

S-کنش‌های خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال

مهديه حدادی*، سيد مجتبی ناصر شيخ الاسلامی
دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۱/۲۷

پذیرش: ۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این مقاله قصد داریم مانند آنچه را که لمبک^۱ در مورد تعمیم مفهوم زیرمدول‌های خالص با استفاده از یک رادیکال در رسته R -مدول‌ها انجام داده‌است، برای رسته S -کنش‌ها انجام دهیم. به این منظور، ما نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی زیرکنش‌های dli -خالص، که مرتبط با مفهوم رادیکال هونکه است را در این رسته معرفی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر رادیکال هونکه r ، S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص همان S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف هستند. سپس به وسیله هر ایده‌آل چپ r -چگال، عملگر بستاری را معرفی می‌کنیم که ارتباط نزدیکی با مفهوم S -کنش‌های dli -خالص دارد. سپس این ارتباط را به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌دهیم. واژه‌های کلیدی: S -کنش، رادیکال، ایده‌آل r -چگال، زیرکنش dli -خالص.

۱. مقدمه

مفهوم خالص بودن با رویکرد تشخیص حل‌پذیری دستگاه از معادلات، از سال ۱۹۵۵ در شاخه‌های مختلف ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است [۲، ۳، ۷، ۱۳، ۴۱، ۲۳]. این مفهوم را می‌توان با در نظر گرفتن دستگاه خاصی از معادلات تعمیم داد، به عنوان مثال [۴، ۵، ۲۱، ۲۲] را ببینید. لمبک در [۲۰] با استفاده از مفهوم نظریهٔ تاب^۲ نوع خاصی از زیرمدول‌های خالص را تعریف کرده است. با توجه به اینکه تناظری یک به یک بین نظریه‌های تاب و رادیکال‌های کوروش-آمیستر در رسته S -کنش‌ها وجود دارد. [۱۷] را ببینید. در بخش ۲، نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی dli -خالص را نسبت به رادیکال‌های هونکه تعریف و مفاهیم مرتبط با آن را بررسی می‌کنیم. بخش ۳ را به S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص و r -انژکتیو ضعیف اختصاص می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم مفاهیم به طور مطلق dli -خالص و r -انژکتیو ضعیف معادلند و به چند روش آنها را مشخص می‌کنیم. همچنین به مشخص سازی شرایط لازم و کافی برای به طور مطلق dli -خالص بودن تمام S -کنش‌ها می‌پردازیم. سرانجام در بخش ۴، نسبت به هر ایده‌آل چپ r -چگال D ، عملگر بستار c^D را معرفی می‌کنیم و به وسیله آن، S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص را مطالعه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم هر c^D -تک‌ریختی یک r -تک‌ریختی است. منظور از یک S -کنش روی تکواره S ، مجموعه‌ای است مانند A به همراه کنش $sa \mapsto (s, a)$ ، $s \times A \rightarrow A$ ، برای $a \in A$ و $s \in S$ که در دو ویژگی $t(sa) = (ts)a$ و $1a = a$ صدق می‌کند که در آن، 1 عنصر همانی تکواره S است. یک S -کنش A را بدیهی می‌نامیم، هرگاه $|A| \leq 1$. یک هم‌ریختی از S -کنش‌ها، نگاشتی است مانند $f: A \rightarrow B$ با این ویژگی که $f(sa) = sf(a)$ ، برای هر $a \in A$ و

* نویسندهٔ مسئول m.haddadi@semnan.ac.ir

$S \in S$ رده همه S -کنش‌ها به همراه هم ریختی‌های بین آنها تشکیل رسته می‌دهد که آن را با $S\text{-Act}$ نشان می‌دهیم. منظور از زیرکنش B از S -کنش A زیرمجموعه‌ای از A است که $sb \in B$ و $b \in B$ از آنجا که تصویر هم ریخت تک‌ریختی‌ها در S -کنش A با زیرکنش‌های A در تناظر یک به یک هستند، این دو مفهوم را یکی می‌گیریم.

رابطه هم ارزی ρ روی S -کنش A را همنهشتی می‌نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$ ، $apa' \rho (sa)$ نتیجه دهد. همه همنهشتی‌ها روی A را با $Con(A)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $Con(A)$ شبکه‌ای کران دار با همنهشتی قطری، $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$ به عنوان کوچکترین عضو و همنهشتی سراسری، $\nabla_A = A \times A$ به عنوان بزرگترین عضو است. اشتراک همه همنهشتی‌های روی A که شامل زیرمجموعه دلخواه $C \subseteq A \times A$ هستند را همنهشتی تولید شده توسط C روی A می‌نامیم و با $\theta(C)$ نشان می‌دهیم. برای هر S -کنش A و $\theta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ، $\theta(\{(a_i, a_j) | 1 \leq i, j \leq n\})$ در نظر می‌گیریم. هر همنهشتی $\chi \in Con(A)$ افزای است از A به وسیله χ -رده‌ها و یک دستگاه Σ_χ از χ -رده‌هایی که هر یک زیرکنشی نابدی‌ی از A هستند را برای ما مشخص می‌کند. هرچند ممکن است Σ_χ نیز، تهی باشد. در این مقاله، ما به جای مفهوم همنهشتی ریس (Rees) تعریف شده در [۱۹]، از مفهوم کلی‌تر ارائه شده در [۲۴] استفاده می‌کنیم. بدین معنی که همنهشتی ρ روی S -کنش A را ریس می‌نامیم، هرگاه هر ρ -رده آن، یک زیرکنش A یا مجموعه‌ای تک عضوی باشد. بنابراین، هر دستگاه Σ ، از زیرکنش‌های مجزا و نابدی‌ی از S -کنش A ، همنهشتی ریزی مانند ρ_Σ با تعریف زیر را مشخص می‌کند:

$$(a, b) \in \rho_\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \text{برای یک } B \in \Sigma, a, b \in B \\ \text{در غیر این صورت } a = b \end{cases}$$

همنهشتی ρ_Σ را همنهشتی تولید شده بوسیله Σ روی A و A/ρ_Σ را خارج قسمت ریزی A روی ρ_Σ می‌نامیم. همچنین هرگاه Σ ، مجموعه تک عضوی $\{B\}$ باشد، از نماد ρ_B به جای ρ_Σ استفاده می‌کنیم. در این حالت، خارج قسمت ریزی A/ρ_B را با A/B نشان می‌دهیم. با وجود اینکه همواره χ -رده شامل $a \in A$ را با a/χ نشان می‌دهیم؛ اما وقتی $\chi \in Con(A/B)$ ، χ -رده B در خارج قسمت $(A/B)/\chi$ را با $[B]_\chi$ نشان می‌دهیم. هر همنهشتی χ_B روی زیرکنش B از S -کنش A را می‌توانیم به یک همنهشتی χ_A روی A به صورت زیر گسترش دهیم:

$$(a, b) \in \chi_A \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) \in \chi_B \\ \text{در غیر این صورت } a = b \end{cases}$$

در ادامه، همواره از نماد یکسان برای χ_A و χ_B استفاده می‌کنیم و در نتیجه هر همنهشتی $\chi \in Con(B)$ را به عنوان همنهشتی از $Con(A)$ نیز، در نظر می‌گیریم. به ویژه اگر $B \times B \in Con(B)$ را به روش بالا به همنهشتی‌ای روی A گسترش دهیم، همنهشتی ریس تولید شده توسط B روی A ، یعنی $\rho_B \in Con(A)$ حاصل می‌شود.

- نگارنده r که هر S -کنش A را به یک همنهشتی $r(A) \in Con(A)$ می‌نگارد، رادیکال هونکه یا به طور مختصر، رادیکال نامیده می‌شود، هرگاه:

(i) هر هم‌ریختی $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت $r(f): r(A) \rightarrow r(B)$ را القا کند، به گونه ای که هر $(a, \acute{a}) \in r(A)$ به $(f(a), f(\acute{a})) \in r(B)$ نگاشسته شود. باید توجه داشت که $r(A) \in \text{Con}(A)$ و $r(B) \in \text{Con}(B)$ به ترتیب، زیرکنش‌هایی از $A \times A$ و $B \times B$ هستند و $r(f)$ هم‌ریختی بین آنهاست.

