محور Oh متقارن است. (شکل ۳ را ببینید)



شکل ۳.

اثبات: روش به دست آوردن دیاگرام انشعاب در بخش قبل توضیح داده شده و از آوردن محاسبات این جا صرف نظر می شود.

مولکول رویه های هم انرژی

با توجه به این که نظریه رده بندی توپولوژیکی فونکو-ژی شانگ برای رویه های هم انرژی غیر تکین یک سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر به کار برده می شود، از این رو، بررسی غیر تکین بودن رویه های هم انرژی Q_h^3 یک سیستم هامیلتونی ضروری است، یعنی رویه هایی که به ازای تمام نقاط آن $dH \neq 0$.

لم ۲. رویه هم انرژی Q_h^3 به ازای $a = 0$ غیر تکین است اگر $h \neq 0$ برای $a \neq 0$ هامیلتونین نقطه بحرانی ندارد، یعنی تمام h مقادیر منظم هامیلتونین H است.

اثبات: با محاسبه مشتق هامیلتونین به آسانی دیده می شود برای حالتی که $a = 0$ است، نقاط بحرانی آن به صورت $(r, \theta, 0, 0)$ است. با جای گذاری آن در تابع هامیلتونین داریم:

$$H(r, \theta, 0, 0) = ar \xrightarrow{a=0} H(r, \theta, 0, 0) = 0.$$

بنابراین اگر $a \neq 0$ باشد انتخاب $h \neq 0$ نقاط منظم را به دست می دهد. در نتیجه نقاط منظم، نقاطی هستند که در این معادله صدق می کنند:

$$\frac{1}{2}P_r^2 + \frac{1}{2r^2}P_\theta^2 = h.$$

برای حالتی که $a \neq 0$ باشد، همواره $dH \neq 0$.

تقریباً تمام انتگرال های سیستم های هامیلتونی انتگرال پذیر ظاهر شده در فیزیک و مکانیک توابع بات هستند. یک سیستم انتگرال پذیر را ناتبهگون گویند، هرگاه دارای یک انتگرال بات باشد. برای هر سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر

تحلیلی $v = sgrad H$ روی رویه هم‌انرژی Q_h^3 با یک اختلال هموار کوچک می‌توان یک سیستم انتگرال‌پذیر هموار ناتبه‌گون به‌دست آورد. هر رویه بسته فشرده جهت‌پذیر ۳-بعدی را می‌توان به‌عنوان رویه ۳-بعدی هم‌انرژی سیستم هامیلتونی در نظر گرفت که به کمک یک انتگرال بات حاصل می‌شود، به عبارتی ساده‌تر به کمک انتگرال بات می‌توان ساختار توپولوژیکی رویه هم‌انرژی را به‌دست آورد (گزاره ۳-۶ از [۷] را ببینید).

تابع پتانسیل $U_k(r) = \frac{1}{2r^2}k^2 + ar$ را در نظر می‌گیریم، آن‌گاه در هر نقطه $(r, \theta, 0, k)$ که $r, k \neq 0$ داریم:

$$U_k''(r) = -\frac{3}{r^4}k^2 \neq 0.$$

بنابراین تحدید تابع K به رویه هم‌انرژی غیرتکین Q_h^3 تابع بات است.

لم ۳. فرض کنید $Q \subseteq Q_h^3$ یک مؤلفه هم‌بندی از رویه غیرتکین باشد که $K|_{Q_h^3}$ تابع بات است. در این صورت اتم‌های سیستم از نوع $\bar{A}$ می‌باشند.

اثبات: مولکول سیستم را در دو حالت بررسی می‌کنیم. حالت اول برای $a = 0$: مجموعه نقاط صادق در معادله

$$\frac{1}{2}P_r^2 + \frac{1}{2r^2}P_\theta^2 = h,$$

را در نظر می‌گیریم. حال معادله فوق را برحسب P_r بدین صورت داریم:

$$P_\theta(r) = \pm r \sqrt{2h - P_r^2}.$$

عبارت زیر رادیکال همان تابع پتانسیل مؤثر برای حالتی است که $a = 0$. با توجه به مثبت بودن عبارت زیر رادیکال نتیجه می‌شود تابع پتانسیل همواره مثبت است و همچنین دارای یک نقطه کمینه سراسری است. نمودار $P_\theta(r)$ برای مقادیر مختلف r با تغییرات h و P_r همواره دو خط متقاطع گذرنده از مبدأ نشان داده شده در شکل ۴ الف است. به‌ازای $h = 2$ دو خط نمودار منطبق بر محور r و زمانی که $h \rightarrow \infty$ میل می‌کند بر محور قائم منطبق می‌شوند.

با توجه به این‌که فقط مقادیر مثبت r مورد نظر است، از این‌رو، با در نظر گرفتن نمودار شکل ۴ الف و ضرب آن در دایره S^1 (با توجه به این‌که $\theta \in R \setminus 2\pi Z$ اتم مورد از نظر توپولوژیکی استوانه با کمر بند میانی است. از منظر توپولوژیکی می‌توان به‌صورت ۲-اتم A ضرب در R^1 در نظر گرفت، این ۳-اتم‌ها را با نماد $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. از طرفی به‌دلیل مثبت بودن عبارت زیر رادیکال به‌ازای هر r تصویر وارون نقطه (h, k) اجتماع دو استوانه متناظر با علامت بیرون از رادیکال است



شکل ۴.

