

آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار

ابوطالب شیخعلی

دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

کازم حق نژادآذر^{*}

دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده علوم، گروه ریاضیات و کاربردها

علی عبادیان

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۱۱/۲۸

دریافت ۹۷/۰۷/۲۲

چکیده

در این مقاله به خواص آرنز منظم نگاشت دو خطی کران‌دار می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \rightarrow Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی $l_2: Y \rightarrow X^*$ با ضابطه $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$ ضعیف فشرده باشد. سپس قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که ویژگی ضعیف فشرده‌گی نگاشت دو خطی کران‌دار و آرنز منظم را به یکدیگر مرتبط می‌سازد. هم‌چنین به بررسی آرنز منظم و خاصیت ضعیف فشرده‌گی نگاشت‌های خطی کران‌دار می‌پردازیم و نتایجی مشابه نتایج دیلز، اولگر و آریکان را بیان می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین آرنز منظم جبرهای باناخ و انعکاسی بودن را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آرنز منظم، جبر باناخ، دوگان دوم، ضرب‌های آرنز، ضعیف فشرده‌گی، نگاشت دو خطی.

مقدمه

فرض کنیم X, Y و Z فضاهای باناخ باشند و $f: X \times Y \rightarrow Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار^۱ باشد. آرنز^۲ در سال ۱۹۵۱ در [1] نشان داد که توسیع‌های f به‌صورت‌های f^{***} و f^{r***} از $X^{**} \times Y^{**}$ به Z^{**} هستند که هر یک از آن‌ها نگاشت دو خطی کران‌داراند. هنگامی که این توسیع‌ها برابر باشند آن‌گاه f آرنز منظم نامیده می‌شود. اگر A یک جبر باناخ و نگاشت ضرب، آرنز منظم باشد آن‌گاه جبر باناخ A را آرنز منظم می‌نامیم. فرض کنیم A^* دوگان اول و A^{**} دوگان دوم A باشد. A^* و A^{**} را می‌توان با جمع و ضرب اسکالر به فضای باناخ تبدیل کرد، اما هیچ‌کدام با ضرب نقطه‌ای جبر باناخ نیستند. ضرب‌های اول و دوم آرنز برای دوگان دوم جبرهای باناخ مطرح شدند و برای فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده X ، نشان داده شده که این دو ضرب برای دوگان دوم $C(X)$ (جبر تمامی توابع پیوسته روی X) با هم یکی هستند، به‌عبارتی $C(X)$ آرنز منظم است. ضرب‌های آرنز^۳ روی A^{**} آن را تبدیل به

جبر باناخ می‌کند. برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۹]، [۱۲] مراجعه شود. اولگر^۱ [۱۰] نشان داد که اگر $m: X \times Y \rightarrow C$ یک فرم دو خطی کران‌دار باشد آن‌گاه m را می‌توان بدین‌صورت نمایش داد:

$$m(x, y) = \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

که $u: X \rightarrow Y^*$ و $v: Y \rightarrow X^*$ عملگرهای خطی پیوسته‌اند و $\|u\| = \|v\| = \|m\|$. در آن مقاله اشاره شده است که u ضعیف فشرده^۲ است اگر و تنها اگر v ضعیف فشرده باشد. مطالب بالا را برای نگاشت‌های l_1 و l_2 که در ادامه تعریف می‌شوند بررسی می‌کنیم. بدین‌ترتیب ضعیف فشردگی را برای نگاشت‌های دو خطی کران‌دار تعریف می‌کنیم.

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این بخش خلاصه‌ای از مفاهیم، تعاریف و نتایج اولیه از آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱. فرض کنیم X, Y و Z فضاهای باناخ باشند و $f: X \times Y \rightarrow Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. الحاقی^۳ f که آن را با f^* نمایش می‌دهیم برای هر $x \in X$ ، $y \in Y$ و $z^* \in Z^*$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$f^*: Z^* \times X \rightarrow Y^*$$

