

## تحلیل تقارنی لی و تعیین جواب‌های صریح تحلیلی دستگاه معادلات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون

هادی روحانی قهساره<sup>\*</sup>، احمد مجلسی، علی زاغیان؛

دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر، ایران

پذیرش ۹۶/۱۱/۲۸

دریافت ۹۶/۰۶/۲۹

### چکیده

در این تحقیق، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با مشتقات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون که توصیف کننده انتشار نامتعارف امواج آب کم عمق است، بررسی شده است. یک روش آنالیز متقارن لی برای تحلیل مدل داده شده است. با محاسبه و استفاده از تبدیلات تشابهی مناسب، دستگاه معادلات مشتقات جزئی کسری زمانی به یک دستگاه معادلات مشتقات معمولی با مشتقات کسری اردلی-کوبر کاهش یافته است. به علاوه، روش زیرفضاهای ناوردای محاسبه یک دسته از جواب های صریح تحلیلی دستگاه کسری درینفلد-سوکولوف-ویلسون استفاده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** دستگاه معادلات درینفلد-سوکولوف-ویلسون کسری، تحلیل تقارنی لی، تبدیلات تشابهی، روش زیر فضاهای ناوردای

### مقدمه

در چند دهه اخیر، نظریه حسابان (مشتق و انتگرال) کسری<sup>۱</sup>، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران علوم و مهندسی قرار گرفته و پیشرفت‌های چشم‌گیری در مباحث نظری و کاربردی آن انجام شده است [1]، [2]، [3]. هم‌چنین علاقه وافری برای توصیف پدیده‌های غیرخطی و طبیعی با معادلات دیفرانسیل کسری به وجود آمده است و بسیاری از پدیده‌های غیرعادی و فرآیندهای پیچیده طبیعی که نظریه حسابان کلاسیک برای توصیف آن‌ها ناکارآمد بودند، با استفاده از نظریه حسابان کسری به طور دقیق قابل پیکربندی ریاضی هستند. در واقع نظریه حسابان کسری ابزاری قدرتمند برای توصیف ویژگی‌های موروثی و حافظه ذاتی پدیده‌های غیرعادی در طبیعت است. به طور ویژه، کارایی این نظریه در توصیف پدیده‌های نفوذ، انتشار و انتقال، نسبت به موارد مشابه که با معادلات دیفرانسیل کلاسیک فرمول‌بندی شده‌اند، تأیید شده است [4]، [5]. حل دقیق معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری کاری سخت و در اغلب موارد غیر ممکن است، از این رو، در سال‌های اخیر توجه محققان به توسعه و اجرای روش‌های نیمه تحلیلی و عددی برای حل تقریبی این مسائل معطوف شده است [6] - [11]. یک رده مهم از روش‌ها برای تحلیل مسائل مشتقات کسری، روش‌های مبتنی بر نظریه گروه‌های لی<sup>۲</sup> هستند. در ابتدای قرن نوزدهم میلادی ریاضی‌دان نروژی سوفوس لی<sup>۳</sup> روش تحلیل تقارنی لی را ابداع کرد که بعدها شاگردانش دنبال کردند [12]. در این روش با استفاده از تقارن‌های نقطه‌ای لی می‌توان جواب‌های ناوردای گروهی برای معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. هم‌چنین می‌توان با کاهش

<sup>\*</sup>نویسنده مسئول roohani@mut-es.ac.ir

1, Fractional Calculus  
2, Lie group theory  
3, Sophos Lie

مرتبه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری، آن‌ها را به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری تبدیل کرد. تعمیم روش لی از معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح به مرتبه کسری کار ساده‌ای نیست و نیازمند تعمیم مفهوم تطویل<sup>۱</sup> برای عملگرهای مشتقات کسری است، که برای مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل این کار را گزیزف<sup>۲</sup> و همکارانش [13] معرفی و برای حل مسئله انتشار غیرخطی مرتبه کسری زمانی به کار گرفته شد. به تازگی هاشمی و همکارانش به روشی دیگر، این فرمول را به دست آوردند و انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را با آن بررسی کردند [14]. طی سال جاری، سینگلا<sup>۳</sup> و گوپتا<sup>۴</sup> این روش را برای کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمانی و همچنین مرتبه کسری زمانی-مکانی گسترش دادند [15]. در این تحقیق تلاش می‌شود روش اخیر معرفی شده به وسیله سینگلا و گوپتا برای بررسی و تحلیل تقارن‌های لی دستگاه معادلات درینفلد-سوکولوف-ویلسون<sup>۵</sup> مرتبه کسری زمانی، که به تازگی ساها-ری<sup>۶</sup> و همکارش برای توصیف پدیده انتشار نامتعارف امواج آب در محیط‌های کم عمق معرفی کرده‌اند [16]، پیاده‌سازی و اجرا شود. دستگاه کلاسیک درینفلد-سوکولوف-ویلسون (DSW) بدین صورت تعریف می‌شود [17]، [18]، [19]:

$$\begin{aligned} u_t + pvv_x &= 0 \\ v_t + qv_{xxx} + svu_x + nuv_x &= 0 \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن  $p, q, r, s$  ثابت‌هایی ناصفرند. هیروتا<sup>۷</sup> و همکارانش، ساختار سولیتونی<sup>۸</sup> دستگاه به ازای  $p = 3, q = 2, s = 1, r = 2$  را با استفاده از یک روش جبری بررسی کردند [20]. فان<sup>۹</sup> با استفاده از روش تعمیم یافته و اصلاح شده بسط توابع ژاکوبی، یک دسته از جواب‌های تحلیلی برای دستگاه (۱) ارائه کرد [21]. به نظر می‌رسد که اولین بار و به تازگی ساها-ری و همکارانش دستگاه معادلات (DSW) با مشتق زمانی مرتبه کسری را بدین صورت معرفی کردند [16]:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u + pvv_x &= 0 \\ D_t^\alpha v + qv_{xxx} + nuv_x + svu_x &= 0 \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن  $p, q, r, s$  پارمترهای ناصفرند و  $D_t^\alpha$  بیانگر عملگر مشتق جزئی کسری ریمان-لیوویل<sup>۱۰</sup> مرتبه  $0 < \alpha \leq 1$  نسبت به متغیر زمانی  $t$  است که در حالت کلی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (u(x, t)) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(x, s) ds & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} (u(x, s)) & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