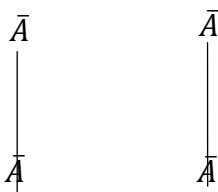
برای حالت $a \neq 0$ که همواره $dH \neq 0$ با توجه به معادله هامیلتونین داریم:

$$P_\theta(r) = \frac{\pm r}{\sqrt{1+a^2}} \sqrt{2(1+a^2)(h-ar) - P_r^2}.$$

حالت‌های مختلف ۲-اتم در جدول ۱ رسم شده است. در حالت‌های مختلف با ضرب ۲-اتم‌های متناظر در دایره S^1 با توجه به این که $\theta \in R \setminus 2\pi Z$ ، ۳-اتم مورد نظر از نظر توپولوژیکی استوانه است. با بررسی تمام حالت‌های ممکن مشاهده می‌شود همواره ۳-اتم از نوع $\bar{A}$ است و این اثبات را کامل می‌کند.

در بخش ۶ [۴] تحلیل تابع پتانسیل، الگوریتم شمارش مؤلفه‌های هم‌بندی رویه هم‌انرژی غیرتکین را بدین صورت مشخص می‌کند:

روی نمودار تابع پتانسیل (شکل ۴ ب) موازی با محور افق خطوط متقاطع با نمودار را در نظر می‌گیریم. برای مقادیر مختلف h شمارش قطعه‌های افقی از خط که اکیداً زیر نمودار $U_k(r)$ هستند تعداد مؤلفه‌های هم‌بندی را به دست می‌دهد، به جز حالتی که برای هر r تابع $U_k(r)$ مثبت باشد. در این حالت هر قطعه که زیر کمینه سراسری تابع باشد متناظر با دو استوانه است. با توجه به شکل تعداد مؤلفه‌ها دو تا است. با در نظر گرفتن تقارن دیاگرام انشعاب مولکول مورد نظر سیستم بدین صورت به دست می‌آید:

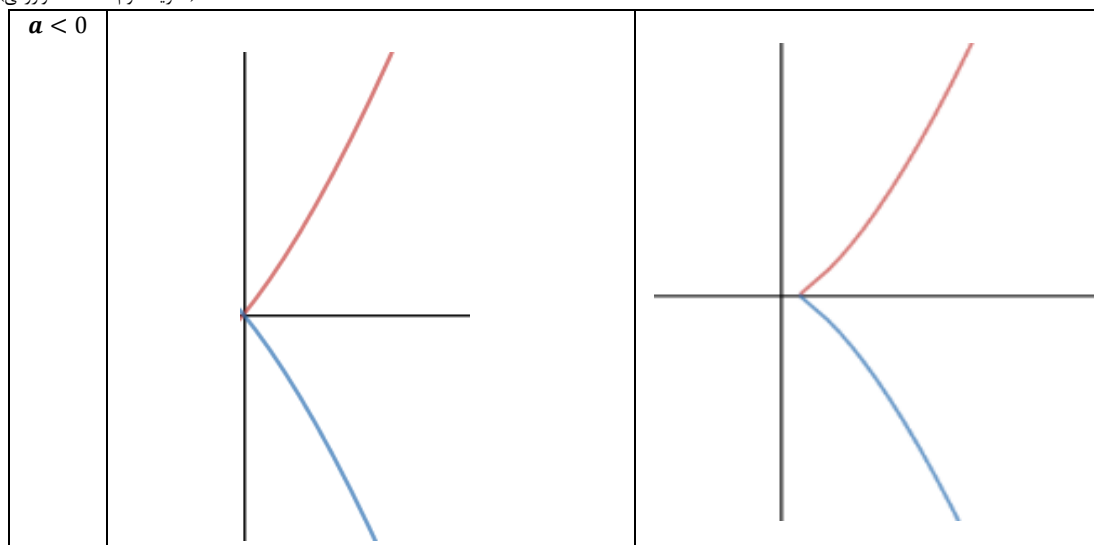


شکل ۵.

محاسبه ناوردهای n_k ، ε_i ، r_i در مقاله‌ای دیگر بررسی می‌شود.

جدول ۱. نمودار تابع $P_\theta(r)$ برای حالت‌های مختلف a و h (محور افقی r و محور عمودی $P_\theta(r)$ است)

	$h > 0$	$h < 0$
$a > 0$		



نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین برای سیستم هامیلتونی با دو درجه آزادی روی مخروط به عنوان رویه دوار غیرفشرده، اتم‌های نافشرده یک سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر برگ‌های منظم، استوانه است. با اعمال روش بیان شده در لم ۳، می‌توان توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین رویه‌های دوار فشرده را به دست آورد. همچنین به کمک تابع پتانسیل، می‌توان تعداد مولفه‌های هم‌بندی رویه هم‌انرژی غیرتکین مربوط به مخروط را مشخص کرد. در مورد سایر رویه‌های دوار غیرفشرده نیز روش‌های بیان شده در این مقاله را می‌توان به کار گرفت.

منابع

1. Haghighatdoost Gh. , Oshemkov A., "The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ", Sbornik Mathematics ,Vol. 200, 6 (2009) 899-921.
2. Haghighatdoost Gh., "The topology of isoenergetic surfaces for the Sokolov integrable case in the Lie algebra $so(4)$ ",Doklady. Mathematics, Vol. 71, 2 (2005) 256-259.
3. Bolsinov A.V., Anatoly Fomenko, "Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification", Taylor & Francis (2004) 752 pages.
4. Fomenko A. T., Konyaev A.Yu., "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems", Topology Appl. 159, 7 (2012) 1964-1975.
5. Fomenko A. T., Kantonistova E. O., "Topological classification of geodesic flows on revolution 2-surfaces with potential", Springer, Vol. 30 (2015) 11-27.
6. Nikolaenko S., "Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 38, No. 6 (2017) 1050-1060.