Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Co-Roman domination in Grids

Rana Khoeilar[1] ✉, Marzieh Soroudi[2], Maryam Atapour[3]

1. Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University Tabriz, I.R. Iran.

✉E-mail: khoeilar@azaruniv.ac.ir

2. Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University Tabriz, I.R. Iran.

E-mail: m.soroudi@azaruniv.ac.ir

3. Department of Mathematic, Faculty of basic sciences University of Bonab, Bonab, I.R. Iran.

E-mail: m.atapour@ubonab.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
8 June 2019
Revised form:
2 February 2021
Accepted:
6 February 2020
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Roman dominating function;
co-Roman dominating function;
grid;
Roman domination number;
co-Roman domination number.

ABSTRACT

Abstract

Let G = (V, E) be a simple graph with vertex set V and let $f: V \rightarrow \{0,1,2\}$ be a function of weight $\omega(f) = \sum_{v\in V(G)} f(v)$. A vertex v is protected with respect to f, if $f(v) > 0$ or $f(v) = 0$ and v is adjacent to a vertex u such that $f(u) > 0$. The function f is a co-Roman dominating function, abbreviated CRDF if: (i) every vertex u with $f(u) = 0$ is adjacent to a vertex v for which $f(v) > 0$, and (ii) every vertex v with $f(v) > 0$ has a neighbor u for which $f(u) = 0$, such that each vertex of G is protected with respect to the function $f': V(G) \rightarrow \{0,1,2\}$, defined by $f'(v) = f(v) - 1$, $f'(u) = 1$ and $f'(x) = f(x)$ for $x \in V(G) - \{u, v\}$. The co-Roman domination number of a graph G, denoted by $\gamma_{cr}(G)$, is the minimum weight of a co-Roman dominating function on G.

In this paper, we study the co-Roman domination number of grid graphs and we obtain this parameter for $P_2 \times P_n$ and $P_3 \times P_n$.

Introduction

Throughout this paper, G is a simple connected graph with vertex set $V = V(G)$ and edge set $E = E(G)$ of order n and size m. The Cartesian product, $G \times H$, of graphs G and H is a graph such that the vertex set of $G \times H$ is the Cartesian product $V(G) \times V(H)$; and two vertices (u, u') and (v, v') are adjacent in $G \times H$ if and only if either $u = v$ and u' is adjacent to v' in H, or $u' = v'$ and u is adjacent to v in G. The Cartesian product $P_n \times P_m$ is called a grid graph.

A set S of vertices in a graph G is called a dominating set if every vertex in V is either an element of S or is adjacent to an element of S. The domination number of G, denoted by $\gamma(G)$, is the minimum cardinality of a dominating set of G. A $\gamma(G)$-set is a dominating set of G of size $\gamma(G)$.

For a subset $S \subseteq V(G)$ of vertices of a graph G and a function $f: V(G) \to \mathbb{R}$, we define

$f(S) = \sum_{v \in S} f(S)$. The weight of f is $\omega(f) = f(V(G)) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$.

A Roman dominating function on a graph G, abbreviated RD-function, is a function

$f: V \to \{0,1,2\}$ satisfying the condition that every vertex u for which $f(u) = 0$ is adjacent to at

least one vertex v for which $f(v) = 2$. The minimum weight of an RD-function on G is called the Roman domination number of G and is denoted by $\gamma_R(G)$. An RD-function with minimum weight $\gamma_R(G)$ in G is called a $\gamma_R(G)$-function of G. The Roman domination was introduced by Cockayne et al. in [5].

Let $f: V \to \{0,1,2\}$ be a function. A vertex v is protected with respect to f, if $f(v) > 0$ or $f(v) = 0$ and v is adjacent to a vertex u such that $f(u) > 0$. The function f is a co-Roman dominating function, abbreviated CRDF if: (i) every vertex u with $f(u) = 0$ is adjacent to a vertex v for which $f(v) > 0$, and (ii) every vertex v with $f(v) > 0$ has a neighbor u for which $f(u) = 0$ such that each vertex of G is protected with respect to the function $f': V(G) \to \{0,1,2\}$, defined by $f'(v) = f(v) - 1$, $f'(u) = 1$ and $f'(x) = f(x)$ for $x \in V(G) - \{u, v\}$. The co-Roman domination number of a graph G, denoted by $\gamma_{cr}(G)$, is the minimum weight of a co-Roman dominating function on G. The concept of co-Roman domination was introduced by Arumugam and et. al [2] and was studied by Shao and et. al [9].