$$\langle f^*(z^*, x), y \rangle = \langle z^*, f(x, y) \rangle$$

که نگاشتی دو خطی کران‌دار است. پس می‌توان الحاقی f^* یعنی $(f^*)^*$ که آن را با f^{**} نمایش می‌دهیم به‌صورت $f^{**}: Y^{**} \times Z^* \rightarrow X^*$ و با ضابطه $\langle f^{**}(y^{**}, z^*), x \rangle = \langle y^{**}, f^*(z^*, x) \rangle$ تعریف کنیم که $x \in X$ ، $y^{**} \in Y^{**}$ و $z^* \in Z^*$ با ادامه این روند الحاقی مراتب بالاتر نیز تعریف می‌شوند. نگاشت واگرد^۴ f که آن را با f^r نمایش می‌دهیم به‌صورت $f^r: Y \times X \rightarrow Z$ و با ضابطه $f^r(y, x) = f(x, y)$ تعریف می‌شود، که نگاشتی دو خطی کران‌دار است و می‌توان الحاقی‌های این نگاشت را نیز به‌دست آورد. نگاشت f را آرنز منظم می‌نامیم در صورتی که $f^{***} = f^{r***r}$.

تعریف ۲. نگاشت خطی کران‌دار $l: X \rightarrow Y$ را ضعیف فشرده می‌نامیم هرگاه $\overline{l(U_X)}$ در Y ضعیف فشرده باشد، که U_X گوی واحد در X است.

تعریف ۳. نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \rightarrow Z$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت داریم:

$$\langle z^*, f(x, y) \rangle = \langle z^*, f^r(y, x) \rangle = \langle f^{r*}(z^*, y), x \rangle$$

$$\langle z^*, f(x, y) \rangle = \langle f^*(z^*, x), y \rangle$$

حالا مشابه u و v تعریف شده در [10]، برای هر $z^* \in Z^*$ نگاشت‌های خطی کران‌دار $l_1: X \rightarrow Y^*$ با ضابطه $l_1(x) = f^*(z^*, x)$ و $l_2: Y \rightarrow X^*$ با ضابطه $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$ را در نظر می‌گیریم. گوییم نگاشت f ضعیف فشرده است هرگاه نگاشت l_1 ضعیف فشرده باشد.

قرارداد ۴. نگاشت $\wedge: X \rightarrow X^{**}$ را نشان دادن طبیعی می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ داشته باشیم:

1. A. Ülger
2. Weakly compact
3. Adjoint
4. Flip map

$$\langle \hat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$$

از آن‌جا که نشان دادن طبیعی یکرختی طولپا از X به $\hat{X}$ است، در این مقاله یک فضای باناخ را با تصویر طبیعی آن در دوگان دومش یکی می‌گیریم.

قضیه ۵. فرض کنیم $f: X \times Y \rightarrow Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت این عبارات معادل هستند:

(الف) نگاشت f آرنز منظم است.

$$f^{****} = f^{r****r} \quad (\text{ب})$$

$$f^{****}(\widehat{Z^*}, X^{**}) \subseteq Y^* \quad (\text{پ})$$

(ت) نگاشت خطی $x \rightarrow f^*(z^*, x): X \rightarrow Y^*$ برای هر $z^* \in Z^*$ و $x \in X$ ضعیف فشرده است.

برهان. برای اثبات به [۱]، [۲]، [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۶. فرض کنیم $f: X \times Y \rightarrow Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت f آرنز منظم است اگر و تنها

$$\text{اگر } f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^* \quad \text{برهان. برای اثبات به [۲.۲، ۱۳] مراجعه کنید.}$$

تعریف ۷. نگاشت دو خطی کران‌دار $g_1: X \times Y \rightarrow Y$ را از چپ تقریباً یک‌دار^۱ (تقریباً یک‌دار چپ) می‌نامیم هرگاه تور کران‌دار $(e_\alpha) \subseteq X$ موجود باشد که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $\lim_\alpha g_1(e_\alpha, y) = y$. این نگاشت را از چپ یک‌دار^۲ می‌نامیم اگر $e \in X$ موجود باشد که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $g_1(e, y) = y$. به‌طریق مشابه از راست تقریباً یک‌دار (تقریباً یک‌دار راست) و از راست یک‌دار تعریف می‌شوند.

آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار و خاصیت ضعیف فشردگی

در لم ۸ محکی برای آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار ارائه می‌دهیم و با استفاده از این محک در ادامه، نتیجه‌ای به‌دست می‌آوریم که آرنز منظم و ضعیف فشردگی نگاشت دو خطی کران‌دار f را به‌هم مرتبط می‌سازد.

