Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# Asymptotic Behavior of Graded Components of Local Cohomology Modules

Maryam Jahangiri[1], Azadeh NadAli[2]

1. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

E-mail: Jahangiri@khu.ac.ir

2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

E-mail: a.nadali1984@gmail.com

| Article Info | ABSTRACT |
|---|---|

**Article type:**

Research Article

**Article history:**

Received:
22 May 2020
Revised form:
10 December 2020
Accepted:
22 December 2020
Published online:
22 November 2022

**Keywords**:
graded local cohomology modules; Hilbert cohomological function; relative Cohen-Macaulay; support.

**Introduction**

Let $R = \bigoplus_{n \epsilon \mathbb{N}_0} R_n$ be a standard graded Noetherian ring, i.e. $R_0$ is a commutative Noetherian ring and $R$ is generated (as an $R_0$-algebra) by finitely many elements of degree one, $R_+ = \bigoplus_{n \epsilon \mathbb{N}} R_n$ be the irrelevant ideal of $R$ and $\boldsymbol{a}$ stands for a homogeneous ideal of $R$. Also, $M$ denotes a finitely generated graded $R$-module.

For $i \epsilon \mathbb{N}_0$ and $n \epsilon \mathbb{Z}$ let $H^i_{\boldsymbol{a}}(M)_n$ denotes the $n$-th component of the $i$-th graded local cohomology module $H^i_{\boldsymbol{a}}(M)$ of $M$ with support in $\boldsymbol{a}$ (our terminology on local cohomology comes from [3]). It is well-known that $H^i_{R_+}(M)_n$ is a finitely generated $R_0$-module for all $n \epsilon \mathbb{Z}$ and it vanishes for all sufficiently large values of $n$ ([3, 15.1.5]).

In spite of the case $n \to +\infty$, the asymptotic behavior of $H^i_{R_+}(M)_n$ when $n \to -\infty$ is so complicated, see for example [4], and it attracts lots of interest, see [6] and [1], for a good survey on this topic. Also, in [5] the authors studied the graded components of $H^i_{\boldsymbol{a}}(M)$ in the case where $\boldsymbol{a}$ is a homogeneous ideal of $R$ containing the irrelevant ideal.

In the case where $R_0$ is an Artinian ring, for all $i \epsilon \mathbb{N}_0$,

$$h^i_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}(n \to length_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n)),$$

is called the $i$-th Hilbert cohomological function of $M$. In [2], Brodmann et. all. studied the problem of finiteness of the set of Hilbert cohomological functions of some classes of graded modules. In this paper, we also consider this problem.

Another reason of this paper, is to study the support of graded local cohomology modules $H_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)$ of $M$ with support in an arbitrary homogeneous ideal $\boldsymbol{a}$ of $R$. Let

$$\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) \coloneqq \sup\{\mathrm{i}\epsilon\mathbb{Z} \mid H_{\boldsymbol{a}}^{i}(M) \neq 0\},$$

denotes the cohomological dimension of $M$ with respect to $\boldsymbol{a}$. In [1, 3.7], it is shown that the set $\mathrm{Supp}_{R_0}\left(H_{R_+}^{\mathrm{cd}_{R_+}(M)}(M)_n\right)$ is eventually stable when $n \to -\infty$, i.e. there exists $X \subseteq \mathrm{Spec}(R_0)$ such that

$$\mathrm{Supp}_{R_0}\left(H_{R_+}^{cd_{R_+}(M)}(M)_n\right) = X, \qquad \text{for all } n \ll 0.$$

In this paper, we study the asymptotic behavior of the set $\mathrm{Supp}_{R_0}(H_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)_n)$ when $n \to -\infty$.

**Materials and Methods**

First, in a special case we describe $H_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)$ in terms of some homologies of the minimal graded free resolution of $M$. Then, as a consequence, we find a class of graded modules with a finite set of Hilbert cohomological functions.