In this paper, we study the co-Roman domination number of grid graphs and we obtain this parameter for $P_2 \times P_n$ and $P_3 \times P_n$. For a more thorough treatment of domination parameters and for terminology not presented here see [6], [7] and [10]. The following results are useful in this paper.

Proposition 1. [2] For a cycle C_n, $n \geq 4$, and for a path P_n, $\gamma_{cr}(C_n) = \gamma_{cr}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$.

Proposition 2. [2]. For a graph G, $\gamma_{cr} \leq \gamma_R \leq 2\gamma$.

Proposition 3. [2] For any tree T of order n, $\gamma_{cr}(T) \leq \frac{2n}{3}$.

Main Results

Theorem 1. For $n \geq 2$,

$$\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1 & n \equiv 0,1\ (mod\ 3) \\ \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Theorem 2. For $n \geq 2$,

$$\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) = \begin{cases} n & n \equiv 1\ (mod\ 3) \\ n+1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

References

1. Amjadi J., Chellali M., Sheikholeslami S. M., Soroudi M., "On two open problems concerning weak Roman domination in trees", ,Australas. J. Combin 74 (2019) 61-73.

2 Arumugam S., Ebadi K., Manrique M., "Co-Roman dominaton in graphs", Indian Acad.Sci. (Math. Sci), 125 (2015) 1-10.

3. Chambers E. W., Kinnersley B., Prince N., West D. B., "Extremal problems for Roman domination", SIAM J. Discrete. Math, 23 (2009) 1575-1586.

4. Chellali M., Haynes T. W., Hedetniemi S. T., "Bounds on weak Roman and 2-rainbow domination numbers", Discrete. Appl. Math., 178 (2014) 27-32.

5. Cockayne E. J., Dreyer Jr. P. A., Hedetniemi S. M., Hedetniemi.S. T , "Roman domination in graphs", Discrete Math., 278 (2004) 11-22.

6. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J., "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, Inc, New York, (1998).

7. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J., "Dominatin in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, Inc, New York, (1988).

8. Henning M. A., "Defending the Roman Empire-A new strategy", Discrete Math. ,266 (2003) 239-251.

9. Shao Z., Sheikholeslami S. M., Soroudi M., Volkmann L., Liu X., "On the co-Roman domination in graphs", Discuss. Math. Graph Theory, 39 (2019) 455-472.

10. West D. B., "Introduction to graph theory". Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, (2001) 2nd ed.

How to cite: Khoeilar, R., Soroudi, M., Atapour, M., (2022) Co-Roman domination in Grids. *Mathematical Researches*, 8 (3), 80-90

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

احاطه‌گری هم-رومی در شبکه‌ها

رعنا خوئیلر[۱]✉، مرضیه سرودی[۲]، مریم عطاپور[۳]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: khoeilar@azaruniv.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: m.soroudi@azaruniv.ac.ir

۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران. پست الکترونیکی: m.atapour@ubonab.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۱۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
تابع احاطه‌گر رومی- تابع احاطه‌گر هم-رومی،
شبکه،
عدد احاطه‌ای رومی،
عدد احاطه‌ای هم-رومی.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده با مجموعه رئوس V بوده و $f:V\to\{0,1,2\}$، یک تابع باشد که وزن آن به صورت $\omega(f)=\sum_{v\in V(G)} f(v)$ تعریف می‌شود. گوییم رأس v نسبت به تابع f محافظت شده است هرگاه $f(v)>0$ یا $f(v)=0$ و v با رأسی مانند u با $f(u)>0$ مجاور باشد. تابع $f:V(G)\to\{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر هم-رومی در G نامیده می‌شود هرگاه: (۱) هر رأس u با $f(u)=0$ حداقل با یک رأس v با $f(v)>0$ مجاور باشد و (۲) هر رأس v با $f(v)>0$ حداقل با یک رأس u با $f(u)=0$ مجاور باشد، به طوری‌که هر رأس G نسبت به تابع $f':V(G)\to\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $f'(v)=f(v)-1$، $f'(u)=1$ و $f'(x)=f(x)$ برای سایر رئوس $x\in V(G)-\{u,v\}$، تعریف می‌شود، محافظت شده باشد. عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف G که با نماد $\gamma_{cr}(G)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از کمترین وزن در بین تمامی توابع احاطه‌گر هم-رومی گراف G.