که در آن  $\Gamma(a)$  تابع گاما است و بدین صورت تعریف می‌شود:

- 
1. Prolongation
  2. Gazizov
  3. Singla
  4. Gupta
  5. Drinfeld-Sokolov-Wilson (DSW)
  6. Saha Ray
  7. Hirota
  8. Soliton
  9. Fan
  10. Riemann-Liouville fractional

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} t^{a-1}$$

دستگاه معادلات مرتبه کسری غیرخطی مذکور یک مدل ریاضی مهم برای توصیف و پیش‌بینی رفتار پدیده انتشار نامتعارف امواج آب‌های سطحی در محیط‌های کم‌عمق است. به دلیل کاربرد گسترده و اهمیت زیاد این معادلات، در سال‌های اخیر تحقیقات مهمی پیرامون آن انجام گرفته شده است. داسون<sup>۱</sup> و همکارانش [22] با استفاده از روش گالرکین به‌طوری عددی معادله (DSW) را حل کردند. هم‌چنین ماتجیلا<sup>۲</sup> و همکارانش قوانین پایستاری آن را به‌دست آوردند [23]. ساها-ری و همکارش با به‌کارگیری روشی نسبتاً تحلیلی جدید جواب متناوب دوگانه برای معادلات کسری زمانی DSW ارائه کردند [16]. در این مقاله از ایده‌های تعمیم یافته آنالیز تقارنی لی<sup>۳</sup> برای محاسبه تقارن‌های نقطه‌ای لی و تبدیلات تشابهی مدل استفاده شده و تلاش می‌شود دستگاه حاکم (۲،۱) به‌صورت دستگاه معادلات معمولی مرتبه کسری کاهش داده شود.

از دیگر روش‌های تحلیلی کارا و قدرتمند برای بررسی تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی و پیچیده روش موسوم به زیرفضای ناورد<sup>۴</sup> است. ایده روش زیرفضای ناورد را گالکتینف<sup>۵</sup> و همکارانش برای معادلات دیفرانسیل جزئی جزئی معرفی کردند [24]. به‌تازگی گریزف و همکارانش [25] آن را برای حل معادلات جزئی غیرخطی با مشتق زمانی مرتبه کسری تعمیم دادند. اخیراً نیز ساهادوان<sup>۶</sup> و همکارش این روش را برای به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی دستگاه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتق زمانی مرتبه کسری تعمیم دادند [26]. در این تحقیق روش زیرفضای ناورد تعمیم‌یافته برای مسائل مشتقات کسری برای یافتن یک دسته از جواب‌های صریح تحلیلی دستگاه (۲) پیاده‌سازی و اجرا خواهد شد.

### آنالیز تقارنی لی برای دستگاه کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون

در این بخش ابتدا ایده روش آنالیز تقارن لی تعمیم یافته برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری زمانی بیان می‌شود. سپس روش معرفی شده برای آنالیز تقارنی لی، دستگاه (DSW) پیاده‌سازی و اجرا و در نهایت یک صورت کاهش یافته از مدل با استفاده از تبدیلات تشابهی متقارن ارائه خواهد شد.

#### ۱. بیان مقدمات روش آنالیز تقارنی لی برای دستگاه معادلات کسری زمانی

در این بخش روش آنالیز تقارنی لی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری زمانی در حالت کلی شرح داده می‌شود. برای این منظور فرض کنید  $u(x, t)$  و  $v(x, t)$  متغیرهای وابسته و جواب‌های دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی زیر باشند:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - F(x, t, u, u_x, u_{2x}, \dots, v_x, v_{2x}, \dots) = 0 \\ \Delta_2 &= \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - H(x, t, u, u_x, u_{2x}, \dots, v_x, v_{2x}, \dots) = 0\end{aligned}\quad (4)$$

1 Dawson

2 Matjila

3 Lie symmetry analysis

4 Invariant subspace method

5 Galaktionov, V.A

6 R. Sahadevan

که در آن  $\alpha > 0$  و  $u_{ix} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$  و  $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$  به ترتیب مشتق مرتبه  $i$ ام نسبت به  $x$  و مشتق جزئی ریمان-لیوویل از مرتبه کسری  $\alpha$  نسبت به  $t$  را نشان می‌دهد.  $G$  را یک گروه تقارنی لی یک پارامتری از تبدیلات پیوسته زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon \xi(x, t, u, v) + O(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon \tau(x, t, u, v) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon \eta(x, t, u, v) + O(\varepsilon^2), \\ v^* &= v + \varepsilon \phi(x, t, u, v) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^\alpha u^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon \eta^{\alpha, t} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^\alpha v^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \varepsilon \phi^{\alpha, t} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^j u^*}{\partial x^{*j}} &= \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + \varepsilon \eta^{j, x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial^j v^*}{\partial x^{*j}} &= \frac{\partial^j v}{\partial x^j} + \varepsilon \phi^{j, x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $\xi, \eta, \phi, \tau$  توابع بینهایت کوچک<sup>۱</sup> و  $\phi^{\alpha, t}, \eta^{\alpha, t}$  بینهایت کوچک‌های تعمیم یافته<sup>۲</sup> از مرتبه  $\alpha$  و  $\eta^{j, x}, \phi^{j, x}$  بینهایت کوچک‌های تعمیم یافته از مرتبه  $j$  هستند. اکنون فرض کنید دستگاه (۴) تحت تبدیلات گروه  $G$  ناورد باشد و  $V$  مولد تقارنی بینهایت کوچک نظیر آن بدین صورت تعریف شده باشد:

$$V = \xi(x, t, u, v) \partial_x + \tau(x, t, u, v) \partial_t + \eta(x, t, u, v) \partial_u + \phi(x, t, u, v) \partial_v \quad (6)$$

بنا به تعریف  $\eta^{\alpha, t}$  بدین صورت تعریف می شود [15]:

$$\eta^{\alpha, t} = D_t^\alpha \eta + \xi D_t^\alpha (u_x) - D_t^\alpha (\xi u_x) + D_t^\alpha (D_t (\tau) u) - D_t^{\alpha+1} (\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1} (u), \quad (7)$$