**Results and Discussions**

We show that, in a special case, the support and dimension of $H_{R_+}^{i}(M)_t$ have upper bound which doesn't depend on $i$ and $M$ for sufficiently small values of $t$. Also, it is shown that, in some cases, the set $\left\{\mathrm{Supp}_{R_0}\left(H_{\boldsymbol{a}}^{cd_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_n\right)\right\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$ is eventually increasing, in the sense that $\mathrm{Supp}_{R_0}\left(H_{\boldsymbol{a}}^{cd_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_n\right) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\left(H_{\boldsymbol{a}}^{cd_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_{n-1}\right)$ for all $n \ll 0$.

**Conclusion**

It is worth to find cases for the existence of a non-zero divisor $\boldsymbol{x}$ on the module $M$ in the ideal $\boldsymbol{a}$ for which

$$\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M/xM) = \mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) - 1.$$

It helps us to study the last non-vanishing local cohomology module of M with support in $\boldsymbol{a}$.

## References


1. Brodmann M., "Cohomological invariants of coherent sheaves over projective schemes - a survey", in “Local Cohomology and its Applications” (G. Lyubeznik, Ed), 91-120, M. Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 226 (2001).
2. Brodmann M., Jahangiri M., Linh C. H., "Boundedness of cohomology", J. Algebra, 323 (2010) 458-472.
3. Brodmann M., Sharp R.Y., "Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications", Cambridge Studies in Advanced Mathematics 60, Cambridge University Press, 1998.
4. Chardin M., Cutkosky S., Herzog J., Srinivasan H., "Duality and tameness", Michigan Math. J. 57 (2008) 137- 155.
5. Jahangiri M., Rahimi A., "Relative Cohen-Macaulayness and relative unmixedness of bigraded modules", J. Commut. Algebra, 4 (2012) no. 4, 551- 575.
6. Jahangiri M., Zakeri H., "Local cohomology modules with respect to an ideal containing the irrelevant ideal", J. Pure Applied Algebra 213 (2009) 573-581.
7. Lyubeznik G., "On the vanishing of local cohomology in characteristic p > 0", Compositio Math. 142 (2006) 207-221.
8. Rotthaus C., Sega L. M., "Some properties of graded local cohomology modules", J. Algebra, 283 (2005) 232 - 247.
9. Sabzrou H., Tousi M., "Local cohomology at monomial ideals in R-sequences", Comm. Alg., 36 (2008) 37-52.



**How to cite:** Jahangiri, M., NadAli, A., (2022) Asymptotic Behavior of Graded Components of Local Cohomology Modules. *Mathematical Researches*, 8 (3), 45-55





Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

**پژوهش‌های ریاضی**

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# رفتار مجانبی مؤلفه‌های مدرج مدول‌های کوهمولوژی موضعی

**مریم جهانگیری[۱] ✉، آزاده نادعلی[۲]**

۱. گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. پست الکترونیکی: Jahangiri@khu.ac.ir

۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. پست الکترونیکی: a.nadali1984@gmail.com

| اطلاعات مقاله | چکیده |
| --- | --- |

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۹/۰۳/۲۲
**تاریخ بازنگری:** ۱۳۹۹/۰۹/۲۰
**تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹/۱۰/۰۲
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

**واژه‌های کلیدی:**
مدول‌های کوهمولوژی موضعی مدرج،
توابع کوهمولوژیکی هیلبرت،
کوهن- مکالی نسبی،
محمل.

فرض کنید $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ یک حلقه مدرج استاندارد، $\boldsymbol{a}$ ایده‌آلی همگن از $R$ و $M$ یک $R$-مدول مدرج متناهی‌مولد باشد. در این مقاله، رفتار مجانبی محمل [1] مؤلفه‌های مدول‌های کوهمولوژی موضعی مدرج $\mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}^i_{\boldsymbol{a}}(M)_t)$ را وقتی $t\to-\infty$ بررسی می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر، این رفتار مجانبی را در هر یک از حالات زیر در نظر می‌گیریم:

۱. حلقه $R$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به $\boldsymbol{a}$ است.