در این مقاله، عدد احاطه‌ای هم-رومی شبکه‌ها را مطالعه کرده و مقدار دقیق این پارامتر را برای شبکه‌های $P_2\times P_n$ و $P_3\times P_n$ به دست می‌آوریم.

استناد: خوئیلر، رعنا؛ سرودی، مرضیه، عطاپور، مریم؛ (۱۴۰۱). احاطه‌گری هم-رومی در شبکه‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۹۰-۸۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه:

برای آشنایی با اصطلاحات و مفاهیمی از نظریه گراف که در این‌جا به آن‌ها اشاره نشده است به [۱۰،۷،۶] مراجعه کنید. در سراسر این مقاله، فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه رأسی $V = V(G)$ و مجموعه یالی $E = E(G)$ باشد. مرتبه‌ی گراف G، $|V|$، با نماد $n = n(G)$ و اندازه‌ی گراف G ، $|E|$، با نماد $m = m(G)$ نمایش داده می‌شوند. به ازای هر رأس $v \in V$، مجموعه‌ی $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$ را همسایگی باز رأس v و مجموعهٔ $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته‌ی رأس v گویند.دو رأس v و u از $V(G)$ را مجاور گوئیم هرگاه v و u دو انتهای یالی از G باشند. برای هر رأس v از $V(G)$، درجه‌ی رأس v به صورت $deg_G(v) = |N(v)|$ تعریف می‌شود. می‌نیمم و ماکسیمم درجهٔ گراف G به‌ترتیب با نمادهای $\delta = \delta(G)$ و $\Delta = \Delta(G)$ نمایش داده می‌شوند. همسایگی باز مجموعه $S \subseteq V$ عبارت است از $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ و همسایگی بسته آن برابر است با مجموعه $N[S] = N(S) \cup S$.

یک گشت در گراف G از رأس v به رأس v_n، دنباله‌ای مانند $W = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$، از رأس‌ها و یال‌ها است که جملات آن به‌طور متناوب، رأس‌ها و یال‌های G هستند، به طوری‌که به ازای هر i، v_{i-1} و v_i رئوس انتهایی یال e_i هستند. یک مسیر، یک گشت بدون رأس و یال تکراری است. یک مسیر از مرتبه‌ی n را با P_n نشان می‌دهیم.

حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف G_1 و G_2، $G = G_1 \times G_2$، گرافی با مجموعه رأسی $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ می‌باشد که دو رأس (u_1, u_2) و (v_1, v_2) از G مجاورند اگر و فقط اگر $u_1 v_1 \in E(G_1)$ و $u_2 = v_2$ یا $u_2 v_2 \in E(G_2)$ و $u_1 = v_1$. با انتخاب دو مسیر P_r و P_t فرض کنید $G = P_r \times P_t$ و $V(G) = \{u_j^i | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t\}$. حاصل‌ضرب دکارتی $P_r \times P_t$ را شبکه می‌نامند.

یک زیرمجموعهٔ D از $V(G)$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G گوئیم هرگاه هر رأس از $V(G) - D$ با رأسی از D مجاور باشد. عدد احاطه‌ای گراف G، $\gamma(G)$، کمترین اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G تعریف می‌شود. مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها دارای انواع بسیاری است که در نظریهٔ گراف‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است و بخش قابل توجهی از آنها در دو کتابی که توسط هاینس[1] و هدتنیمی[2] و اسلاتر[3] تألیف شده، بیان شده است [۶،۷].

به ازای زیرمجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ از رئوس گراف G و تابع $f: V(G) \to \mathbb{R}$، $f(S)$ را به صورت $f(S) = \sum_{x \in S} f(x)$ تعریف می‌کنیم. همچنین، وزن تابع f به صورت $\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ تعریف می‌شود. تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر رومی (به اختصار RDF) روی G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ با حداقل یک رأس v از G با $f(v) = 2$ مجاور باشد.. عدد احاطه‌ای رومی گراف G ، $\gamma_R(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع احاطه‌گر رومی در G است. یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن $\gamma_R(G)$، در گراف G ، یک $\gamma_R(G)$- تابع نامیده می‌شود [۳، ۵].

رأس v نسبت به تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$ محافظت شده است هرگاه $f(v) > 0$ یا $f(v) = 0$ و v با رأسی مانند u با $f(u) > 0$ مجاور باشد.