(ii) برای هر S - کنش A داشته باشیم: $r(A/r(A)) = \Delta_{A/r(A)}$

در زیر، تعریف بعضی از انواع رادیکال‌ها که در [۱۶] و [۲۴] معرفی شده اند را می‌آوریم.

• رادیکال r را موروثی می‌نامیم، هرگاه برای هر S -کنش A و $B \leq A$ ، $r(B) = r(A) \cap \Delta_B$.

• رادیکال r را کوروش-آمیستر می‌نامیم، هرگاه:

(i) برای هر S - کنش A ، $r(A)$ هم‌نهشتی ریس باشد.

(ii) برای هر $B \in \sum_{r(A)}$ داشته باشیم: $r(B) = \nabla_B$.

هر رادیکال r ، دو زیر رده از S -کنش‌ها را مشخص می‌کند:

(۱) رده رادیکال (یا رده تاب) با تعریف $\mathbb{R}_r = \{A | r(A) = \nabla_A\}$.

(۲) رده نیمه ساده (یا رده بی تاب) با تعریف $S_r = \{A | r(A) = \Delta_A\}$.

در ادامه، اعضای $\mathbb{R}_r$ را S -کنش r -رادیکال و اعضای S_r را S -کنش r -نیمه ساده می‌نامیم. باید توجه داشت که رده S_r تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته است و شامل همه S -کنش‌های بدیهی است. همچنین هر زیررده S از S -کنش‌ها که تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته و شامل همه S -کنش‌های بدیهی باشد، رادیکالی به شکل $\mathbb{R}_S$ با تعریف

$$r_S(A) = \bigcap \{ \chi \in \text{Con}(A) | A/\chi \in S \}$$

را مشخص می‌کند. علاوه براین، $S = S_r$ اگر و تنها اگر $r = r_S$ [۲۴] را ببینید.

از [۲۴] یادآوری می‌کنیم که زیررده $\mathbb{R}$ از S -کنش‌ها، رده رادیکال از یک رادیکال r است، اگر و تنها اگر

(۱) $\mathbb{R}$ شامل همه S -کنش‌های بدیهی باشد.

(۲) تحت تصویر هم‌ریخت‌ها بسته باشد.

(۳) $\mathbb{R}$ دارای ویژگی استقرایی باشد، یعنی برای هر زنجیر صعودی $\{A_i\}_{i \in I} \leq \mathbb{R}$ ، داشته باشیم $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathbb{R}$.

(۴) تحت گسترش هم‌نهشتی‌های ریس بسته باشد؛ یعنی برای هر $A \in S - \text{Act}$ و هر هم‌نهشتی ریس ρ روی A

$$A/\rho \in \mathbb{R} \text{ و } \sum_{\rho} \text{ نتیجه دهد } A \in \mathbb{R}$$

برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A تذکر زیر را درباره $\sum_{r(A)}$ داریم:

تذکر ۱، ۱ برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A

(i) اگر $r(A)$ - رده X شامل زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه X نیز، زیرکنشی از A خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه $X \in \sum_{r(A)}$ چنان وجود دارد که $B \leq X$.

برهان. (i) اگر $X, r(A)$ - رده‌ی شامل زیرکنش B باشد، آن‌گاه X نسبت به S - کنش بسته است. چرا که اگر $b \in B$ را دلخواه در نظر بگیریم، آن‌گاه برای هر $x \in X$ و هر $s \in S$ داریم: $(x, b) \in (A)$ و در نتیجه، $(sx, sb) \in r(A)$. اما چون $sb \in B \subseteq X$ ، نیز، متعلق به X خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از S -کنش A باشد، آن‌گاه بنا به ویژگی (i) تعریف رادیکال هونکه، $r(B) = \nabla_B \subseteq r(A)$. پس $r(A)$ - رده X چنان وجود دارد که $B \in X$. اکنون حکم از (i) نتیجه می‌شود.

خانواده $C = (c_A)_{A \in S-Act}$ که در آن $c_A: Sub(A) \rightarrow Sub(A)$ تابعی است که هر زیرکنش $B \leq A$ را به زیرکنش $c_A(B)$ (یا $c(B)$)، اگر باعث اشتباه نشود) از A می‌نگارد، عملگر بستار روی رسته $S-Act$ نامیده می‌شود، اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

$$(c1) \text{ (ویژگی گسترش) برای هر } B \in Sub(A), B \leq c_A(B)$$

$$(c2) \text{ (ویژگی یک‌نواپی) برای هر دو زیرکنش } B_1 \text{ و } B_2 \text{ از } A \text{ با این ویژگی که } B_1 \leq B_2 \text{ داشته باشیم } c_A(B_1) \leq c_A(B_2)$$

$$(c3) \text{ (ویژگی پیوستگی) برای هر هم‌ریختی } f: A \rightarrow C, f(c_A(B)) \leq c_C(f(B))$$

خواننده می‌تواند تعریف رسته‌ای عملگر بستاری را در [۸] ببیند.

زیرکنش B از S -کنش A را C -بسته می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = B$ ، همچنین به زیرکنش B از A ، C -چگال می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = A$ ، C -تک‌ریختی $m: E \rightarrow A$ را C -تک‌ریختی می‌گوییم، اگر $m(E)$ در A ، C -چگال باشد. برای رادیکال r ، هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $c_A^r = (c_A^r)_{A \in S-Act}$ با تعریف $c_A^r(B) = \pi^{-1}([B]_{r(A/B)})$ ، برای هر S -کنش A و هر زیرکنش B از A . در این صورت چون $B \subseteq [B]_{r(A/B)}$ ، پس $B \leq c_A^r(B)$. یعنی c^r دارای ویژگی گسترش است. برای اثبات ویژگی یک‌نواپی c^r ، برای زیرکنش‌های دلخواه $B_1 \leq B_2$ از S -کنشی مانند A ، هم‌ریختی کانونی $p: A/B_1 \rightarrow A/B_2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت با استفاده از ویژگی (i) تعریف رادیکال داریم $([B_1]_{r(A/B_1)}) \subseteq [B_2]_{r(A/B_2)}$ از این رو $c_A^r(B_1) \leq c_A^r(B_2)$ در نهایت برای هر هم‌ریختی $f: A \rightarrow C$ و $B \leq A$ ، هم‌ریختی $\bar{f}: A/B \rightarrow C/f(B)$ را با تعریف $\bar{f}(a/B) = f(a)/f(B)$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از ویژگی (i) تعریف رادیکال داریم: $\bar{f}([B]_{r(A/B)}) \subseteq [f(B)]_{r(C/f(B))}$

در نتیجه $f(c_A^r(B)) \leq c_C^r(f(B))$ ، یعنی ویژگی پیوستگی c^r را خواهیم داشت. بنابراین c^r عملگری بستاری روی رسته S -کنش‌ها است. در ادامه، به ترتیب، از واژه‌های r -چگال و r -بسته و r -تک‌ریختی به جای واژه‌های r -چگال، c^r -بسته و c^r -تک‌ریختی استفاده می‌کنیم. با توجه به تعریف عملگر بستاری c^r ، زیرکنش B در S -کنش A r -چگال، است اگر و تنها اگر $\pi^{-1}([B]_{r(A/B)}) = A$ و این تنها در صورتی امکان دارد که رده $[B]_{r(A/B)}$ شامل همه اعضای A باشد یعنی داشته باشیم $r(A/B) = \nabla_{A/B}$. ایده‌آل چپ دلخواه I از S را r -چگال می‌گوییم، هرگاه به عنوان زیرکنش از S -کنش S r -چگال باشد. یک S -کنش را r -انژکتیو می‌گوییم، هرگاه نسبت به r -تک‌ریختی‌ها، انژکتیو باشد.

در [۲۳] نشان داده شده است که هر معادله در رسته S -کنش‌ها به یکی از شکل‌های زیر است:

$$(۱) \quad sx = ty$$

$$(۲) \quad sx = tx$$

$$(۳) \quad sx = a$$

که در آن $t, s \in S$ و a عضوی در S -کنش A است.