۲. $i=\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M)$.

**استناد**: جهانگیری، مریم؛ نادعلی، آزاده؛ (۱۴۰۱). رفتار مجانبی مؤلفه‌های مدرج مدول‌های کوهمولوژی موضعی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۵۵-۴۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی



[1] Support

## ۱. مقدمه

درسراسر این مقاله، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود، حلقه $R=\bigoplus_{n\epsilon\mathbb{N}_0} R_n$ یک حلقه نوتری مدرج استاندارد است، یعنی $R_0$ یک حلقه نوتری جابه‌جایی و $R$ (به عنوان $R_0$-جبر) توسط تعداد متناهی عنصر درجه یک تولید می‌شود. $R_+ := \bigoplus_{n\epsilon\mathbb{N}} R_n$ ایده‌آل غیرمرتبط $R$ و $\boldsymbol{a}$ یک ایده‌آل همگن $R$ است. همچنین $M$ یک $R$-مدول مدرج ناصفر و متناهی مولد درنظر گرفته می شود.

اگر $i\epsilon\mathbb{N}_0$ و $n\epsilon\mathbb{Z}$، $n$-امین مؤلفه $i$-امین مدول کوهمولوژی موضعی مدرج $M$ نسبت به $\boldsymbol{a}$ را با نماد $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)_n$ نشان می‌دهند (اصطلاحات و نمادهای ما در کوهمولوژی موضعی از منبع [۳] پیروی می‌کند). این خاصیت که برای هر $n\epsilon\mathbb{Z}$، $\mathrm{H}_{R_+}^{i}(M)_n$ یک $R_0$-مدول متناهی مولد و برای $n$ های به قدر کافی بزرگ این مدول برابر صفر است، مطلبی شناخته شده است ([۳، ۵،۱،۱۵]).

علی‌رغم حالت $n \to +\infty$، رفتار مجانبی مؤلفه‌های $\mathrm{H}_{R_+}^{i}(M)_n$ وقتی $n \to -\infty$ بسیار پیچیده است و مطالعات زیادی روی آن انجام شده است، به عنوان مثال [۴] را ببینید، همچنین به عنوان منبعی مناسب برای بررسی این موضوع می‌توانید به [۸] و [۱] مراجعه کنید. در [۶] نیز، درحالتی که $\boldsymbol{a}$ یک ایده‌آل همگن $R$ و شامل ایده‌آل غیرمرتبط باشد، رفتار مجانبی مؤلفه‌های مدرج $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)$ بررسی شده‌اند.

در بخشی از این مقاله، به بررسی رفتار مجانبی محمل مدول‌های کوهمولوژی موضعی مدرج $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)$ وقتی $\boldsymbol{a}$ ایده‌آل همگن دلخواهی از $R$ است، می‌پردازیم.

فرض کنید $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) := \sup\{i\epsilon\mathbb{Z} \mid \mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M) \neq 0\}$ نشان‌دهندۀ بعد کوهمولوژیکی $M$ نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$ باشد. در [۱، ۷،۳] نشان داده می‌شود که مجموعه $\left\{\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{R_+}^{\mathrm{cd}_{R_+}(M)}(M)_n\right)\right\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$ وقتی $n \to -\infty$، ایستا است. یعنی زیر مجموعه $X$ از $\mathrm{Spec}(R_0)$ وجود دارد به طوری که

$$\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{R_+}^{\mathrm{cd}_{R_+}(M)}(M)_n\right) = X,$$

برای هر $n \ll 0$، که این نماد به معنی $n$ های بقدر کافی کوچک می‌باشد.

در این مقاله، رفتار مجانبی مجموعه $\left\{\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)_n\right)\right\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$ را وقتی $n \to -\infty$ مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در حالتی خاص، محمل و بُعد مدول‌های $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{i}(M)_t$، برای مقادیر به حد کافی کوچک $t$ ، کران بالایی دارند که به $i$ و $M$ وابسته نیست (گزاره ۷،۲).