لم ۸. نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \rightarrow Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران‌دار l_2 ضعیف فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم f آرنز منظم باشد و $z^* \in Z^*$ و $y^{**} \in Y^{**}$. تور (y_β) در Y وجود دارد که با توپولوژی ضعیف ستاره به y^{**} همگراست. برای هر $x^{**} \in X^{**}$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(y^{**}, \widehat{z^*}), x^{**} \rangle &= \langle f^{r****}(\widehat{z^*}, y^{**}), x^{**} \rangle = \langle \widehat{z^*}, f^{r****}(y^{**}, x^{**}) \rangle \\ &= \langle f^{r****}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle = \langle y^{**}, f^{r****}(x^{**}, z^*) \rangle \\ &= \lim_\beta \langle f^{r****}(x^{**}, z^*), y_\beta \rangle = \lim_\beta \langle x^{**}, f^{r****}(z^*, y_\beta) \rangle \\ &= \lim_\beta \langle x^{**}, l_2(y_\beta) \rangle = \lim_\beta \langle l_2^*(x^{**}), y_\beta \rangle \\ &= \langle y^{**}, l_2^*(x^{**}) \rangle = \langle l_2^*(y^{**}), x^{**} \rangle. \end{aligned}$$

1. Approximately unital
2. Unital

بنابراین $f^{r****r}(y^{**}, \widehat{z^*}) = l_2^{**}(y^{**})$ از آن جاکه f آرنز منظم است پس بنا به قضیه ۶، $f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^*$ در نتیجه $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$ بنابراین l_2 ضعیف فشرده است. برای برعکس، فرض کنیم l_2 ضعیف فشرده باشد در این صورت $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$ پس $f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^*$ بنابراین f آرنز منظم است.

قضیه ۹. فرض کنیم نگاشت $f: X \times Y \rightarrow Z$ دو خطی کران دار باشد. در این صورت l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر l_2 ضعیف فشرده باشد.

برهان. بنا به قضیه ۵ نگاشت l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر f آرنز منظم باشد. از طرفی بنا به لم ۸ f آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران دار l_2 ضعیف فشرده باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر l_2 ضعیف فشرده باشد.

نتیجه زیر که توسیعی از قضیه اولگر در [۱۰، ۲.۲] است بلافاصله از قضیه ۹ به دست می‌آید.

نتیجه ۱۰. نگاشت دو خطی کران دار $f: X \times Y \rightarrow Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر ضعیف فشرده باشد.

آریکان [۳]، نشان داد که اگر نگاشت‌های $f: X \times Y \rightarrow Z$ و $g: X \times W \rightarrow Z$ دو خطی کران دار باشند و نگاشت $h: Y \rightarrow W$ خطی و پیوسته باشد و f توسط g تجزیه شود و $h(U_Y)$ ضعیف فشرده باشد، که U_Y گوی واحد Y است. در این صورت f آرنز منظم است. محمدزاده و ابراهیمی ویشکی نیز با استفاده از قضیه ۵ نتیجه مشابهی بدست آوردند [۸، ۲.۳]. در ادامه قضیه‌ای مرتبط با مطالب مذکور بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۱. فرض کنیم $f: X \times Y \rightarrow Z$ و $g: W \times Y \rightarrow Z$ نگاشت‌های دو خطی کران دار باشند و نگاشت $h: X \rightarrow W$ خطی، کران دار و ضعیف فشرده باشد و برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داشته باشیم $f(x, y) = g(h(x), y)$ در این صورت نگاشت‌های f و f^* آرنز منظم‌اند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $x^{**} \in X^{**}$ و $y^{**} \in Y^{**}$ این تساوی برقرار است:

$$f^{r****r}(x^{**}, y^{**}) = g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**})$$

برای این منظور فرض کنیم (x_α) و (y_β) به ترتیب تورهایی در X و Y باشند که با توپولوژی ضعیف ستاره به x^{**} و y^{**} همگرایند. در این صورت برای هر $z^* \in Z^*$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, f(x_\alpha, y_\beta) \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, g(h(x_\alpha), y_\beta) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, g^r(y_\beta, h(x_\alpha)) \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle g^{r*}(z^*, y_\beta), h(x_\alpha) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle h^*(g^{r*}(z^*, y_\beta)), x_\alpha \rangle = \lim_{\beta} \langle x^{**}, h^*(g^{r*}(z^*, y_\beta)) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \langle h^{**}(x^{**}), g^{r*}(z^*, y_\beta) \rangle = \lim_{\beta} \langle g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*), y_\beta \rangle \\ &= \langle y^{**}, g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*) \rangle = \langle g^{r****r}(y^{**}, h^{**}(x^{**})), z^* \rangle \\ &= \langle g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}), z^* \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(y^{**}, z^{***}), x^{**} \rangle &= \langle f^{r****r}(z^{***}, y^{**}), x^{**} \rangle = \langle z^{***}, f^{r****r}(y^{**}, x^{**}) \rangle \\ &= \langle z^{***}, f^{r****r}(x^{**}, y^{**}) \rangle = \langle z^{***}, g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle z^{***}, g^{r***}(y^{**}, h^{**}(x^{**})) \rangle = \langle g^{r****}(z^{***}, y^{**}), h^{**}(x^{**}) \rangle \\
 &= \langle g^{r****r}(y^{**}, z^{***}), h^{**}(x^{**}) \rangle = \langle h^{***}(g^{r****r}(y^{**}, z^{***})), x^{**} \rangle.
 \end{aligned}$$