به معادلاتی که ثابت‌های آنها در S -کنش A است، معادلات روی A می‌گوییم. زیرکنش B از S -کنش A را:

- خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد.
 - خالص از نوع سوم در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات به شکل $sx = b$ روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد. از این نوع خالص در [۱۹] با عنوان ۱- خالص یاد شده است.
 - دنباله‌ای خالص یا برای سادگی، S -خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه دنباله‌ای از معادلات روی B ، یعنی $\Sigma = \{sx = b_s | s \in S, b_s \in B\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، جواب داشته باشد.
- دستگاه Σ از معادلات روی S -کنش A را سازگار می‌گوییم، هرگاه در S -کنشی شامل A دارای جواب باشد. S -کنش A را به طور مطلق خالص می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی سازگار از معادلات روی A در آن دارای جواب باشد.

۲. خلوص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال

در این بخش، مشابه تعریف لمبک برای زیرمدول‌های خالص [۲۰]، ما نیز، نوعی از زیرکنش‌های خالص را بوسیله رادیکال هونکه تعریف می‌کنیم. درحقیقت، با استفاده از عملگر بستار القا شده توسط رادیکال هونکه r, c^r ، یک نوع خاص از خالص بودن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. برای رادیکال هونکه r ، زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال (یا به طور مختصر dli -خالص) می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و هر ایده‌آل چپ r -چگال D از S ، اگر $D_a \leq B$ ، آن‌گاه $b \in B$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$ ، $da = db$.

اگر B زیرکنشی dli -خالص از A باشد، از نماد $B \leq_{d.li.p} A$ استفاده می‌کنیم. همچنین مجموعه همه زیرکنش‌های dli -خالص از A را با $P_{d.li.p}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ می‌گوییم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ D از S ، B زیرکنشی S -خالص از A در رسته D -کنش‌ها باشد. همچنین زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ متناهی مولد می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ متناهی مولد D از S ، B زیرکنشی S -کنش خالص از A در رسته D -کنش‌ها باشد.

تذکر ۲.۳. (۱) به راحتی می‌توان بررسی کرد که برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A ، $(P_{d.li.p}(A), \leq_{d.li.p})$ ، یک مجموعه مرتب جزئی است.

(۲) اگر تعریف ۲.۱ را با تعریف S -کنش‌های S -خالص که در [۵] مطرح شده است، مقایسه کنیم، چون برای هر رادیکال هونکه r روی S -Act، هر نیم‌گروه S یک ایده‌آل چپ r -چگال از خودش است، می‌توان گفت که هر S -کنش dli -خالص یک S -کنش S -خالص نیز، هست؛ اما عکس این مطلب درست نیست. مثال ۴.۲ را ببینید.

(۳) با استفاده از قسمت دوم می‌توان اثباتی نسبت به زیرکنش‌های dli -خالص را با نتایج مشابه [۶] تعریف نمود.

مثال ۲.۴. فرض کنید $S = \{0, s, t\}$ نیم‌گروهی با جدول کیلی زیر باشد:

	$\cdot$	s	t
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s	$\cdot$	s	t
t	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

همچنین فرض کنید که رده $\mathbb{R}$ بستاری مجموعه $\{\{0, s\}, \{0\}\}$ تحت تصویر هم‌ریخت‌ها، ویژگی استقرایی و گسترش همنهشتی‌های ریس باشد. در این صورت رده $\mathbb{R}$ ، یک رادیکال کورش-آمیتسر $r_{\mathbb{R}}$ معرفی می‌کند. قضیه ۴.۲ از [۲۴] را ببینید. چون $S/\{0, t\} \cong \{0, s\}$ ، پس $S/\{0, t\} \in \mathbb{R}$. بنابراین، $\{0, t\}$ ایده آل چپ $r_{\mathbb{R}}$ -چگالی از S است. فرض کنید $A = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 7}$ یک S -کنش با جدول کیلی زیر باشد:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\cdot$	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
s	a_1	a_6	a_3	a_4	a_4	a_6	a_4
t	a_1	a_4	a_1	a_1	a_3	a_1	a_3

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $B = \{a_1, a_3, a_4, a_7\}$ زیرکنشی S -خالص از A است؛ اما در dli A خالص نیست. درحقیقت، $a_{\cdot} = \{a_1, a_4\} \leq B$ ، $\{0, t\}$ درحالی که هیچ $a \in B$ وجود ندارد که $a_{\cdot} = \{0, t\}$ ، در ادامه، رابطه بین زیرکنش‌های خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ به عنوان تعمیمی از مفهوم زیرکنش‌های dli -خالص و زیرکنش‌های خالص از نوع سوم را در قضیه ۵.۲ و قضیه ۶.۲ بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۲.۵. فرض کنید B زیرکنشی از S -کنش A باشد. در این صورت هر دستگاه از معادلات $\sum = \{s_i x_i = b_i \mid i \in I, b_i \in B, s_i \in S\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب خواهد بود؛ اگر و تنها اگر B در A خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $a \in A$ و D ، ایده‌آل چپی از S با ویژگی $Da \leq B$ باشد. در این صورت a جوابی از $\sum = \{d_i x = b_i \mid d_i a = b_i \text{ یا } b_i \in B \text{ و } d_i \in D\}$ است. بنابراین، با استفاده از فرض جوابی از $\sum$ در B مانند $\bar{b}$ وجود دارد. در نتیجه، برای $d_i \in D$ داریم: $d_i a = \bar{b}_i$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$ جوابی از دستگاه معادلات $\sum = \{s_i x_i = b_i \mid i \in I, b_i \in B, s_i \in S\}$ باشد. در این صورت برای هر $i \in I$ ، $D_i = \{s \in S \mid sa_i \in B\}$ ، ایده‌آل چپی از S با ویژگی $D_i a_i \leq B$ است. بنابراین با استفاده از فرض، برای هر $i \in I$ ، $\bar{b}_i \in B$ چنان وجود دارد که برای هر $s \in D_i$ ، $sa_i = s\bar{b}_i$ ، به ویژه داریم: $s_i \bar{b}_i = b_i$. در نتیجه، $\sum$ در B دارای جواب است.

با استدلالی همانند برهان قضیه ۵.۲، به راحتی می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۶. زیرکنش B از S -کنش A با خالص از نوع سوم است، اگر و تنها اگر B نسبت به ایده‌آل‌های چپ، متناهی مولد در A خالص باشد.

قضیه ۲.۷. به ازای رادیکال هونکه دلخواه r ، هر زیرکنش r -بسته B از S -کنش A در dli -خالص است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم برای هر زیرکنش سره r -بسته B از A و $a \in A/B$ ، هیچ ایده‌آل چپ r -چگال D از S با ویژگی $Da \subseteq B$ وجود ندارد. فرض کنید این گونه نباشد؛ (فرض خلف) یعنی ایده‌آل چپ سره و r -چگال D از S چنان وجود داشته باشد که برای $Da \subseteq B$ ، در این صورت از r -چگال بودن D در S داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$. چون $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی بسته است، $Sa/Da \in \mathbb{R}_r$. همچنین $Sa/(B \cap Sa) \cong S \cdot (a/B)$ ، کافی است یک‌ریختی $\varphi: Sa/(B \cap Sa) \rightarrow S \cdot (a/B)$ که هر $sa/(B \cap Sa) \in S \cdot (a/B)$ را به $S \cdot a/B \in S \cdot (a/B)$ می‌نگارد را در نظر بگیریم، و داریم:

$$Sa/(B \cap Sa) = (Sa/Da)/((B \cap Sa)/Da) \in \mathbb{R}_r$$

پس $S \cdot (a/B) \in \mathbb{R}_r$. اکنون با استفاده از تذکر ۱،۱ داریم $[B]_{r(A/B)} \subseteq S \cdot (a/B)$ ، یعنی برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ داریم $Sa \subseteq \pi^{-1}([B]_{r(A/B)})$ در نتیجه، $Sa \subseteq c_A^r(B) = B$ که تناقض است. به دلیل نقش مهمی که ایده‌آل چپ r -چگال در تعریف و مطالعه زیرکنش‌های dli -خالص دارند، بررسی ویژگی‌های ایده‌آل‌های چپ r -چگال دارای اهمیت است. در ادامه، به بررسی برخی از ویژگی‌هایی که ایده‌آل‌های چپ r -چگال از S را به طور دقیق مشخص می‌کنند، می‌پردازیم؛ اما ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که هر همنهشتی ω روی S یک رابطه $\omega = \{(sa, ta) \mid (s, t) \in \omega \text{ و } a \in A\}$ روی S -کنش A معرفی می‌کند. به وضوح این رابطه انعکاسی، تقارنی و سازگار با کنش A است؛ ولی ممکن است انتقالی نباشد. به همین دلیل، همنهشتی تولید شده توسط $A \cdot \omega$ ، یعنی $\theta(\omega, A)$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲.۸. فرض کنید r رادیکالی هونکه و ω ، همنهشتی روی S باشد. در این صورت داریم:

$$r\left(\frac{S}{\omega}\right) = \left\{ \left(\frac{S}{\omega}, \frac{t}{\omega}\right) \in \frac{S}{\omega} \times \frac{S}{\omega} \mid sa = ta, \omega a = \Delta_{Sa} \text{ با } a \in A \text{ و هر } A \in S_r \right\}$$