همچنین نشان داده می‌شود که در حالاتی خاص، مجموعه $\left\{\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_n\right)\right\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$ صعودی است، به این معنی که $\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_n\right) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M)}(M)_{n-1}\right)$ برای $n \ll 0$ (گزاره ۱۰،۲).

برادمن و همکاران در [۲]، تحت شرایطی خاص به مطالعه متناهی بودن مجموعه‌هایی از توابع کوهمولوژیکی هیلبرت[۱] پرداختند، یادآوری می‌کنیم که در حالتی که $R_0$ حلقه‌ای آرتینی است برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$، تابع

$$h_M^i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}(n \to \mathrm{length}_{R_0}(\mathrm{H}_{R_+}^i(M)_n),$$

$i$-امین تابع کوهمولوژیکی هیلبرت $M$ نامیده می‌شود. در این مقاله، ما این مساله را نیز بررسی می‌کنیم (گزاره ۵,۲). به عبارت دقیق‌تر ابتدا، در حالتی خاص، ساختار مدول $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)$ را برحسب برخی همولوژی‌های تحلیل آزاد مدرج مینیمال $M$ بیان می‌کنیم. سپس، به عنوان یک نتیجه، کلاسی از مدول‌های مدرج با مجموعه‌ای متناهی از توابع کوهمولوژیکی هیلبرت پیدا می‌کنیم.

## ۲. نتایج

این بخش را با یادآوری دو مفهوم اساسی آغاز می‌کنیم.

**تعریف ۱,۲.**

(۱) طبق [۵]، مدول $M$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، از رتبه $n$ [۲]نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathrm{grade}_{\boldsymbol{a}}(M) = \mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) = n,$$

که در آن $\mathrm{grade}_{\boldsymbol{a}}(M)$ نشان‌دهنده طول بزرگترین $M$-رشته در ایده‌آل $a$ است. به عبارتی، با توجه به [۳، ۷,۲,۶]، مدول $M$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، از رتبه $n$ است، هرگاه مدول $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)$ تنها در نقطه $i = n$ ناصفر باشد.

(۲) فرض کنید $(R_0, m_0)$ حلقه‌ای موضعی باشد و

$$\boldsymbol{F}_\circ^M : \cdots \to F_{i+1} \to F_i \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to 0$$

تحلیل آزاد مدرج مینیمال $M$ به عنوان $R$-مدول باشد. بنابراین هر $F_i$ با جمع مستقیم تعدادی متناهی از کپی‌های $R(-j)$، برای هر $\mathrm{j}\epsilon\mathbb{Z}$، یکریخت است. برای هر $\mathrm{j}\epsilon\mathbb{Z}$ و $i\epsilon\mathbb{N}_0$، تعداد جمعوندهای مستقیم $F_i$ یکریخت با $R(-j)$ ثابتی از $M$ است که $ij$-امین عدد بتی مدرج $M$ [۳]نامیده می‌شود و با نماد $\beta_{ij}^R(M)$ نشان داده می‌شود.

در لم بعدی ساختار مدول‌های $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)$ را برحسب برخی همولوژی‌های تحلیل آزاد مدرج مینیمال $M$ بیان می‌کنیم.

---

[1] Hilbert cohomological functions.

[2] Relative Cohen-Macaulay with respect to $a$ of rank $n$.

[3] $ij$ −th graded betti number of $M$.

**لم ۲،۲.** فرض کنید $(R_0, m_0)$ حلقه‌ای موضعی و $R$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، از رتبه $n$ باشد. همچنین فرض کنید

$$\boldsymbol{F}_\circ^M: \cdots \to F_{i+1} \to F_i \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to 0$$

تحلیل آزاد مدرج مینیمال $M$ باشد. در این صورت، برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$، یکریختی‌های همگن

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{n-i}(M) \cong \mathrm{H}_i(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(\mathbf{F}_\circ^{\mathrm{M}}))$$

از $R$-مدول‌های مدرج وجود دارند.