که به دلیل نادرستی قاعده لایبنیتز [27] و قواعد زنجیری [28] در حسابان کسری، برای محاسبه  $\eta^{\alpha, t}$  از قواعد تعمیم یافته مشتقات زنجیری و لایبنیتز برای مشتقات کسری استفاده کرده و داریم [15]:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha, t} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha D_t (\tau)) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + (\eta_v \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - v \frac{\partial^\alpha \eta_v}{\partial t^\alpha} + \mu_1 + \mu_2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^i \eta_u}{\partial t^i} - \binom{\alpha}{i+1} D_t^{i+1} (\tau) D_t^{\alpha-i} (u) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^i \eta_v}{\partial t^i} D_t^{\alpha-i} (v) - \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D_t^i (\xi) D_t^{\alpha-i} (u_x) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$\mu_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^i \sum_{r=2}^j \sum_{s=0}^{r-1} \binom{\alpha}{i} \binom{i}{j} \binom{r}{s} \frac{t^{i-\alpha}}{r! \Gamma(i-\alpha+1)} (-1)^s u^s \frac{\partial^j (u^{r-s})}{\partial t^j} \frac{\partial^{i-j+r} \eta}{\partial t^{i-j} \partial u^r},$$

$$\mu_2 = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^i \sum_{r=2}^j \sum_{s=0}^{r-1} \binom{\alpha}{i} \binom{i}{j} \binom{r}{s} \frac{t^{i-\alpha}}{r! \Gamma(i-\alpha+1)} (-1)^s v^s \frac{\partial^j (v^{r-s})}{\partial t^j} \frac{\partial^{i-j+r} \eta}{\partial t^{i-j} \partial v^r},$$

هرگاه  $\eta$  بر حسب  $u, v$  خطی باشد چون  $\mu_1, \mu_2$  شامل مشتقات مرتبه دوم و مراتب بالاتر  $u, v$  هستند  $\mu_1, \mu_2$  صفر می شوند. به طور مشابه  $\phi^{\alpha,t}$  بدین صورت محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \phi^{\alpha,t} = & \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha} + (\phi_v - \alpha D_t(\tau)) \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - v \frac{\partial^\alpha \phi_v}{\partial t^\alpha} + (\phi_u \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \phi_u}{\partial t^\alpha}) - \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D_t^i(\xi) D_t^{\alpha-i}(v_x) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^i \phi_v}{\partial t^i} - \binom{\alpha}{i+1} D_t^{i+1}(\tau) D_t^{\alpha-i}(v) + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^i \phi_u}{\partial t^i} D_t^{\alpha-i}(u) + \mu_3 + \mu_4 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^i \sum_{r=2}^j \sum_{s=0}^{r-1} \binom{\alpha}{i} \binom{i}{j} \binom{r}{s} \frac{t^{i-\alpha}}{r! \Gamma(i-\alpha+1)} (-1)^s u^s \frac{\partial^j (u^{r-s})}{\partial t^j} \frac{\partial^{i-j+r} \phi}{\partial t^{i-j} \partial u^r}, \\ \mu_4 = & \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^i \sum_{r=2}^j \sum_{s=0}^{r-1} \binom{\alpha}{i} \binom{i}{j} \binom{r}{s} \frac{t^{i-\alpha}}{r! \Gamma(i-\alpha+1)} (-1)^s v^s \frac{\partial^j (v^{r-s})}{\partial t^j} \frac{\partial^{i-j+r} \phi}{\partial t^{i-j} \partial v^r}, \end{aligned}$$

هم چنین وقتی  $\phi$  بر حسب  $u, v$  خطی باشد آن گاه  $\mu_3, \mu_4$  صفر می شوند. عملگرهای بینهایت کوچک های تعمیم یافته  $\phi^x, \eta^{jx}$  و  $\eta^x$  نیز بدین صورت تعریف می شوند.

$$\eta^{jx} = D_x(\eta^{(j-1)x}) - u_{(j-1)x,t} D_x(\tau) - u_{jx} D_x(\xi), \quad j = 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\phi^{jx} = D_x(\phi^{(j-1)x}) - u_{(j-1)x,t} D_x(\tau) - u_{jx} D_x(\xi), \quad j = 2, 3, \dots$$

که در آن  $D_x$  نشانگر عملگر مشتق کل<sup>۱</sup> است که بدین صورت تعریف می شود:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_x}. \quad (11)$$

محک ناوردایی برای معادلات دستگاه (۴) بدین صورت نوشته می شود:

$$Pr^{\alpha, m_1, n_1} V(\Delta_1) |_{\Delta_1=0, \Delta_2=0} = 0, \quad (12)$$

$$Pr^{\alpha, m_2, n_2} V(\Delta_2) |_{\Delta_1=0, \Delta_2=0} = 0,$$

که در آن

$$\begin{aligned} Pr^{\alpha, m, n} V = & V + \eta^{\alpha,t} \frac{\partial}{\partial u_t^{(\beta)}} + \eta^{1,x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{m,x} \frac{\partial}{\partial u_{mx}} \\ & + \phi^{\alpha,t} \frac{\partial}{\partial v_t^{(\alpha)}} + \phi^{1,x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \phi^{n,x} \frac{\partial}{\partial v_{nx}}. \end{aligned}$$

با توجه به مطالب فوق مولد تقارنی محاسبه خواهد شد. در بخش بعد ایده معرفی شده در بالا جهت تحلیل تقارنی لی مسئله (۲) اجرا خواهد شد.