برهان. اگر طرف راست تساوی بالا را X بنامیم، آن‌گاه برای عضو $(1/\omega)/r(S/\omega)$ از S -کنش r -نیمه‌ساده $(S/\omega)/r(S/\omega)$ داریم: $((1/\omega)/r(S/\omega)) = \Delta_{S/\omega}$. بنابراین، برای هر عضو $(s/\omega, t/\omega)$ از X داریم: $(s/\omega)/r(S/\omega) = (t/\omega)/r(S/\omega)$ ، یعنی $s(1/\omega)/r(S/\omega) = t(1/\omega)/r(S/\omega)$. پس $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$ در نتیجه، $X \subseteq r(S/\omega)$ حال فرض کنیم $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$. همچنین فرض کنیم که S -کنش r -نیمه‌ساده A و $a \in A$ به گونه‌ای موجود باشند که $\omega A = \Delta_{Sa}$. نشان می‌دهیم $sa = ta$. به این منظور، هم‌ریختی $f_a: S/\omega \rightarrow A$ با تعریف $f_a(s/\omega) = sa$ را در نظر می‌گیریم. از ویژگی اول، تعریف رادیکال هونکه داریم: $(sa, ta) \in r(A)$ ؛ اما r -نیمه‌ساده است. از این‌رو، $sa = ta$.

اگر ω همنهشتی ریس تولید شده به وسیله ایده‌آل چپی از S باشد، آن‌گاه قضیه بالا می‌تواند نتایج بیشتری به دست دهد. نتیجه زیر را ببینید.

نتیجه ۲.۹. (۱) فرض کنید r رادیکالی هونکه و D ایده‌آل چپی از S باشد. در این صورت داریم:

$$r\left(\frac{S}{D}\right) = \left\{ \left(\frac{s}{D}, \frac{t}{D}\right) \in \frac{S}{D} \times \frac{S}{D} \mid sa = ta, |Da| = 1 \text{ با } a \in A \text{ و } A \in S_r \right\}$$

(۲) فرض کنید r رادیکالی هونکه، $A \in S_r$ و ω همنهشتی تولید شده به وسیله $\{(s_i, t_i)\}_{i \in I}$ روی S باشد به گونه‌ای که $S/\omega \in \mathbb{R}_r$. در این صورت $a \in A$ جوابی برای $\Sigma = \{s_i x = t_i x\}_{i \in I}$ است، اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم: $sa = ta$.

(۳) فرض کنید r رادیکال هونکه و $\Sigma = \{s_i x = b\}_{i \in I}$ دستگاهی از معادلات روی S -کنش r -نیمه ساده A باشد، به گونه‌ای که D ، ایده‌آل چپ تولید شده به وسیله ضرایب Σ ، r -چگال و همنهشتی تولید شده به وسیله مجموعه ضرایب Σ برابر با ρ_D باشد. در این صورت Σ دارای جواب در $A \in S_r$ است، اگر و تنها اگر b یک عنصر صفر و تنها جواب دستگاه Σ در A باشد.

برهان. (۱) برای اثبات، کافی است در قضیه ۸،۲، ω را همنهشتی ریس تولید شده توسط ایده‌آل D در نظر بگیریم.
(۲) حکم به راحتی از این حقیقت اثبات شده در قضیه ۸،۲ نتیجه می‌شود که $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$ ، اگر و تنها اگر برای هر $a \in A \in S_r$ ، $\omega.a = \Delta_{S,a}$ نتیجه دهد $sa = ta$.
(۳) این قسمت به سادگی از ترکیب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۱۰. گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) D ایده‌آل چپ r -چگالی از S است.
(۲) اگر $A \in S_r$ و $a, b \in A$ با این ویژگی باشند که $Da = \{b\}$ ، آن‌گاه b عنصر صفری از A است و $Sa = \{b\}$.
(۳) اگر $A \in S_r$ و $a, b \in A$ با این ویژگی باشند که $Da = \{b\}$ ، آن‌گاه $a = b$ و b عنصر صفری از S -کنش A است.

برهان. (۱) $\Rightarrow$ (۲) اگر $A \in S_r$ ، $a, b \in A$ و $Da = \{b\}$ ، آن‌گاه $|Da| = 1$. با استفاده از قسمت اول نتیجه ۹،۲، از r -چگال بودن D نتیجه می‌گیریم که برای هر $s, t \in S$ ، $sa = ta$. بنابراین داریم: $Sa = \{b\}$. از طرفی برای هر $s \in S$ و $d \in D$ داریم: $sb = sda = b$. یعنی b عنصر صفری از S -کنش A است.
(۲) $\Rightarrow$ (۳) بدیهی است.

(۱) $\Rightarrow$ (۳) فرض کنید $(s/D, t/D) \in \nabla_{S/D}$. در این صورت چون هر عنصر a با این ویژگی که $|Da| = 1$ از S -کنش r -نیمه ساده A برابر صفر است، پس $a = sa = ta$. از این رو با استفاده از قسمت (۱) از نتیجه ۹،۲ داریم: $(s/D, t/D) \in r(S/D)$. در نتیجه $\nabla_{S/D} \leq r(S/D)$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۲.۱۱. فرض کنید r رادیکالی هونکه و $\Sigma = \{s_i x = b\}_{i \in I}$ دستگاه معادلات معرفی شده در قسمت (۳) نتیجه ۲.۹ باشد. در این صورت اگر Σ دارای جوابی در A باشد، آن‌گاه $b/r(A)$ زیرکنش dli -خالصی از A خواهد بود که شامل همه جواب‌های Σ در A است.

برهان. فرض کنید a جوابی از $\{s_i x = b\}_{i \in I}$ باشد. در این صورت $a/r(A)$ جوابی از دستگاه $\{s_i x = b/r(A)\}_{i \in I}$ در $A/r(A)$ است. بنابراین، با استفاده از قسمت (۳) از نتیجه ۹،۲، $b/r(A)$ عنصر صفری از $A/r(A)$ است و $b/r(A) = a/r(A)$ زیرکنشی از A است. برای اثبات dli خالص بودن $b/r(A)$ در A ، فرض کنید D ایده‌آل چپ $-r$ چگالی از S باشد و برای $a \in A$ داشته باشیم: $Da \leq b/r(A)$. در این صورت $D.(a/r(A)) = \{b/r(A)\}$. بنابراین با استفاده از قسمت (۳) نتیجه ۹،۲ داریم: $a/r(A) = b/r(A)$ ، یعنی $a \in b/r(A)$. در نتیجه $b/r(A)$ در A ، dli خالص است.

قضیه ۲.۱۲. فرض کنید B زیرکنشی از S -کنش A باشد و $a \in A$. در این صورت اگر ایده‌آل چپ $-r$ چگال D از S و $b \in B$ چنان وجود داشته باشند که $Db = Da$ ، آن‌گاه $a \in c_A^r(B)$.