**برهان.** از آنجایی که $R$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، از رتبه $n$ است، $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(-)$ یک تابع‌گون هموردا و دقیق راست است و برای هر $i\epsilon\mathbb{N}$ و هر $R$-مدول آزاد $F$، $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{n-i}(F) = 0$. همچنین می‌توان دید که

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(M) = \mathrm{Coker}(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(F_1) \to \mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(F_0)) = \mathrm{H}_0(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(\mathbf{F}_\circ^{\mathrm{M}})).$$

اکنون دنباله‌های قویا همبند[۴] $(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^{n-i}(-))_{i\epsilon\mathbb{N}_0}$ و $(\mathrm{H}_i(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(\mathbf{F}_\circ^-)))_{i\epsilon\mathbb{N}_0}$ از تابع‌گون‌های هموردا را در نظر می‌گیریم و با توجه به [۳، ۵،۳،۱]، نتیجه حاصل می‌شود. ■

**تعریف ۳،۲.** فرض کنید حلقه پایه $R_0$ آرتینی باشد. در این صورت برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$، $i$-امین تابع کوهمولوژیکی هیلبرت $M$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_M^i: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \to \mathrm{length}_{\mathrm{R}_0}\left(H_{R_+}^i(M)_n\right).$$

قرار می‌دهیم $h_M \coloneqq \left(h_M^i(n)\right)_{(i,n)\epsilon\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}}$ .

در [۲]، برادمن و همکاران، برخی از زیرکلاس‌های کلاس همه زوج‌های $(R, M)$، مانند $\mathcal{C}$، را بررسی کرده‌اند که در آن $R$ یک حلقهٔ مدرج استاندارد با حلقه پایه آرتینی $R_0$ و $M$ یک $R$- مدول مدرج متناهی مولد است، به طوری که $\#\{h_M | (R, M)\epsilon\mathcal{C}\}$ یک مجموعهٔ متناهی است، که نماد # به معنی عدد اصلی این مجموعه می‌باشد. گزاره بعدی در رابطه با این نوع کلاس‌ها است.

[4] Strongly connected sequence.

**نمادگزاری ۴,۲.** برای اعداد ثابت $l, d\epsilon\mathbb{N}_0$، فرض کنید $\mathcal{C}_{d,l}$ کلاس همه زوج‌های $(R, M)$ باشد که در آن $R$ یک جبر مدرج استاندارد روی یک حلقه پایه موضعی آرتینی است به طوری که $R$ کوهن-مکالی نسبی نسبت به $R_+$ از رتبه $d$ با شرط $h_R^d(-d) \leq l$ است و $M$ یک $R$-مدول مدرج متناهی‌مولد است.

**گزارهٔ ۵,۲.** فرض کنید $l, d\epsilon\mathbb{N}_0$ و $\#\{\mathrm{j}\epsilon\mathbb{Z} |\ \exists i\epsilon\mathbb{N}_0,\ \exists(R, M)\epsilon\mathcal{C}_{d,l}\ ;\ \beta_{ij}^R(M) \neq 0\} < \infty$. در این صورت $\#\{h_M | (R, M)\epsilon\mathcal{C}_{d,l}\} < \infty$.

**برهان.** فرض کنید $(R, M)\epsilon\mathcal{C}_{d,l}$ و $i\epsilon\mathbb{N}_0$. در این صورت، با توجه به لم ۲,۲، برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$ داریم

$$h_M^i(-i) \leq \mathrm{length}_{\mathrm{R}_0}\left(\bigoplus_{j\epsilon\mathbb{Z},\beta_{(d-i)j}^R(M)\neq 0} \mathrm{H}_{R_+}^d\left(R(-j)\right)_{-i}\right)$$
$$= \sum_{\mathrm{j}\epsilon\mathbb{Z},\beta_{(d-i)j}^R(M)\neq 0} h_R^d(-i-j)\ .$$

با استفاده از [۲، ۴,۴] و فرض روی اعداد بتی، حاصل‌جمع فوق یک عدد صحیح است که به $i$ وابسته است. اکنون، با استفاده مجدد از [۲، ۴,۴]، نتیجه حاصل می‌شود.