## ۲-۲. تحلیل تقارنی و تبدیلات تشابهی مسئله (۲)

بنابر ایده آنالیز تقارنی لی فرض می شود که دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی و کسری (۲) تحت تبدیلات

1. Total derivative operator

گروه  $G$  معرفی شده در (۵) ناوردا باشد، از این رو، با محاسبه تطویل‌های مناسب (۱۲)، یعنی  $Pr^{\alpha,0,1}V(\Delta 1)$  و  $Pr^{\alpha,1,3}V(\Delta 2)$  داریم:

$$[\eta^{\alpha,t} + p(v\phi^x + \phi_{v_x})]_{\Delta_1=0, \Delta_2=0} = 0, \quad (13)$$

$$[\phi^{\alpha,t} + q\phi^{xxx} + r(u\phi^x + \eta_{v_x}) + s(v\eta^x + \phi_{u_x})]_{\Delta_1=0, \Delta_2=0} = 0.$$

در ادامه با جای‌گذاری مقادیر متناظر عملگرهای  $\eta^x, \phi^x, \phi^{\alpha,t}, \eta^{\alpha,t}, \phi^{xxx}$  معرفی شده در روابط (۷)–(۱۱) در دسته معادلات (۱۲) و معادل صفر قرار دادن ضرائب جملات شامل توان‌های متغیرهای وابسته  $u$  و  $v$  و مشتقات آنها دسته‌ای از معادلات با مشتقات جزئی کسری و کلاسیک بر حسب  $\tau, \eta, \phi$  و  $\xi$  به دست می‌آید. از حل هم‌زمان این دسته از معادلات مقادیر عمومی بینهایت کوچک‌های  $\tau, \eta, \phi$  و  $\xi$  بدین‌صورت محاسبه شده‌اند:

$$\xi = a + c\alpha x, \quad \tau = b + 3ct, \quad \eta = -2\alpha uc, \quad \phi = -2\alpha cv, \quad (14)$$

که در آن  $a, b$  و  $c$  پارامترهای ثابت و دلخواه هستند. از طرفی با توجه به این که کران پایین انتگرال‌گیری عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل مقدار ثابت است، از این رو، برای تضمین ناوردایی دستگاه تحت تبدیلات (۵) این شرط باید برقرار باشد:

$$\tau(x, t, u, v)|_{t=0} = 0,$$

بنابراین از روابط (۱۲) نتیجه می‌شود،  $b = 0$ . در نتیجه به ترتیب با فرض  $\{a = 1, c = 0\}$  و  $\{a = 0, c = 1\}$  دو

دسته از مولدهای بینهایت کوچک با توجه به رابطه (۶) بدین‌صورت به دست می‌آید:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u} - 2\alpha v \frac{\partial}{\partial v} \quad (15)$$

$$[V_1, V_2] = [V_2, V_2] = 0, \quad [V_2, V_1] = -\alpha V_1 = -[V_1, V_2] \quad (16)$$

در ادامه برای کاهش مرتبه دستگاه معادلات (۲)، تبدیلات تشابهی به‌ازای هریک از میدان‌های برداری مذکور محاسبه می‌شود.

**حالت ۱:** به‌ازای میدان برداری  $V_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ، معادله مشخصه نظیر آن بدین‌صورت است:

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{0}$$

از اینرو، داریم،  $v(x, t) = h(t)$  و  $u(x, t) = f(t)$ ، به‌طوری‌که  $f(t)$  و  $h(t)$  توابع دلخواه و وابسته به زمان هستند، با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادله (۲) نتیجه می‌شود:

$$\partial_t^\alpha h(t) = 0, \quad \partial_t^\alpha f(t) = 0$$

از حل معادلات فوق به کمک تبدیل لاپلاس، جواب ناوردای زیر را برای دستگاه (۲) به دست می‌آید:

$$f(t) = \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad h(t) = \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \quad (17)$$

که در آن  $k_1, k_2$  پارامترهای ثابت است.

**حالت ۲:** اگر میدان برداری  $V_2$  را بردار مولد بینهایت کوچک در نظر بگیریم آن‌گاه معادلات مشخصه نظیرش عبارت است از:

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dt}{3t} = \frac{du}{-2\alpha u} = \frac{dv}{-2\alpha v}$$

که از آن  $z = xt^{\frac{\alpha}{3}}$  به عنوان متغیر مستقل جدید و

$$u(x, t) = t^{-\frac{2\alpha}{3}} F(z), \quad v(x, t) = t^{-\frac{2\alpha}{3}} h(z) \quad (18)$$

به عنوان متغیرهای وابسته جدید به دست می آیند که آن ها را تبدیل های تشابهی نیز می نامند. اکنون قبل از بررسی کاهش مرتبه دستگاه، عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی اردلی-کوبر<sup>۱</sup> معرفی می شوند [29]، [30] که دستگاه معادلات (۲) پس از کاهش مرتبه بر حسب این عملگرها بیان می شوند.

**تعریف ۲.۱** برای هر  $\alpha, z > 0$  عملگر دیفرانسیل کسری  $(P_{\zeta}^{\rho, \alpha})$  اردلی-کوبر بدین صورت تعریف می شود:

$$(P_{\zeta}^{\rho, \alpha} H)(z) = \prod_{j=0}^{m-1} \left( \rho + j - \frac{1}{\zeta} z \frac{d}{dz} \right) (K_{\zeta}^{\rho+\alpha, m-\alpha} H)(z), \quad (19)$$

$$m = \begin{cases} [\alpha] + 1 & \text{if } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha & \text{if } \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases} \text{ و}$$

که در آن  $(K_{\zeta}^{\rho, \alpha} H)(z)$  عملگر انتگرالی اردلی-کوبر است [31]:

$$(K_{\zeta}^{\rho, \alpha} H)(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (t-1)^{\alpha-1} t^{-(\rho+\alpha)} H(z t^{\frac{1}{\zeta}}) dt & \text{if } \alpha > 0 \\ H(z) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (20)$$

قضیه زیر روند کاهش مرتبه دستگاه معادلات (۲) را با توجه به تبدیلات تشابهی (۱۸) بیان می کند.

**قضیه ۲.۲** به کمک تبدیل های تشابهی  $u(x, t) = t^{-\frac{2\alpha}{3}} F(z), v(x, t) = t^{-\frac{2\alpha}{3}} h(z)$  و متغیر تشابهی  $z = xt^{\frac{\alpha}{3}}$  دستگاه معادلات (۲) به این دستگاه تبدیل می شود.

$$(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3}, \alpha})(z) = -ph(z)h'(z)$$

$$(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3}, \alpha})(z) = -qh'''(z) - sh(z)F'(z) - rF(z)h'(z) \quad (21)$$

که در آن  $(P_{\zeta}^{\rho, \alpha})$  در تعریف (۲) معرفی شده است.