برهان. فرض کنید D ایده‌آل چپ $-r$ چگال از S باشد، به گونه‌ای که برای $a \in A$ و $b \in B$ داشته باشیم که $Da = Db$. در این صورت، بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت تصویر هم‌ریختی‌ها نتیجه می‌دهد که تصویر S/D تحت هم‌ریختی $f: S/D \rightarrow A/B$ ، با تعریف $f(s/D) = sa/B$ ، یک S -کنش $-r$ رادیکال است. یعنی $f(S/D) \in \mathbb{R}_r$. لازم به ذکر است که چون $Da = Db$ ، خوش تعریف است. همچنین داریم $f((s_1 s_2)/D) = (s_1 s_2)a/B = s_1 f(s_2/D)$ ، یعنی f هم‌ریختی است. بنابراین، با استفاده از تذکر (i)، $1, 1$ ، یک $r(A/B)$ -رده X چنان وجود دارد که $S.(a/B) \leq X$. اما $Da \leq Sa$ و $Db \leq B$. پس تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ یک زیرکنش بدیهی از $S.(a/B)$ است. بنابراین، $X \cap [B]_{r(A/B)} \neq \emptyset$. از این رو، چون X و $a/B \in [B]_{r(A/B)}$ ، $r(A/B)$ -رده‌هایی با اشتراک ناتهی هستند، پس $X = [B]_{r(A/B)}$. در نتیجه، $a/B \in [B]_{r(A/B)}$ ، یعنی $a \in c_A^r(B)$.

۳. S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف و S -کنش‌های به طور مطلق dli - خالص

در این بخش S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف و به طور مطلق dli - خالص را بررسی می‌کنیم. در واقع در این بخش نشان می‌دهیم که S -کنش‌های به طور مطلق dli - خالص همان S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف هستند.

۳.۱. S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف.

تعریف ۳.۱. برای رادیکال داده شده r ، S -کنش A را r -انژکتیو ضعیف می‌نامیم، اگر دارای ویژگی انژکتیو نسبت به همه نشاننده‌ها از ایده‌آل‌های چپ $-r$ چگال به S باشد.

ابتدا مشابه لم ۲،۳،۵ از [19] درباره S -کنش‌های انژکتیو ضعیف و گزاره ۲،۲ از [۱۵] درباره S -کنش‌های α -انژکتیو، تذکر زیر را که به راحتی از تعریف به دست می‌آید درباره S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف ارائه می‌کنیم.

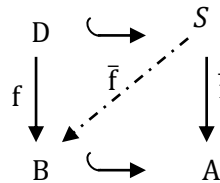
تذکر ۳.۲. S -کنش A ، r -انژکتیو ضعیف است، اگر و تنها اگر برای هر هم‌ریختی $f: D \rightarrow A$ که در آن D ایده‌آل چپ $-r$ چگال از S است، عنصری مانند $a \in A$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$ داشته باشیم $f(d) = da$. واقع، کافی است برای تعریف گسترش هم‌ریختی $f: S \rightarrow A$ ، $\bar{f}(1) = a$ قرار دهیم.

قضیه ۳.۳. برای رادیکال داده شده r ، هر S - کنش r - انژکتیو ضعیف در هر گسترش dli - خالص است.

برهان. فرض کنید B زیرکنش r -انژکتیوی ضعیف از S -کنش A و D ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. همچنین فرض کنید a عنصری دلخواه از A با این ویژگی باشد که $Da \leq B$. در این صورت چون B, r -انژکتیو ضعیف است، پس با استفاده از تذکر بالا، برای هم‌ریختی $f: D \rightarrow B$ با تعریف $f(d) = da$ ، عنصر $b \in B$ با ویژگی $f(d) = db$ برای هر $d \in D$ وجود دارد. بنابراین برای هر $d \in D$ ، $db = da$.

قضیه ۳.۴. فرض کنید A یک S -کنش r -انژکتیو ضعیف باشد. در این صورت هر زیرکنش dli -خالص از A, r -انژکتیو ضعیف است.

برهان. فرض کنید $f: D \rightarrow B$ هم‌ریختی‌ای از ایده‌آل r -چگال D به زیرکنش dli -خالص B از S -کنش A باشد. وجود هم‌ریختی $\bar{f}: S \rightarrow A$ با توانایی جابه‌جا کردن مربع زیر از r -انژکتیو ضعیف بودن A نتیجه می‌شود.

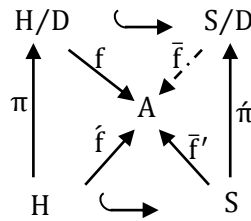


بنابراین، برای هر $d \in D$ ، داریم $f(d) = d\bar{f}(1)$ و $D\bar{f}(1) \leq B$. در نتیجه، چون B زیرکنش dli -خالص از A است، پس $b \in B$ چنان موجود است که برای هر $d \in D$ ، $f(d) = d\bar{f}(1) = db$. حال می‌توانیم گسترش $\bar{f}: S \rightarrow B$ از f را به وسیله $\bar{f}(s) = sb$ ، برای هر $s \in S$ ، تعریف کنیم. به وضوح $\bar{f}$ مثلث بالایی را در مربع بالا جابه‌جا می‌کند و این یعنی B, r -انژکتیو ضعیف است.

نتیجه ۳.۵. هر زیرکنش r -بسته از یک S -کنش r -انژکتیو ضعیف، r -انژکتیو ضعیف است.

قضیه ۳.۶. اگر S -کنش A, r -انژکتیو ضعیف باشد، آنگاه A نسبت به همه نگاشت‌های شمول به S/D انژکتیو است که در آن D ایده‌آل چپ r -چگال دلخواه است.

برهان. با استفاده از قضیه تناظر، هر زیرکنش از S/D به صورت H/D است که در آن H زیرکنشی از S و شامل D است. بنابراین چون D در S, r -چگال است و H شامل D است، H نیز در S, r -چگال است و بنابراین، هر زیرکنش H/D از S/D که به شکل K/D است که $D \leq K \leq S$ ، در $S/D, r$ -چگال است. حال فرض کنید $f: H/D \rightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد. در این صورت هم‌ریختی $\bar{f} = f \circ \pi: H \rightarrow A$ را خواهیم داشت که در آن $\pi: H \rightarrow H/D$ هم‌ریختی کانونی است. در نتیجه، با استفاده از فرض، گسترش $\bar{f}: S \rightarrow A$ از $\bar{f}|_H$ با ویژگی $\bar{f}|_H = \bar{f} \circ \pi$ وجود دارد. پس داریم $\rho D \leq \ker f \leq \ker(f \circ \pi) = \ker(\bar{f})$. اکنون با استفاده از قضیه هم‌ریختی برای S -کنش‌ها، هم‌ریختی $\bar{f}: S/D \rightarrow A$ را با تعریف $\bar{f}(s/D) = \bar{f}(s)$ ، برای هر $s/D \in S/D$ ، تعریف می‌کنیم و برای هر $h \in H$ داریم: $\bar{f}(h/H) = \bar{f}(h) = f \circ \pi(h) = f(h/D)$ و این حکم را ثابت می‌کند. نمودار زیر، روند اثبات را به روشنی مشخص می‌کند.



۳.۲. S - کنش‌های به طور مطلق dli - خالص

در ادامه، مفهوم S-کنش به طور مطلق dli - خالص را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم به طور مطلق dli - خالص بودن با r -انژکتیوی ضعیف بودن معادل است. همچنین شرایطی را که تحت آنها همه S-کنش‌ها به طور مطلق dli - خالص هستند را معین می‌کنیم.

تعریف ۳.۷. برای رادیکال هونکه داده شده r ، S-کنش A را به طور مطلق dli - خالص می‌نامیم، هرگاه A در هر گسترش از خود dli - خالص باشد.

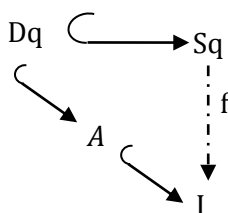
ما در [۱۸] نشان داده‌ایم که برای هر رادیکال هونکه r و هر S-کنش A ، غلاف r -انژکتیو، $E_r(A)$ ، وجود دارد. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که به کمک غلاف‌های r -انژکتیو می‌توان S-کنش‌های به طور مطلق dli - خالص را مشخص کرد.

قضیه ۳.۸. برای هر S-کنش A گزاره‌های زیر معادلند:

- (۱) A به طور مطلق dli - خالص است.
- (۲) A در هر گسترش r -انژکتیو از خود dli - خالص است.
- (۳) A در گسترش غلاف r -انژکتیو خود، $E_r(A)$ ، dli - خالص است.
- (۴) A ، S-کنش r -انژکتیو ضعیف است.
- (۵) A در گسترش r -انژکتیو از خود dli - خالص است.