■

در ادامه این مقاله، رفتار مجانبی دنباله $\left\{\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)_t\right)\right\}_{t\epsilon\mathbb{Z}}$ را وقتی $t \to -\infty$ مطالعه می‌کنیم.

**لم ۶,۲.** فرض کنید $R_0$ موضعی و $R$ کوهن-مکالی نسبی، نسبت به ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، از رتبه $\mathrm{n} > 0$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر، برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$ و $t\epsilon\mathbb{Z}$، برقرارند.

أ. $\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)_t\right) \subseteq \left\{\mathrm{p} \in \mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(R)_{t-j}\right) \middle| j \in \mathbb{Z}, \beta_{(n-i)j}^R(M) \neq 0\right\}$؛

ب. $\dim\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)_t\right) \leq \max\left\{\dim\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(R)_{t-j}\right) \middle| j \in \mathbb{Z}, \beta_{(n-i)j}^R(M) \neq 0\right\}$.

**برهان.** فرض کنید $i\epsilon\mathbb{N}_0$، $t\epsilon\mathbb{Z}$ و $\boldsymbol{F}_\circ^M$ تحلیل آزاد مدرج مینیمال $M$ باشد. در این صورت با استفاده از لم ۲,۲ داریم

$$\mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^i(M)_t\right) = \mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}_{n-i}(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(\boldsymbol{F}_\circ^M))_t) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\left(\bigoplus_{j\epsilon\mathbb{Z},\beta_{(n-i)j}^R(M)\neq 0} \mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n\left(R(-j)\right)_t\right)$$
$$= \bigcup_{j\epsilon\mathbb{Z},\beta_{(n-i)j}^R(M)\neq 0} \mathrm{Supp}_{R_0}\left(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^n(R)_{t-j}\right)$$

و نتیجه حاصل می‌شود. ■

گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که محمل و بُعد مدول‌های $\mathrm{H}_{R_+}^i(M)_t$ کران بالایی دارند که برای مقادیر به حد کافی کوچک $t$، به $i$ و $M$ وابسته نیستند.

**گزارهٔ ۷,۲.** فرض کنید شرایط ۶,۲ برقرار باشد و $\boldsymbol{a} = R_+$. در این صورت زیرمجموعه $X$ از $\mathrm{Spec}(R_0)$ و $d\epsilon\mathbb{N}_0$ وجود دارد به طوری که برای هر $i\epsilon\mathbb{N}_0$ و $t \ll 0$،

أ. $\mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^i_{R_+}(M)_t\big) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = X$؛

ب. $\dim\big(\mathrm{H}^i_{R_+}(M)_t\big) \leq \dim\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = d$.

**برهان.** از آنجا که $\mathrm{cd}_{R_+}(R) = n$، با توجه به [۱، ۷,۳]، $t_0 \epsilon \mathbb{Z}$، $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Spec}(R_0)$ و $d \epsilon \mathbb{N}_0$ وجود دارند به طوری که

$$\mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = X \quad \text{و} \quad \dim\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = d,$$

برای هر $t \leq t_0$. بنابراین با استفاده از لم قبل برای هر $t \leq t_0$ داریم

$$\mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^i_{R_+}(M)_t\big) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = X,$$

و

$$\dim\big(\mathrm{H}^i_{R_+}(M)_t\big) \leq \dim\big(\mathrm{H}^n_{R_+}(R)_t\big) = d.$$

■

در [۱، ۷,۳] نشان داده می‌شود که اگر $c := \mathrm{cd}_{R_+}(M) > 0$، آن‌گاه برای مقادیر به حد کافی کوچک $t$ داریم $H^c_{R_+}(M)_t \neq 0$ و اینکه دنباله $\big\{\mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^c_{R_+}(M)_t\big)\big\}_{t\epsilon\mathbb{Z}}$، وقتی $t \to -\infty$، صعودی است یعنی $\mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^c_{R_+}(M)_t\big) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}\big(\mathrm{H}^c_{R_+}(M)_{t-1}\big)$، برای هر $t \ll 0$. در ادامه مقاله قصد داریم این نتیجه را برای ایده‌آل‌های همگن دلخواه $a$ از $R$ بررسی کنیم.