**برهان:** به سادگی مشاهده می شود که مشتق مرتبه  $\alpha$  ریمن-لیوویل (۳) تابع  $u(x, t)$  به ازای تبدیل تشابهی

$$u(x, t) = t^{-\frac{2\alpha}{3}} F(xt^{\frac{\alpha}{3}})$$

بدین صورت بیان می شود:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{2\alpha}{3}} F(xs^{-\frac{\alpha}{3}}) ds \right],$$

با تغییر متغیر  $t = \frac{t}{s}$  به دست می آوریم:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{t^{n-\frac{5\alpha}{3}}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{\infty} (t-1)^{n-\alpha-1} t^{-(n-\frac{5\alpha}{3}+1)} F(z t^{\frac{\alpha}{3}}) dt \right], \quad (22)$$

اکنون با تطبیق (۲۲) با رابطه (۲۰) می‌توانیم  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$  را بدین صورت بر حسب عملگر انتگرالی اردلی-کوبر بیان کرد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{\frac{n-5}{3}\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)]. \quad (23)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{n-5}{3}\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)] \\ &= [(n-\frac{5}{3}\alpha)t^{\frac{n-5}{3}\alpha-1} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z) + t^{\frac{n-5}{3}\alpha} \frac{d}{dz} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z) \frac{\partial z}{\partial t}] \\ &= [t^{\frac{n-5}{3}\alpha-1} (n-\frac{5}{3}\alpha + t \frac{\partial z}{\partial t} \frac{d}{dz}) (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)] \\ &= [t^{\frac{n-5}{3}\alpha-1} (n-\frac{5}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} z \frac{\partial}{\partial z}) (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)]. \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه بالا می‌توان رابطه (۲۳) را بدین صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left( \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{n-5}{3}\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)] \right) \\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} [t^{\frac{n-5}{3}\alpha-1} (n-\frac{5}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} z \frac{\partial}{\partial z}) (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)]. \end{aligned}$$

این فرآیند را می‌توان  $n$  بار تکرار کرد تا عبارت سمت راست تساوی بالا بدین صورت به‌دست آید که مشابهت زیادی با عملگر دیفرانسیلی اردلی-کوبر دارد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = [t^{\frac{-5}{3}\alpha} (\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \frac{5}{3}\alpha + j - \frac{\alpha}{3} z \frac{d}{dz})) (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} F)(z)] = t^{\frac{-5}{3}\alpha} (P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3}, \alpha} F)(z).$$

تساوی آخر با توجه به تطبیق عبارت سمت راست با عملگر دیفرانسیلی اردلی-کوبر حاصل شده است. به‌طور مشابه،

می‌توان رابطه (۲۴) را برای  $\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}$  به‌دست آورد.

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = t^{\frac{-5}{3}\alpha} (P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3}, \alpha} h)(z). \quad (24)$$

اگر  $\alpha$  یک عدد صحیح مثبت باشد برای  $z = xt^{\frac{n}{3}}$  که  $n = 1, 2, 3, \dots$  این روابط را می‌توان به‌دست آورد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n u}{\partial t^n} [t^{\frac{-2n}{3}} F(z)] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (t^{\frac{-2n}{3}} F(z)) \right] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} [t^{\frac{-2n}{3}-1} (-\frac{2n}{3} - \frac{n}{3} z \frac{d}{dz}) F(z)] \quad (25)$$

و بعد از  $n$  بار تکرار، رابطه بالا می‌تواند بدین صورت نوشته شود:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{\frac{-5}{3}n} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \frac{5}{3}n + j - \frac{n}{3} z \frac{d}{dz}) F(z) = t^{\frac{-5}{3}n} (P_{\frac{3}{n}}^{1-\frac{5n}{3}, n} F)(z), \quad (26)$$

به‌طور مشابه برای  $\alpha = n = 1, 2, 3, \dots$  داریم:



$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = t^{\frac{-5n}{3}} (P_{\frac{3}{n}}^{1-\frac{5n}{3}, n} h)(z). \quad (27)$$

بنابراین روابط (۲۵) و (۲۶) به ازای هر  $\alpha$  که  $n-1 < \alpha \leq n$  برقرار است. در نهایت با جای گذاری تبدیلات تشابهی  $u(x, t) = t^{\frac{-2\alpha}{3}} F(z)$  و  $v(x, t) = t^{\frac{-2\alpha}{3}} h(z)$  در دستگاه (۲) و استفاده از روابط (۲۶) و (۲۷) قضیه ثابت می شود.

چنان که مشاهده شد با استفاده از تبدیلات تشابهی دستگاه معادلات جزئی (۲) با یک واحد کاهش مرتبه به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی کسری با عملگر اردلی-کوبر (۲۱) تبدیل شد.

### روش زیر فضای ناوردا و یافتن جواب دقیق

در این بخش روش زیرفضای ناوردا برای محاسبه یک دسته جواب های صریح و تحلیلی دستگاه معادلات (۲) بررسی و اجرا می شود. برای این منظور ابتدا ایده روش برای حل تحلیلی دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی که اخیراً معرفی شده است [26] به طور مختصر بیان می شود. برای این منظور دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی (۲۸) را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} = G_1[x, u_1, u_2, \dots, u_1^{(k_1)}, u_2^{(k_2)}] \quad (28)$$

$$\frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} = G_2[x, u_1, u_2, \dots, u_1^{(k_1)}, u_2^{(k_2)}]$$

که در آن  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t^\alpha}$  مشتق مرتبه  $\alpha$  ام ریمان-لیوویل و  $G_1, G_2$  توابع به قدر کافی هموار و به ترتیب از مرتبه  $k_1$  و  $k_2$

نسبت به متغیرهای وابسته  $u_1$  و  $u_2$  و با فرض  $(k_1 \geq k_2)$  بوده است که در این شرطها صدق می کنند:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial G_1}{\partial u_1^{(k_1)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial u_2^{(k_1)}}\right)^2 \neq 0 \\ & \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1^{(k_2)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_2^{(k_2)}}\right)^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} \left(\frac{\partial G_1}{\partial u_2^{(i)}}\right)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k_2} \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1^{(i)}}\right)^2 \neq 0. \quad (30)$$

برای بعضی از  $j \in \{1, 2\}$  داریم:

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial u_1^{(l)} \partial u_2^{(s)}} \neq 0 \quad l, s \in \{0, 1, 2, \dots, k_j\} \quad (31)$$

در ادامه از نمادهای  $u_j(x, t) = u_j$ ,  $j = 1, 2$  و  $u_j^{(q)} = \frac{\partial^q u_j(x, t)}{\partial x^q}$  برای  $q = 1, 2, \dots, k_j$  استفاده می شود.