از آن‌جا که h ضعیف فشرده است پس h^* نیز ضعیف فشرده است. بنابراین

$$f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z}^*) \subseteq f^{r****r}(Y^{**}, Z^{***}) = h^{***}(g^{r****r}(Y^{**}, Z^{***})) \subseteq h^{***}(W^{***}) \subseteq X^*$$

پس بنا به قضیه ۶ نگاشت f آرنز منظم است. از آرنز منظم f با استفاده از [۱۳، ۲.۱] نتیجه می‌گیریم

$$f^{r****r} = f^{****r} \text{ بنابراین}$$

$$(f^*)^{****}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) = f^{****r}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) = f^{r****r}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) \subseteq X^*$$

پس با استفاده از قضیه ۵ نگاشت f^* نیز آرنز منظم است.

ارتباط آرنز منظم و خاصیت انعکاسی جبر باناخ

دیلز^۱، رودریگز^۲ و ولاسکو^۳ [۴، ۱.۶] نشان دادند که برای نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \rightarrow Z$ ، نگاشت‌های f و f^* آرنز منظم‌اند اگر و تنها اگر $f^{r*} = f^{r***}$. در ادامه حالت کلی این قضیه را با روشی متفاوت به اثبات می‌رسانیم.

قرارداد ۱۲. برای سهولت در نگارش، از علامت f^n نیز استفاده می‌کنیم که منظور الحاقی n ام است. به‌عنوان مثال منظور از f^{3r} نگاشت f^{***r} است.

قضیه ۱۳. اگر f و f^{rn} آرنز منظم باشند آن‌گاه $f^{rn} = f^{3rn}$.

برهان. چون f آرنز منظم است پس $f^{3r} = f^{r(n+3)}$ بنابراین $f^{3rn} = f^{r(n+3)}$. از طرفی آرنز منظم f^{rn} نتیجه

می‌دهد که $f^{r(n+3)} = f^{rn} = f^{3rn}$ بنابراین $f^{3rn} = f^{rn}$ که همان حکم مطلوب است.

عکس قضیه ۱۳، برای حالت $n = 1$ همان‌گونه که اشاره شد در [۴، ۱.۶] به اثبات رسیده است. حالت‌های $n = 2, 3$ را در قضیه ۱۴ اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۴. فرض کنیم $f: X \times Y \rightarrow Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت،

(الف) اگر $f^{3r} = f^{r2r}$ آن‌گاه نگاشت‌های f و f^{r2} آرنز منظم‌اند.

(ب) اگر $f^{3r} = f^{r3r}$ آن‌گاه نگاشت‌های f و f^{r3} آرنز منظم‌اند.

برهان. الف) برای هر $x^{**} \in X^{**}, y^{**} \in Y^{**}, z^* \in Z^*$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \langle f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle &= \langle f^{***r}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle = \langle f^{***r}(z^*, y^{**}), x^{**} \rangle \\
 &= \langle f^{***r**}(x^{**}, \widehat{z}^*), y^{**} \rangle = \langle f^{***r**}(\widehat{z}^*, x^{**}), y^{**} \rangle \\
 &= \langle f^{r**r**}(\widehat{z}^*, x^{**}), y^{**} \rangle = \langle \widehat{z}^*, f^{r**r**}(x^{**}, y^{**}) \rangle \\
 &= \langle \widehat{x}^{**}, f^{r**r**}(y^{**}, z^*) \rangle = \langle y^{**}, f^{r**r}(z^*, x^{**}) \rangle \\
 &= \langle y^{**}, f^{r**}(x^{**}, z^*) \rangle = \langle f^{r***}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle
 \end{aligned}$$