**لم ۸,۲.** فرض کنید $c := \mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) > 0$ و عنصر $x \epsilon (\boldsymbol{a} \cap R_1) \backslash \mathrm{zd}_R(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M/xM) = c - 1$. در این صورت برای هر $t \ll 0$،

أ. $\mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_t) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_{t-1})$؛

ب. $\mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_t \neq 0$.

**برهان.** با به کار بردن تابع‌گون $\Gamma_{\boldsymbol{a}}(-)$ روی دنباله دقیق همگن $0 \to M(-1) \xrightarrow{.x} M \to M/xM \to 0$، برای هر $t\epsilon\mathbb{Z}$، بروریختی $\mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_{t-1} \to \mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_t \to 0$ به دست می‌آید. اکنون، با توجه به اینکه $t\epsilon\mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{H}^c_{\boldsymbol{a}}(M)_t \neq 0$، احکام فوق حاصل می‌شود. ■

**تعریف ۹,۲.** فرض کنید $(R, \boldsymbol{m})$ یک حلقه موضعی از مشخصه مثبت $p$ باشد. همچنین فرض کنید که برای هر $s\epsilon\mathbb{N}$، $F^s$ نشان‌دهندهٔ $R$-همریختی القا شده به وسیله $s$-امین توان همریختی فروبنیوس[5] $f^s: R \to R \ (r \to r^{p^s})$ روی $\mathrm{H}^i_{\boldsymbol{m}}(R)$

[5] Frobenius homomorphism.

باشد (درنتیجه $F^s$ یک همریختی از گروه‌های آبلی است به طوری که برای هر $r\epsilon R$ و هر $x\epsilon \mathrm{H}_{\boldsymbol{m}}^i(R)$، $r.x = r^{p^s}x$).
در این صورت Fdepth$(R)$ برابر است با کوچکترین عدد صحیح $i$ به طوری که برای هر $s\epsilon\mathbb{N}$، $F^s(\mathrm{H}_{\boldsymbol{m}}^i(R)) \neq 0$.

**گزاره ۱۰،۲.** فرض کنید $c := \mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M) > 0$. در این صورت تحت هر یک از شرایط زیر، برای هر $t \ll 0$، $\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^c(M)_t \neq 0$ و همچنین $\mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^c(M)_t) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_0}(\mathrm{H}_{\boldsymbol{a}}^c(M)_{t-1})$.

أ. تا حد رادیکال، $\boldsymbol{a}$ توسط یک $M$-رشته منظم از عناصر $R_1$ از طول بیشتر از ۱ تولید شود؛

ب. $M$=$R$ حلقه‌ای موضعی منظم از مشخصه مثبت است، به طوری که $R_0$ میدان است و $\boldsymbol{a} \cap R_1 \neq 0$؛

ج. $M$=$R$ حلقه‌ای موضعی و شامل یک میدان است و ایده‌آل $\boldsymbol{a}$، تا حد رادیکال توسط تک‌جمله‌ای‌هایی بر حسب یک $R$-رشته تولید شود و $\boldsymbol{a} \cap R_1 \neq 0$.

**برهان.** با توجه به لم قبل کافی است نشان دهیم که در هر یک از موارد ذکر شده در بالا، $x\epsilon(\boldsymbol{a} \cap R_1)\backslash\mathrm{zd}_R(M)$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M/xM) = c - 1$.

أ. فرض کنید $n > 1$ و $\mathrm{rad}(\boldsymbol{a}) = (x_1, \dots, x_n)$ که $x_1$، ...، $x_n$ یک $M$-رشته منظم از عناصر $R_1$ است. در این صورت با استفاده از [۳، ۳،۳،۳ و ۷،۲،۶]، $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(M/x_1M) = c - 1$.