**تعریف ۳.۱ [32]:** یک فضای خطی با بعد متناهی  $W_n$  نسبت به عملگر دیفرانسیلی  $G$  ناوردا گفته می شود هرگاه

$$G[W_n] \subseteq W_n \quad \text{یا به عبارتی دیگر، برای هر } u \in W_n \text{ داشته باشیم } F[u] \in W_n.$$

فرض کنید  $W_{n_j}^j$ ,  $j=1,2$  فضای خطی تولید شده به وسیله توابع مستقل خطی  $\{f_i^j(x) | 1 \leq i \leq n_j, j=1,2\}$  باشد و  $W_{n_j}^j$  (نسبت به عملگر دیفرانسیلی)  $G_j[u_1, u_2]$  ( $j=1,2$ )  $j=1,2$  ناوردا باشد و برای هر  $j=1,2$  و  $i=1,2,\dots,n_j$  مشتق  $D_t^\alpha f_i^j(t)$  وجود داشته باشد و برای  $(u_1, u_2) \in W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$  بسط  $G_j[u_1, u_2]$  بدین صورت باشد:

$$G_j[\sum_{i=1}^{n_1} a_i^1 f_i^1(x), \sum_{i=1}^{n_2} a_i^2 f_i^2(x)] = \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j(a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, a_1^2, \dots, a_{n_2}^2) f_i^j(x) \quad (32)$$

آن‌گاه دستگاه (۲۸) دارای جواب دقیقی بدین صورت است:

$$u_j(x, t) = \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j(t) f_i^j(x) \quad j=1,2 \quad (33)$$

که در آن توابع  $a_i^j(t)$  در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۳۴) صدق می‌کنند [34]:

$$\frac{d^\alpha a_i^j(t)}{dt^\alpha} = \phi_i^j(a_1^1(t), \dots, a_{n_1}^1(t), a_1^2(t), \dots, a_{n_2}^2(t)) \quad i=1,2,\dots,n_j \quad (34)$$

در ادامه فرض کنید فضای ناوردا  $W_{n_j}^j = \mathcal{L}\{f_1^j(x), \dots, f_{n_j}^j(x)\}$  توسط جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه  $n_j$  زیر تولید شده باشد:

$$\mathcal{L}[y_j] = y_j^{(n_j)} + a_{n_j}^j(x) y_j^{(n_j-1)} + \dots + a_2^j(x) y_j' + a_1^j(x) y_j = 0 \quad j=1,2 \quad (35)$$

در این صورت برای آن‌که زیر فضای  $W$  نسبت به عملگر دیفرانسیل برداری  $G$  ناوردا باشد باید داشته باشیم:

$$\mathcal{L}_j[G_j[u_1, u_2]]|_{[H_1] \cap [H_2]} = 0 \quad j=1,2 \quad (36)$$

که در آن  $[H_j]$  نشان‌دهنده معادله  $\mathcal{L}_j[u_j] = 0$  و نتایج دیفرانسیلی آن نسبت به  $x$  است.

از طرفی برآورد بیش‌ترین بعد<sup>۱</sup> از زیر فضاهای ناوردا، نقش مهمی در این روش دارد و به کمک آن می‌توانیم یک رده‌بندی کامل از زیر فضاهای ناوردا و متناظر با آن‌ها جواب دقیق معادلات مورد نظر را به دست آوریم. این برآورد به شرط ناوردایی (۳۶) بستگی دارد و در قضیه ۲.۳ ارائه شده است:

**قضیه ۲.۲** [33] فرض کنید  $G = (G_1, G_2)$  یک عملگر برداری باشد که شرایط (۲۹)–(۳۱) را برآورد می‌کند و اگر  $k_1 \geq k_2$  و  $(n_1 \geq n_2 > 0) W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$  نسبت به عملگر  $G$  ناوردا باشد، آنگاه

$$n_1 - n_2 \leq k_2, \quad n_1 \leq 2(k_1 + k_2) + 1$$

**قضیه ۲.۳** [33] فرض کنید  $G_2 \in G$  یک عملگر دیفرانسیلی غیر خطی و  $G$  یک دستگاه معادلات مشابه (۲۸) باشد. بدون آنکه خللی به عمومیت مسئله وارد شود فرض می‌کنیم  $k_1 \geq k_2$  اگر  $(n_1 \geq n_2 > 0) W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$  نسبت به عملگر  $G$  ناوردا باشد، آنگاه

$$n_2 \leq 2(k_1 + k_2) + 1, \quad n_2 - n_1 \leq k_1.$$

اکنون از روش معرفی شده در بالا برای حل تحلیلی دستگاه معادلات (۲) استفاده می‌شود، برای این منظور با توجه به

1. maximal dimension

مطالب مذکور مؤلفه های دستگاه (۲) را بدین صورت در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} G_1 &= -qv_{3x} - svu_x - nv_x \\ G_2 &= -p v v_x \end{aligned} \quad (10.3)$$

که در آن  $k_2 = 1, k_1 = 3$ . در ادامه مشاهده می شود که عملگرهای  $G_1$  و  $G_2$  در شرایط (۲۹)-(۳۱) صدق می کنند، زیرا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G_1}{\partial v_{3x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial u_{3x}}\right)^2 &= (-q)^2 + (0)^2 \neq 0, \\ \left(\frac{\partial G_2}{\partial v_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_x}\right)^2 &= (-pv)^2 + (0)^2 \neq 0, \\ \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial G_1}{\partial u_{ix}}\right)^2 &= (-sv)^2 + (0)^2 + (0)^2 \neq 0, \\ \sum_{i=1}^1 \left(\frac{\partial G_2}{\partial v_{ix}}\right)^2 &= (-pv)^2 \neq 0, \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial u \partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G_2}{\partial v_x}\right) = -r \neq 0 \end{aligned}$$