برهان. به وضوح استلزام‌های $(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳)$ برقرار هستند. همچنین $(۳) \Rightarrow (۴)$ و $(۴) \Rightarrow (۵)$ ، به ترتیب، از قضایای ۳.۳ و ۳.۴ نتیجه می‌شوند.

برای اثبات $(۵) \Rightarrow (۱)$ ، فرض کنید A در گسترش r -انژکتیو، مثلاً I ، dli - خالص و Q گسترشی از S-کنش A و D ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. همچنین فرض کنید برای $q \in Q$ داشته باشیم $Dq \leq A$. در این صورت با توجه به بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی‌ها، Dq در Sq ، r -چگال است. بنابراین هم‌ریختی $f: Sq \rightarrow I$ وجود دارد که مثلث زیر را جابه‌جا می‌کند.



به علاوه، $Df(q) = f(Dq) = Dq \leq A$. پس به دلیل dli - خالص بودن A در I ، عنصری مانند a در A چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ ، $df(q) = da$. اما برای هر $d \in D$ داریم: $df(q) = f(dq) = dq$. بنابراین، برای هر $d \in D$ ، $dq = da$ و این یعنی A در Q ، dli - خالص است.

قضیه ۳.۹. هر زیرکنش dli - خالص از S - کنش به طور مطلق dli - خالص، S - کنشی بطور مطلق dli - خالص است.

برهان. برای اثبات، از قضیه ۸.۳ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر زیرکنش dli - خالص B از S - کنش به طور مطلق dli - خالص A ، در گسترش غلاف r - انژکتیو $E_r(B)$ ، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید $a \in E_r(B)$ و ایده‌آل چپ r - چگالی از S باشد، به گونه‌ای که $Da \leq B$. در این صورت چون $B \leq A$ ، پس داریم $Da \leq A$. بنابراین، dli - خالص بودن A در $E_r(A)$ وجود $\hat{a} \in A$ با ویژگی $da = d\hat{a}$ ، برای هر $d \in D$ را تضمین می‌کند. پس داریم $D\hat{a} = Da \leq B$. حال با استفاده از dli - خالص بودن B در A می‌توانیم وجود $b \in B$ را با ویژگی $db = d\hat{a} = da$ برای هر $d \in D$ را نتیجه بگیریم. پس B در $E_r(B)$ ، dli - خالص است و این، همان چیزی است که به دنبالش بودیم.

قضیه ۲.۷. به همراه قضیه بالا، نتیجه زیر را به ما می‌دهد.

نتیجه ۳.۱۰. هر زیرکنش r - بسته از یک S - کنش به طور مطلق dli - خالص، به طور مطلق dli - خالص است.

قضیه ۳.۱۱. گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) تکواره S به طور مطلق dli - خالص است؛ یعنی هر S - کنش دلخواه به طور مطلق dli - خالص است.

(۲) هر S - کنش در هر گسترش r - انژکتیو از خود، dli - خالص است.

(۳) هر S - کنش در گسترش غلاف r - انژکتیو خود، dli - خالص است.

(۴) هر S - کنش، r - انژکتیو ضعیف است.

(۵) هر S - کنش در گسترش r - انژکتیو از خود، dli - خالص است.

(۶) هر ایده‌آل چپ r - چگال S در S ، dli - خالص است.

(۷) هر ایده‌آل چپ r - چگال D از S دارای همانی راست e_D است.

(۸) هر ایده‌آل چپ r - چگال از S توسط عنصری خودتوان تولید می‌شود.

برهان. استلزام‌های $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ ، به سرعت از قضیه ۸.۳ نتیجه می‌شوند. همچنین $(1) \Rightarrow (6)$ بدیهی است. $(6) \Rightarrow (7)$ فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r - چگال از S باشد. در این صورت به وضوح داریم $D \cdot 1 \leq D$. بنابراین، با استفاده از فرض، عنصر $e_D \in D$ با ویژگی $d = d \cdot 1 = de_D$ ، برای هر $d \in D$ وجود دارد؛ یعنی D شامل همانی راستی مانند e_D است.

$(7) \Rightarrow (3)$ برای اثبات، فرض می‌کنیم A یک S - کنش دلخواه باشد و نشان می‌دهیم A در $E_r(A)$ ، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r - چگال باشد و برای $z \in E_r(A)$ داشته باشیم $Dz \leq A$. در این صورت برای هر $d \in D$ داریم $d(e_D z) = (de_D)z = dz$ و $e_D z$ متعلق به A است. بنابراین، A در $E_r(A)$ ، dli - خالص است.

$(۴) \Rightarrow (۸)$ فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. در این صورت، بنا به فرض، نگاشت همانی $id_D: D \rightarrow D$ می‌تواند به هم‌ریختی $f: S \rightarrow D$ گسترش یابد. پس (۱) f عنصری خودتوان است و برای هر $d \in D$ داریم $d = df(۱)$. در نتیجه، D توسط $f(۱)$ تولید می‌شود. $(۸) \Rightarrow (۴)$ فرض کنید A یک S -کنش $f: D \rightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد که در آن D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S است. در این صورت بنا به فرض، D دارای مولد خودتوانی مانند e_D است. به و ضوح هم‌ریختی $\hat{f}: S \rightarrow A$ با ضابطه $\hat{f}(s) = sf(e_D)$ گسترشی از f توسط نگاشت شمول $l: D \rightarrow S$ است و این یعنی A ، r -انژکتیو است.

۴. بستار یک زیرکنش به وسیله یک ایده‌آل چپ r -چگال

فرض کنید D ایده‌آل چپ r -چگالی باشد و B زیرکنشی از S -کنش A ، به دلیل نقش مهم عناصر $a \in A$ با ویژگی $Da \leq B$ ، در dli خالص بودن B در A (تعریف ۱،۲ را ببینید) علاقه به بررسی بستار $\bar{B} = \{a \in A | Da \leq B\}$ از B امری طبیعی است؛ اما گاهی مجموعه $\bar{B}$ زیرکنشی از A نیست. بنابراین، زیرکنش تولید شده به وسیله $\bar{B}$ را به عنوان بستار B در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $c_A^D(B) := \{a \in A | Da \leq B\}$.

تذکر ۴.۱. اگر D یک ایده‌آل r -چگال از S باشد، آن‌گاه برای هر زیرکنش B از S -کنش A داریم $c_A^D(B) = \{a \in A | Da \leq B\}$ بخش ۲ از [۹] را ببینید. در ادامه نشان می‌دهیم c^D ، یک عملگر بستار است و ارتباط بین c^D و S -کنش‌های dli خالص را می‌یابیم. همچنین تعمیمی از مفهوم انژکتیو دنباله‌وار ([۱۲] را ببینید)، یعنی c^D -انژکتیو، ارائه می‌دهیم و خوش‌رفتاری c^D -انژکتیوی را به سادگی به عنوان نتیجه‌ای ساده از این مقاله نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید D ایده‌آل چپ r -چگالی از S باشد. خانواده $c = (c_A^D)_{A \in S-Act}$ که در آن هر c_A^D به صورت $c_A^D(B) = \{a \in A | Da \leq B\}$ برای هر زیرکنش B از A ، تعریف می‌شود، عملگر بستاری در رسته $S-Act$ است.

برهان. به وضوح c_A^D ویژگی‌های گسترش و یک‌نواپی را داراست. برای اثبات ویژگی پیوستگی، فرض کنید $f: A \rightarrow X$ یک هم‌ریختی باشد و $f(b) \in c_A^D(B)$ در این صورت $a \in A$ به گونه‌ای وجود دارد که $Da \leq B$ و $sa = b$ برای $s \in S$. بنابراین، داریم $Df(a) \leq f(B)$ یعنی $f(a) \in \{x \in X | Dx \leq f(B)\}$ پس $f(b) = sf(a) \in f(B)$ در نتیجه، $c_X^D(f(B))$ دارای ویژگی پیوستگی است. حال می‌توانیم با استفاده از قضیه ۱۲.۲ نتیجه زیر را به دست آوریم.

نتیجه ۴.۳. برای هر زیرکنش dli -خالص B از S -کنش A ، داریم: $\cup_D c_A^D(B) \leq c_A^r(B)$.