$$= \langle f^{r^{***}r}(x^{**}, y^{**}), z^{**} \rangle.$$

بنابراین f آرنز منظم است. حالا نشان می‌دهیم $f^{r^{**}}$ آرنز منظم است. به عبارتی $f^{r^{*****}} = f^{r^{**}r^{***}r}$ از طرفی $f^{r^{**}r^{***}r} = f^{r^{***}r^{**}}$ پس کافی است نشان دهیم $f^{r^{*****}} = f^{r^{***}r^{**}}$ فرض کنیم $x^{****} \in X^{****}$ باشد و

$$\begin{aligned} (x_{\alpha}^{**}) \text{ توری در } X^{**} \text{ باشد که با توپولوژی ضعیف ستاره به } x^{****} \text{ همگرا است. در این صورت} \\ \langle f^{r^{*****}}(x^{****}, z^{***}), y^{**} \rangle &= \langle x^{****}, f^{r^{*****}}(z^{***}, y^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \\ &\langle f^{r^{*****}}(z^{***}, y^{**}), x_{\alpha}^{**} \rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{***}}(y^{**}, x_{\alpha}^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{***}r}(x_{\alpha}^{**}, y^{**}) \rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{***}}(x_{\alpha}^{**}, y^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{***}r}(y^{**}, x_{\alpha}^{**}) \rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle f^{r^{***}r}(z^{***}, y^{**}), x_{\alpha}^{**} \rangle = \langle x^{****}, f^{r^{***}r}(z^{***}, y^{**}) \rangle \\ &= \langle f^{r^{***}r^{**}}(x^{****}, z^{***}), y^{**} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $f^{r^{**}}$ نیز آرنز منظم است.

(ب) به طریق مشابه اثبات می‌شود.

سوال. آیا برعکس قضیه ۲.۳ برای $n > 3$ برقرار است؟

لم ۱۵. الف) اگر $g_1: X \times Y \rightarrow Y$ تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه $g_1^{r^{***}r}: X^{**} \times Y^{**} \rightarrow Y^{**}$ یک‌دار چپ است.

(ب) اگر $g_2: X \times Y \rightarrow X$ تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه $g_2^{***}: X^{**} \times Y^{**} \rightarrow X^{**}$ یک‌دار راست است. برهان. ما فقط (الف) را اثبات می‌کنیم. (ب) به طریق مشابه اثبات می‌شود. فرض کنیم g_1 تقریباً یک‌دار چپ باشد. پس تور کران‌دار (e_{α}) در X وجود دارد که برای هر $y \in Y$

$$\lim_{\alpha} g_1(e_{\alpha}, y) = y.$$

چون تور (e_{α}) کران‌دار است پس با رفتن به زیر تور مناسبی می‌توان فرض کرد که $e^{**} \in X^{**}$ موجود است که این تور با توپولوژی ضعیف ستاره به e^{**} همگراست. فرض کنیم تور (y_{β}) در Y نیز با توپولوژی ضعیف ستاره به $y^{**} \in Y^{**}$ همگرا باشد. در این صورت برای هر $y^{*} \in Y^{*}$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle g_1^{r^{***}r}(e^{**}, y^{**}), y^{*} \rangle &= \langle g_1^{r^{***}}(y^{**}, e^{**}), y^{*} \rangle = \langle y^{**}, g_1^{r^{**}}(e^{**}, y^{*}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \langle g_1^{r^{**}}(e^{**}, y^{*}), y_{\beta} \rangle = \lim_{\beta} \langle e^{**}, g_1^{r^{*}}(y^{*}, y_{\beta}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle g_1^{r^{*}}(y^{*}, y_{\beta}), e_{\alpha} \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle y^{*}, g_1^r(y_{\beta}, e_{\alpha}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle y^{*}, g_1(e_{\alpha}, y_{\beta}) \rangle = \lim_{\beta} \langle y^{*}, y_{\beta} \rangle = \langle y^{**}, y^{*} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $g_1^{r^{***}r}(e^{**}, y^{**}) = y^{**}$ که همان حکم مطلوب است.

تبصره ۱۶. در لم ۱۵ اگر g_1 تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه لزوماً g_1^{***} یک‌دار چپ نیست و اگر g_2 تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه لزوماً $g_2^{r^{***}r}$ یک‌دار راست نیست. لائو^۱ و اولگر نشان دادند که اگر $A = k(c^{\circ})$ جبر باناخ از عملگرهای فشرده بر فضای دنباله‌ای c° باشد آن‌گاه A دارای همانی تقریبی کران‌دار است و اگر $g_1 = \pi$ آن‌گاه

g_1^{***} یک‌دار چپ نیست. همچنین اگر $g_2 = \pi^r$ آن‌گاه g_2^{r***} یک‌دار راست نیست. برای اطلاعات بیشتر به [۷، ۲.۵] مراجعه شود.