بنابراین زیر فضایی مثل  $W = W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$  چنان موجود است که تحت  $G = [G_1, G_2]$  ناوردا است، به طوری که  $n_1 \leq 9$  و  $n_1 - n_2 \leq 1$  بنابراین ابعاد  $W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$  می توانند به صورت زوج های مرتب زیر داده شوند:

$$(n_1, n_2) = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), \dots, (9,8), (9,9)\}$$

به عنوان مثال با فرض  $(n_1, n_2) = (2,2)$ ، زیر فضای ناوردا  $W_{1,2} = W_2^1 \times W_2^2$  با معادلات دیفرانسیل معمولی (۳۷) محاسبه می شوند:

$$W_2^1 = \{y \mid \mathcal{L}[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\} \quad (37)$$

$$W_1^2 = \{z \mid \mathcal{L}_2[z] = z'' + b_1 z' + b_0 z = 0\}$$

که در آن باید پارامترهای ثابت  $b_1, a_1, a_0, b_0$  تعیین شوند. شرایط ناوردایی را می توان بدین صورت نمایش داد:

$$(D^2 G_1 + a_1 D G_1 + a_0 G_1) \big|_{v \in W_2^1, u \in W_1^2} = 0 \quad (38)$$

$$D^2 G_2 + b_1 D G_1 + b_0 G_1 \big|_{v \in W_2^1, u \in W_1^2} = 0$$

که در آن  $G_1, G_2$  در (۲۷) تعریف شدند. در شرط ناوردایی بالا اگر ضرایب  $uv_x, u_x v, v_x^2, v_x$  را برابر صفر قرار دهیم به ترتیب به دست می آوریم:

$$a_1 = 0, \quad -3b = 0, \quad -2b_0 + b_1^2 - a_1 b_1 + a_0 = 0, \quad r a_0 = 0$$

که از حل آن ها  $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0$  نتیجه می شود. پس  $W = \{1, x\} \times \{1, x\}$  زیر فضای ناوردا  $G$  است به شرطی که  $r, p, q$  ناصفر باشند. بنابراین دستگاه معادلات (۲) باید جواب های تحلیلی به صورت  $u(x, t) = c_1(t) + x c_2(t)$  و  $v(x, t) = c_3(t) + x c_4(t)$  داشته باشند بنابراین با جای گذاری جواب های پیشنهادی در دستگاه معادلات (۲) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha c_1}{\partial t^\alpha} &= -pc_3(t)c_4(t) \\ \frac{\partial^\alpha c_2}{\partial t^\alpha} &= -pc_4^2(t) \\ \frac{\partial^\alpha c_3}{\partial t^\alpha} &= -sc_2(t)c_3(t) - rc_1(t)c_4(t) \\ \frac{\partial^\alpha c_4}{\partial t^\alpha} &= -(r+s)c_2(t)c_4(t)\end{aligned}\quad (39)$$

در ادامه تلاش می‌شود دستگاه معادلات معمولی با مشتقات کسری ریمان-لیویل فوق حل شود، برای این منظور از روابط مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیویل توابع چندجمله‌ای استفاده خواهد شد. این روابط در حالت کلی بدین صورت است::

$$\begin{aligned}I^\alpha t^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \\ D^\alpha t^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}\end{aligned}\quad (40)$$

که  $I^\alpha, D^\alpha$  به ترتیب انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیویل مرتبه  $\alpha$  را نشان می‌دهند. با توجه به معادلات دوم و چهارم دستگاه (۴۰)، انتظار می‌رود تابع  $c_4(t)$  به صورت  $c_4(t) = At^\gamma$  باشد، که در آن  $A$  و  $\gamma$  پارامترهای ثابتی است که در ادامه تعیین می‌شوند. از این رو، با این فرض از سطر دوم دستگاه معادلات (۴۰) به سادگی نتیجه می‌شود:

$$c_2(t) = -\frac{pA^2\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\gamma+\alpha+1)} t^{2\gamma+\alpha}\quad (41)$$

اکنون با جای گذاری مقادیر  $c_2(t)$  و  $c_4(t)$  را در سطر چهارم از دستگاه معادلات (۴۰)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{A\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha} = \frac{(r+s)pA^3\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\gamma+\alpha+1)} t^{3\gamma+\alpha}$$

این تساوی تنها به ازای  $\gamma - \alpha = 3\gamma + \alpha$  یا  $\gamma = -\alpha$  و همچنین:

$$A = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{p(r+s)}}$$

برقرار است. بنابراین داریم:

$$c_2(t) = \frac{-1}{r+s} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}\quad (42)$$

$$c_4(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{p(r+s)}} t^{-\alpha}\quad (43)$$

به طور مشابه با فرض  $c_3(t) = k_1 t^\beta$  و جای گذاری آن در دسته اول از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری (13.3) و در نهایت از جای گذاری مقادیر محاسبه شده،  $c_2(t), c_3(t)$  و  $c_4(t)$  در دسته سوم از معادلات، توابع  $c_1(t)$  و  $c_3(t)$  بدین صورت محاسبه می‌شوند:

$$c_1(t) = \frac{-pk_1}{\sqrt{p(r+s)}} t^{-\alpha} \quad c_3(t) = k_1 t^{-\alpha}.$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات (۲) بدین صورت محاسبه می شود:

$$u(x, t) = \frac{-pk_1}{\sqrt{p(r+s)}} t^{-\alpha} - \frac{x}{r+s} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}$$

$$v(x, t) = k_1 t^{-\alpha} + \frac{x}{\sqrt{p(r+s)}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}$$

که در آن  $k_1$  یک ثابت دلخواه است.

### نتیجه گیری

در این تحقیق یک مدل مهم در مهندسی که توصیف کننده رفتار پدیده انتشار نامتعارف امواج آب در محیط های کم عمق است و به دستگاه معادلات جزئی با مشتقات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون معروف است، بررسی شد. یک تحلیل قوی ریاضی مبتنی بر نظریه تقارن لی برای بررسی ناوردایی معادلات و تشکیل تقارن های نقطه ای لی مدل ارائه شد. متناظر به تقارن های نقطه ای لی، برخی تبدیلات تشابهی مهم برای مسئله محاسبه و با استفاده از آنها مدل به یک دستگاه معادلات معمولی با مشتقات کسری اردلی-کوبر کاهش یافت. در ادامه از یک روش تحلیلی قوی مبتنی بر زیر فضاهای ناوردا یک دسته از جواب های دقیق معادله درینفلد-سوکولوف-ویلسون به صورت صریح محاسبه شد. مشاهده می شود که هر دو تحلیل استفاده شده در این تحقیق که به تازگی برای دستگاه معادلات کسری گسترش داده شده اند، کارایی زیادی برای مواجهه با این مسئله مهم دارد.