در قضیه زیر، رابطه بین به طور مطلق dli -خالص بودن S و عملگر بستار c^D ، در شرایطی که هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل است را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. فرض کنید هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل باشد. در این صورت هر S -کنش، به طور مطلق dli -خالص است، اگر و تنها اگر برای هر گسترش A از یک S -کنش B و هر ایده‌آل r -چگال D از S ، B در رسته D -کنش‌ها درون‌بر $c_A^D(B)$ باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) بنا به فرض به ازای هر $b_x \in B$ ، $x \in c_A^D(B)$ چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ داریم $dx = db_x$. اکنون نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم.

$$f: c_A^D(B) \rightarrow B \\ x \mapsto \begin{cases} b_x & x \in c_A^D(B)/B \\ x & x \in B \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که چون $c_A^D(B)/B$ و B مجزا هستند، f خوش تعریف است. همچنین چون برای هر $x \in c_A^D(B)$ و هر $d \in D$ داریم $dx = db_x \in B$ پس $f(dx) = f(db_x) = db_x = df(x)$ و اگر $x \in c_A^D(B)/B$ و $f(dx) = db_x = dx = df(x)$ پس $f(dx) = f(db_x) = db_x = df(x)$ و $x \in c_A^D(B)/B$ اگر $f(dx) = db_x = dx = df(x)$ همچنین $f|_B$ نگاشت همانی است. در نتیجه، f یک درون‌بری است.

($\Rightarrow$) فرض کنید H و D ایده‌آل‌های r -چگالی از S باشند و $f: c_S^H(D) \rightarrow D$ یک درون‌بری باشد. در این صورت با استفاده از قضیه ۳.۱۱، برای هر ایده‌آل r -چگال D از S کافی است نشان دهیم D در S ، dli -خالص است. اگر برای هر $S \in S$ داشته باشیم $HS \leq D$ ، آن‌گاه برای هر $h \in H$ داریم $hf(s) = f(hs) = hs$ یعنی D در S ، dli -خالص است. در نتیجه، با استفاده از قضیه ۳.۱۱ هر S -کنش به طور مطلق di -خالص است.

لم ۴.۵. فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از S -کنش A باشد به گونه‌ای که $Sb \cap Sb \neq \emptyset$ و $Sb \in \mathbb{R}_r$ ، برای هر $b, \hat{b} \in B$ در این صورت اگر $\bigcup_{b \in B} Sb = A$ ، آن‌گاه $A \in \mathbb{R}_r$.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر $b \in B$ ، $X \in \sum_{r(A)}$ چنان وجود دارد که $Sb \leq X$ و در نتیجه، $X = A$. چون $Sb \in \mathbb{R}_r$ ، پس تذکر ۱.۱ وجود $X_b \in \sum_{r(A)}$ با این ویژگی که $Sb \leq X_b$ را نتیجه می‌دهد. اما اعضای $\sum_{r(A)}$ از هم مجزا هستند و برای هر $b, \hat{b} \in A$ داریم $Sb \cap Sb \neq \emptyset$. بنابراین برای هر $b, \hat{b} \in B$ داریم $X_b = X_{\hat{b}}$. پس $A = \bigcup_{b \in B} Sb = X_b$ یعنی A ، S -کنشی r -رادیکال است.

قضیه ۴.۶. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش r -رادیکال از S -کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل چپ r -چگال D از S ، $c_A^D(B)$ زیرکنشی r -رادیکال از A است.

برهان. فرض کنید a عنصری از S -کنش A با ویژگی $Da \leq B$ باشد. در این صورت چون D ایده‌آل چپ r -چگالی از S است، پس داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$. بنابراین، با توجه به بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت تصویر هم‌ریخت، Sa/Da و در نتیجه، $(a/B) \cong S/(Sa \cap B) \cong Sa/(Sa \cap B)$ عضو $\mathbb{R}_r$ هستند. همچنین اگر $\acute{a} \in A$ و $D\acute{a} \leq B$ ، آن‌گاه تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B) \rightarrow c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $c_A^D(B)/B$ و مشمول در $S.(a/B) \cap S.(\acute{a}/B)$ است. پس با استفاده از لم ۴.۵ داریم $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$. اما $\mathbb{R}_r$ تحت گسترش هم‌نهشتی‌های ریس بسته است و $B \in \mathbb{R}_r$. بنابراین $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۴.۷. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش dli -خالص از S -کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل چپ r -چگال D از S ، زیرکنش B در $c_A^D(B)$ ، r -چگال است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم $r(c_A^D(B)/B) = \nabla_{c_A^D(B)/B}$. فرض کنید $x/B \in c_A^D(B)/B$ در این صورت با استفاده از تعریف $c_A^D(B)$ ، عنصر s از S و $a \in A$ با ویژگی $Da \leq B$ چنان وجود دارد که $x = sa$. حال چون B زیرکنشی dli -خالص از A است، پس $b \in B$ چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ ، $db = da$. بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی نتیجه می‌دهد که $S.(a/B) \in \mathbb{R}_r$. بنابراین $X_x \in \sum r(c_A^D(B)/B)$ چنان وجود دارد که $x/B \in S.(a/B) \leq X_x$ اما تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B) \rightarrow c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $S.(a/B)$ است و $\sum r(c_A^D(B)/B)$ متشکل از زیرکنش‌های مجزای $c_A^D(B)/B$ است. بنابراین همه X_x ها با هم برابرند. در نتیجه، $r(c_A^D(B)/B) = \nabla_{c_A^D(B)/B}$.

تعریف ۴.۸. S -کنش Q را c^D - انژکتیو می‌نامیم، هرگاه نسبت به c^D - تکریمتی‌ها انژکتیو باشد.

نتیجه ۴.۳. هر زیرکنش r - بسته از یک S -کنش به طور مطلق dli -خالص، به طور مطلق dli -خالص است.

تذکر ۴.۹. با استفاده از واژه‌گزینی بنشافسکی در [۱۰، ۱۱] انژکتیوی نسبت به یک رده M از تکریمتی‌ها در یک رشته را خوش رفتار می‌نامیم، هرگاه در قضایای خوش رفتاری صدق کند. ما در [۱۸] نشان داده‌ایم که برای رادیکال هونکه r اگر M رده r - تکریمتی‌ها باشد، آن‌گاه M - انژکتیوی خوش رفتار است. در ادامه، نشان خواهیم داد که برای هر ایده‌آل r - چگال و خودتوان D رده زیرکنش‌های c^D - چگال یک رادیکال کورش-آمیتر را تولید می‌کند. در نتیجه، c^D - انژکتیوی، برای هر ایده‌آل r - چگال و خودتوان D ، خوش رفتار است.

قضیه ۴.۱۰. برای هر ایده‌آل t - چگال D از S با ویژگی $D = D^2$ بستر رده

$$\{B \text{ زیر کنشی } c^D - \text{چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \text{ تحت یکریمتی، یعنی } \\ C = I(\{A/B \text{ باشد} \mid A/B \text{ چگال از } c^D - \text{چگال از } A \text{ باشد})\} \\ \text{رده رادیکال از یک رادیکال کورش - آمیتر است.}$$

برهان. برای اثبات، از قضیه ۲.۴ از [۲۴] استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم C تحت (۱) تصویر هم‌ریخت‌ها، (۲) گسترش هم‌نهشتی‌های ریس و (۳) ویژگی استقرایی، بسته است.

(۱) فرض کنید B زیرکنش c^D - چگال از یک S -کنش A و $f: A/B \rightarrow C$ هم‌ریختی‌ای پوشا باشد. در این صورت چون f پوشاست، پس برای هر $a \in A$ ، $c \in C$ چنان وجود دارد که $f(a/B) = c$. همچنین چون B در A ، c^D - چگال است، پس $\hat{a} \in A$ و $s \in S$ چنان وجود دارد که $s\hat{a} = a$ و $D\hat{a} \leq B$. بنابراین، برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ داریم $sf(\hat{a}/B) = f(a/B) = c$ و $Df(\hat{a}/B) \leq f(\pi(B))$. در نتیجه، $f(\pi(B))$ در S -کنش C ، c^D - چگال است. حال چون B تحت π به عضو صفر A/B نگاشته می‌شود و هم‌ریختی‌ها، صفر را به صفر می‌برند، لذا $f(\pi(B))$ در C زیرکنش تک عضوی صفر است و اگر هر کنش را به هم‌ریختی صفر تقسیم کنیم، باز هم با خودش یکریمت می‌شود، داریم $C \cong C/f(\pi(B))$ ، پس $C \in \mathbb{C}$.