در [۴.۵، ۶] بیان و اثبات شده است که اگر جبر باناخ A دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد، آن‌گاه $\pi^{r***} = \pi^{r**r}$ اگر و تنها اگر A یک فضای باناخ انعکاسی باشد. از آن‌جا که فرض $\pi^{r***} = \pi^{***r}$ بسیار قوی است (با توجه به [۲.۲، ۸]، معادل با منظم بودن π و π^* است)، ما با جای‌گزینی فرض آرنز منظم π^* که به مراتب فرض ضعیف‌تری است، مطلب بالا را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۷. الف) فرض کنیم $g: X \times X \rightarrow X$ تقریباً یک‌دار راست باشد، در این صورت g^* آرنز منظم است اگر و تنها اگر X انعکاسی باشد.

ب) فرض کنیم $g: X \times X \rightarrow X$ تقریباً یک‌دار چپ باشد، در این صورت g^{r*} منظم است اگر و تنها اگر X انعکاسی باشد.

برهان. الف) فرض کنیم g^* منظم باشد. از آن‌جا که g تقریباً یک‌دار راست است پس g^{***} یک‌دار راست است. بنابراین $e^{**} \in X^{**}$ وجود دارد که برای هر $x^{**} \in X^{**}$ داریم $g^{***}(x^{**}, e^{**}) = x^{**}$ برای هر $x^{***} \in X^{***}$ داریم

$$\begin{aligned} \langle x^{***}, x^{**} \rangle &= \langle x^{***}, g^{***}(x^{**}, e^{**}) \rangle = \langle g^{****}(x^{***}, x^{**}), e^{**} \rangle \\ &= \langle g^{*r***}(x^{***}, x^{**}), e^{**} \rangle = \langle g^{*r***}(x^{**}, x^{***}), e^{**} \rangle \\ &= \langle g^{*r**}(x^{***}, e^{**}), x^{**} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $g^{*r**}(x^{***}, e^{**}) = x^{***}$ اما چون $g^{*r**}: X^{***} \times X^{**} \rightarrow X^*$ پس $x^{***} \in X^*$ در نتیجه X انعکاسی است. اگر X انعکاسی باشد آن‌گاه آرنز منظم g^* بدیهی است.

ب) به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

نتیجه ۱۸. فرض کنیم A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار باشد. در این صورت، π^* آرنز منظم است اگر و تنها اگر A یک فضای انعکاسی باشد.

برهان. کافی است در قضیه ۱۷ π را جای‌گزین g و A را جای‌گزین X کنیم.

منابع

1. Arens R., "The adjoint of a bilinear operation", Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 839-848.
2. Arikan N., "Arens regularity and reflexivity", Quart. J. Math. Oxford Ser. 32 (1981) 383-388.
3. Arikan N., "A simple condition ensuring the Arens regularity of bilinear mappings", Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982) 525-532.
4. Bonsall F. F., Duncan J., "Complete normed algebras", Springer-Verlag, Berlin (1973).
5. Dales H. G., "Banach algebras and automatic continuity", Oxford (2000).

6. Dales H. G., Rodrigues-Palacios A., Velasco M. V., "The second transpose of a derivation", J. London Math. Soc. 64 (2) (2001) 707-721.
7. Lau A. T., Ülger A., "Topological center of certain dual algebras", Trans. Amer. Math. Soc. 384 (3) (1996) 1191-1212.
8. Mohamadzadeh S., Vishki H. R. E., "Arens regularity of module actions and the second adjoint of a derivation", Bulletin of the Australian Math Soc. 77 (2008) 465-476.
9. Morrison T. J., "Functional analysis, An introduction to Banach space theory", John Wiley & Sons, Inc. (2001).
10. Ülger A., "Weakly compact bilinear forms and Arens regularity", Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987) 697-704.
11. Ülger A., "Some stability properties of Arens regular bilinear operators", Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1991) 443-454.
12. Rudin W., "Functional Analysis", McGraw-Hill, New York, Inc. (1973).
13. Sheikhalı A., Kanzi N., "Arens regularity of bilinear mapping and reflexivity", J. Phys. Math. Stat. 5(1) (2018) 65-68.