ب. با استفاده از [۷، ۳،۴]، $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}}(R) = \dim(R) - \mathrm{Fdepth}(R/\boldsymbol{a})$. همچنین $x\epsilon(\boldsymbol{a} \cap R_1)\backslash\mathrm{zd}(R)$ وجود دارد. از آنجایی که $R_0$ یک میدان است، $R_+$ ایده‌آل ماکسیمال همگن منحصر به فرد $R$ است و $x \notin R_+^2$. بنابراین $R/xR$ یک حلقه موضعی منظم است. با استفاده مجدد از [۷، ۳،۴]، داریم

$$\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}/xR}(R/xR) = \dim(R/xR) - \mathrm{Fdepth}(\frac{R}{xR}/\frac{\boldsymbol{a}}{xR})$$
$$= \dim(R) - 1 - \mathrm{Fdepth}(R/\boldsymbol{a}) = c - 1.$$

ج. فرض کنید $x_1$، ...، $x_n$ یک $R$-رشته باشد و $\boldsymbol{a}$، تا حد رادیکال، توسط تک‌جمله‌ای‌ها بر حسب $x_1$، ...، $x_n$ تولید شود. در این صورت فرض $\boldsymbol{a} \cap R_1 \neq 0$ ایجاب می‌کند که $i = 1, \dots, n$ موجود باشد به طوری که $\deg(x_i) = 1$ و $x_1$، ...، $\hat{x}_i$، ...، $x_n$ یک $R/x_iR$-رشته باشد و $\boldsymbol{a}/x_iR$ بتواند توسط تک‌جمله‌ای‌هایی در $x_1$، ...، $\hat{x}_i$، ...، $x_n$ تولید شود. بنابراین با استفاده از [۹، ۳،۴] و قرار دادن $x := x_i$، داریم

$$\mathrm{cd}_{\boldsymbol{a}/xR}(R/xR) = \mathrm{pd}_{\frac{R}{xR}}(\frac{R}{xR}/\frac{\boldsymbol{a}}{xR}) = \mathrm{depth}(R/xR) - \mathrm{depth}(R/\boldsymbol{a})$$
$$= \mathrm{depth}(R) - 1 - \mathrm{depth}(R/\boldsymbol{a}) = \mathrm{pd}_R(R/\boldsymbol{a}) - 1 = c - 1.$$

■

اکنون با توجه به لم فوق، نتایج حاصل می‌شوند.

## References

1. Brodmann M., "Cohomological invariants of coherent sheaves over projective schemes - a survey", in “Local Cohomology and its Applications” (G. Lyubeznik, Ed), 91-120, M. Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 226 (2001).
2. Brodmann M., Jahangiri M., Linh C. H., "Boundedness of cohomology", J. Algebra, 323 (2010) 458-472.
3. Brodmann M., Sharp R.Y., "Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications", Cambridge Studies in Advanced Mathematics 60, Cambridge University Press, 1998.
4. Chardin M., Cutkosky S., Herzog J., Srinivasan H., "Duality and tameness", Michigan Math. J. 57 (2008) 137- 155.
5. Jahangiri M., Rahimi A., "Relative Cohen-Macaulayness and relative unmixedness of bigraded modules", J. Commut. Algebra, 4 (2012) no. 4, 551- 575.
6. Jahangiri M., Zakeri H., "Local cohomology modules with respect to an ideal containing the irrelevant ideal", J. Pure Applied Algebra 213 (2009) 573-581.
7. Lyubeznik G., "On the vanishing of local cohomology in characteristic p > 0", Compositio Math. 142 (2006) 207-221.
8. Rotthaus C., Sega L. M., "Some properties of graded local cohomology modules", J. Algebra, 283 (2005) 232 - 247.
9. Sabzrou H., Tousi M., "Local cohomology at monomial ideals in R-sequences", Comm. Alg., 36 (2008) 37-52.