(۲) فرض کنید A یک S -کنش و ρ هم‌نهشتی ریزی روی A به گونه‌ای باشد که $\rho \leq C$ و $A/\rho \in C$ در این صورت تصویر $\rho \in \sum B$ تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/\rho$ عنصر صفری از A/ρ است؛ اما با استفاده از تذکر ۴.۱ و تعریف رده C ، به راحتی می‌توان نشان داد که هر عضو C از C دقیقاً یک عنصر صفر θ_C دارد و برای هر

$c \in C$ داریم $Dc = \{\theta_c\}$. بنابراین $|\sum \rho| \leq 1$ در حالت $\sum \rho = \theta$ حکم بدیهی است. پس فرض می‌کنیم $|\sum \rho| = 1$. در این حالت از این حقیقت که $A/\rho \in C$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که زیرکنش $B \in \sum \rho$ در $A - c^D$ چگال است. پس برای هر $a \in A$ داریم $Da \leq B$. در نتیجه چون $B \in C$ ، پس عنصر θ در B چنان موجود است که به ازای هر $d \in D$ ، $Dda = \{\theta\}$. بنابراین با استفاده از فرض داریم $Da = D^\perp a = \{\theta\}$ یعنی $A \in C$ و در نتیجه، C تحت گسترش همنهشتی‌های ریس بسته است.

(۳) فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر صعودی در C باشد. در این صورت برای هر $i \in I$ ، عنصری مانند θ_i در A_i چنان موجود است که برای هر $a \in A_i$ ، $Da = \{\theta_i\}$. چون $\{A_i\}_{i \in I}$ زنجیری صعودی است، پس برای هر $i \in I$ داریم $\theta_i = \theta_1$. از این رو برای هر $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ داریم $a \in \bigcup_{i \in I} A_i / \theta_1 \in C$.

در قسمت اول برهان قضیه ۴.۱۰ حکم قوی‌تری را ثابت کرده‌ایم. درحقیقت این قسمت از برهان حتی اگر ایده‌آل چپ D ایده‌آل یا خودتوان نباشد نیز، صحیح است. بنابراین قضیه زیر به سادگی از قسمت اول برهان قضیه ۱۰.۴ به دست می‌آید.

قضیه ۴.۱۱. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. در این صورت بستار $C = I \left(\{B\} \text{ زیرکنشی } c^D - \text{چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \text{ تحت یکریختی، یعنی} - \text{چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \right)$ $C = I \left(\{B\} \text{ زیرکنشی } c^D \text{ یک زیررده از رده رادیکال } \mathbb{R}_r \text{ است. گذشته از این، هر زیرکنش } c^D - \text{چگال از یک } S\text{-کنش } A \text{ در آن } r\text{-چگال است.} \right)$

برهان. با استفاده از برهان ۴.۱۰ رده C تحت تصویر همریخت بسته است. همچنین $C \cap S_r$ از S -کنش‌های بدیهی تشکیل شده است. در واقع اگر $X \in C \cap S_r$ ، آن‌گاه یکریختی $f: A/B \rightarrow X$ که در آن B زیرکنش c^D -چگالی از A است، وجود دارد. بنابراین وقتی که $\pi: A \rightarrow A/B$ همریختی کانونی باشد، $f(\pi(B))$ زیرکنش c^D -چگال از X خواهد بود. لذا از تعریف عملگر بستار c^D می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عنصر a از X ، $\acute{a} \in X$ و $\acute{a} \in S$ چنان وجود دارد که $s\acute{a} = a$ و $D\acute{a} = f(\pi(B))$. پس با استفاده از قضیه ۲.۱۰، $a = \acute{a} = f(\pi(B))$ عنصر صفری از X است. در نتیجه، S -کنش X بدیهی است. حال با استفاده از قضیه ۳.۲ از [۲۴] داریم $C \leq \mathbb{R}_r$. بنابراین چون برای هر زیرکنش c^D -چگال B از یک S -کنش A داریم $A/B \in C$ پس $A/B \in \mathbb{R}_r$. یعنی هر زیرکنش c^D -چگال از A در آن r -چگال است و این، همان حکم است.

نتیجه ۴.۱۲. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D ایده‌آل r -چگالی از S با ویژگی $D = D^\perp$ باشد. در این صورت:

$$(۱) C \subseteq \mathbb{R}_r$$

(۲) هر S -کنش r -انژکتیو، c^D -انژکتیو است.

برهان. (۱) واضح است.

(۲) بنا به قضیه بالا، چون هر زیرکنش c^D -چگال از S -کنشی مانند A ، در $A - r$ چگال است، S -کنش‌های r -انژکتیو نسبت به c^D -تکریختی‌ها انژکتیو هستند.

References

1. B. Banaschewski. *Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras*. In Proc. Conf. on Universal Algebra (Queen's Univ., Kingston, Ont., 1969), pages 131-147. Queen's Univ., Kingston, Ont., 1970.
2. B. Banaschewski. *Equational compactness of G-sets*. Canad. Math. Bull., 17:11-18, 1974.
3. B. Banaschewski and E. Nelson. *Equational compactness in equational classes of algebras*. Algebra Universalis, 2:152-165, 1972.
4. H. Barzegar. *Sequentially pure injectivity*. Quaest. Math., 38(2):191-201, 2015.
5. H. Barzegar and M.M. Ebrahimi. *Sequentially pure monomorphisms of acts over semigroups*. Eur. J. Pure Appl. Math., 1(4):41-55, 2008.
6. H. Barzegar, M.M. Ebrahimi, and M. Mahmoudi. *Essentiality and injectivity relative to sequential purity of acts*. Semigroup Forum, 79(1):128-144, 2009.
7. P.M. Cohn. *On the free product of associative rings*. Math. Z., 71:380-398, 1959.
8. D. Dikranjan and W. Tholen. *Categorical structure of closure operators, volume 346 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. With applications to topology, algebra and discrete mathematics*.
9. M.M. Ebrahimi. *On ideal closure operators of M-sets*. Southeast Asian Bull. Math., 30(3):439-444, 2006.
10. M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. *Injectivity in a category: an overview on well behavior theorems*. Algebras Groups Geom., 26(4):451-471, 2009.
11. M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. *Injectivity in a category: an overview on smallness conditions*. Categ. General Alg. Struct. Appl., 2(1):83-112, 2014.
12. M.M. Ebrahimi, M. Mahmoudi, and L. Shahbaz. *Proper behaviour of sequential injectivity of acts over semigroups*. Comm. Algebra, 37(7):2511-2521, 2009.
13. S. Gacsályi. *On pure subgroups and direct summands of abelian groups*. Publ. Math. Debrecen, 4:89-92, 1955.
14. V. Gould. *Completely right pure monoids*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, 87(1):73-82, 1987.
15. V. Gould. *Coperfect monoids*. Glasgow Math. J., 29(1):73-88, 1987.
16. M. Haddadi and M.M. Ebrahimi. *A radical extension of the category of S-sets*. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 43(5):1153-1163, 2017.

17. M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. *On radical and torsion theory in the category of S-acts*. arXiv:1806.07075v1, 2018.
18. M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. *Radical-injectivity in the category S-act*. arXiv:1806.07077v1, 2018.
19. M. Kilp, U. Knauer, and A. V. Mikhalev. *Monoids, acts and categories, volume 29 of De Gruyter Expositions in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000. With applications to wreath products and graphs, a handbook for students and researchers*.
20. J. Lambek. *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients. With an appendix by H. H. Storrer on torsion theories and dominant dimensions. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 177. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971*.
21. M. Mahmoudi and M.M. Ebrahimi. *Purity and equational compactness of projection algebras*. Appl. Categ. Structures, 9(4):381-394, 2001.
22. M. Mahmoudi and Gh. Moghaddasi. *Sequential purity and injectivity of acts over some classes of semigroups*. Taiwanese J. Math., 15(2):737-744, 2011.
23. P. Normak. *Purity in the category of M-sets*. Semigroup Forum, 20(2):157-170, 1980.
24. R. Wiegandt. *Radical and torsion theory for acts*. Semigroup Forum, 72(2):312-328, 2006.