### منابع

1. Oldham K. B., Spanier J., "The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", Academic Press, New York, NY, USA, (1974).
2. Miller K. S., Ross B., "An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations" Wiley, New York (1993)
3. Podlubny I., "Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications", Mathematics in Science and Engineering Vol. 198, Academic Press, New York, (1999).
4. Loverro A., "Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer", Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame Notre Dame, U.S.A, (2004).
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional

- Differential Equations", NorthHolland Mathematics Studies Vol. 204, Elsevier, Amsterdam, (2006).
6. Jafari Hossein, Kadhoda Nematollah, Baleanu Dumitru, "Fractional Lie group method of the time-fractional Boussinesq equation", Nonlinear Dynamics 81.3 (2015) 1569-1574.
  7. Hashemi M. S., "Group analysis and exact solutions of the time fractional Fokker- Planck equation", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 417 (2015) 141-149.
  8. Hashemi M. S., Baleanu D., "Lie symmetry analysis and exact solutions of the time fractional gas dynamics equation", JOURNAL OF OPTOELECTRONICS AND ADVANCED MATERIALS 18.3-4 (2016) 383-388.
  9. Pashayi S., Hashemi M. S., Shahmorad S., "Analytical lie group approach for solving fractional integro-differential equations" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 51 (2017) 66-77.
  10. Roohani Ghehsareh H., Bateni S. H., Zaghian A., "A meshfree method based on the radial basis functions for solution of two-dimensional fractional evolution equation", Engineering Analysis with Boundary Elements. 61 (2015) 52-60
  11. Roohani Ghehsareh H., Zaghian A., Zabetzadeh S. M., "The use of local radial point interpolation method for solving two-dimensional linear fractional cable equation", Neural Computing and Applications (2017).
  12. Ovsiannikov L.V., "Group analysis of differential equations", New York: Academic Press; (1982).
  13. Rafail K., Gazizov Alexey A., Kasatkin, Stanislav Yu Lukashchuk, "Continuous transformation groups of fractional differential equations", (2007).
  14. Hashemi M. S., Bahrami F., Najafi R., "Lie symmetry analysis of steady-state fractional reaction-convection-diffusion equation", Optik IJLEO 59017, (2017) 3-21.
  15. Komal Singla, Gupta R. K., "On invariant analysis of some time fractional nonlinear systems of partial differential equations", I, JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS 57, 101504 (2016).
  16. saha Ray S., sahu S., "New double-periodic solutions of fractionasl Drifeld-Sokolov-Wilson equation in shallow water waves", Nonlinear Dyn. DOI.10.1007s1007-017-3349-9, (2017).
  17. Drinfel'd V. G., Sokolov V. V., "Equations of Korteweg-de Vries type and simple Lie

- algebras", Sov. Math. Dokl. 23 (1981) 457-462.
18. Drinfel'd V.G., Sokolov V. V., "Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type", J. Sov. Math. 30(2), 1975-2036 (1985).
  19. Wilson G., "The affine lie algebra  $C(1)_2$  and an equation of Hirota and Satsuma", Phys. Lett. A 89(7) (1982) 332-334.
  20. Hirota R., Grammaticos B., Rahmani A., "Soliton structure of the Drinfeld-Sokolov-Wilson equation", journal of Mathematical physics, Vol. 27, No. 6 (1986) 1499-1505.
  21. Fan E., "An algebraic method for finding a series of exact solutions to integrable and nonintegrable nonlinear evolution equations", Journal of physics A: Mathematical and General, Vol. 36, No. 25 (2003) 7009-7026.
  22. Dawson C., Santillana M., "A numerical approach to study the properties of solutions of the diffusive wave approximation of the shallow water equations computed", Geosci. 14 (1) (2009) 31-53.
  23. Matijala C., Muatjeta B., Khalique C. M., "Exact solutions and conservation laws of the Drinfeld-Sokolov-Wilson system", Abstr. Appl. Anal. (2014) 1-6.
  24. Galaktionov V. A., "Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities", In: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, vol. 125 (1995) 225-246.
  25. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., "Construction of exact solutions for fractional order differential equations by invariant subspace method", Comput. Math. Appl. 66 (2013) 576-584.
  26. Sahadevan R., Prakash P., "Exact solution of certain time fractional nonlinear partial differential equations", Nonlinear Dyn DOI 10.1007/s11071-016-2714-4 (2016).
  27. Liu C.-s., "Counterexamples on Jumarie's two basic fractional calculus formulae", Commun. Nonlinear Sci., Numer. Simul., 22 (2015) 92-94.
  28. Tarasov V. E., "On chain rule for fractional derivatives", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 30 (2016) 1-4.
  29. Hilfer R., "Applications of Fractional Calculus in Physics", World Scientific, River Edge, (2000).
  30. Kiryakova V., "Generalized Fractional Calculus and Applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific Technical, Longman Group, U.K, (1994).

31. Sneddon I. N., "The Use in Mathematical Physics of Erdélyi-Kober Operators and Some of their Generalizations", Lecture Notes in Mathematics Vol. 457, Springer Verlag, New York, (1975) 37-79.
32. Zhu C. R., Qu C. Z., "Maximal dimension of invariant subspaces admitted by non-linear vector differential operators", J Math Phys. 52, 043507 (2011) 15.
33. Shen S. F., Qu C. Z., Jin Y. Y., Ji LN., "Maximal dimension of invariant subspaces to systems of nonlinear evolution equations", Chin Ann Math Ser-B, 33 (2012) 161-78.
34. Sahadevan R., Prakash P., "On Lie symmetry analysis and invariant subspace methods of coupled time fractional partial differential equations", Chaos, Solitons, Fractals 104 (2017) 107-120.