---
1 -Haynes
2 -Hedetniemi
3 -Slater

تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر رومی هم-رومی (به اختصار CRDF) نامیده می‌شود هرگاه: (۱) هر رأس u با $f(u) = 0$ حداقل با یک رأس v با $f(v) > 0$ مجاور باشد و (۲) هر رأس v با $f(v) > 0$ حداقل با یک رأس u با $f(u) = 0$ مجاور باشد، بـــه طوری کـــه هر رأس G نسبت به تابع $f': V(G) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) - 1 & x = v \\ 1 & x = u \\ f(x) & x \in V(G) - \{u, v\} \end{cases}$$

تعریف می‌شود، محافظت شده باشد. عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف G که با نماد $\gamma_{cr}(G)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از کمترین وزن در بین تمامی توابع احاطه‌گر هم-رومی گرافG. این مفهوم توسط آروموگام[1] و همکاران در [۲] معرفی گردید و پس از آن.شائو[2] و همکاران [۹]، مطالعه‌ی تابع احاطه‌گر هم-رومی را ادامه داده و نتایجی نیز به‌دست آورده‌اند. در این مقاله، عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف‌های $P_2 \times P_n$ و $P_3 \times P_n$ را تعیین می‌کنیم. قضیه‌های زیر در اثبات نتایج این مقاله مفید خواهند بود.

قضیهٔ ۱.[۲] به ازای دور C_n با $n \geq 4$ و به ازای مسیر P_n،

$$\gamma_{cr}(C_n) = \gamma_{cr}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil.$$

قضیهٔ ۲.[۲] برای گراف G ، $\gamma_{cr} \leq \gamma_R \leq 2\gamma$.

قضیهٔ ۳.[۲] اگر T یک درخت از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\gamma_{cr}(T) \leq \frac{2n}{3}$.

اعداد احاطه‌ای هم-رومی در شبکه‌ها

در این بخش، عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف‌های $P_2 \times P_n$ و $P_3 \times P_n$ را تعیین می‌کنیم. در سراسر این بخش، فرض می‌کنیم که به ازای n ... ۲ ۱ = i، $u_i^۱$، $u_i^۲$ رئوس i-امین کپی از $P_۲$ در $P_2 \times P_n$ و $u_i^۱$، $u_i^۲$ و $u_i^۳$ رئوس i-امین کپی از $P_۳$ در $P_3 \times P_n$ هستند. همچنین اگر تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$، یک CRDF در G باشد، آن‌گاه می‌توان f را به صورت $f = (V_0, V_1, V_2)$ نشان داد که در آن به ازای $i = 0,1,2$، داریم

$$V_i = \{v \in V | f(v) = i\}.$$

قضیهٔ ۱. به ازای $n \geq ۲$،

$$\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1 & n \equiv 0,1 \ (mod\ 3) \\ \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

---

[1] Arumugam
[2] -Zehui Shao

برهان. تابع $f: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$ را به ازای $0 \le i \le \left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor$، $0 \le j \le \left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor$، با ضابطهٔ $f(u^1_{2+3i}) = f(u^2_{1+3j}) = 1$ و بـــه ازای $n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)$، $f(u^2_n) = 1$ و در غیر این صورت $f(x) = ۰$ تعریف کنیـد. به‌وضوح f یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن مطلوب است و لذا

$$\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n) \le \begin{cases} \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil + 1 & n \equiv 0,1 \ (mod\ 3) \\ \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنـون طـرف عکـس نامسـاوی را به استقرا روی n ثابـت می‌کنیم. نتیجه به ازای $n = 2,3$ برقرار است. فرض کنید $n \ge 4$ و قضیه بـرای هـر $n' < n$ برقرار باشد. گراف G' را به صورت

$$G' = P_2 \times P_n - \{u^1_n, u^2_n, u^1_{n-1}, u^2_{n-1}, u^1_{n-2}, u^2_{n-2}\}$$

تعریف کنید. به وضوح $G' = P_2 \times P_{n-3}$. فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n)$-تابع باشد به طوری‌که $|V_2|$ و $f(u^1_n) + f(u^2_n)$، تا حد ممکن کوچک باشند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنید $f(u^1_n) = f(u^2_n) = 0$.

برای این‌که رئوس u^1_n و u^2_n به‌طور هم-رومی احاطه شوند، باید داشته‌باشیم $f(u^1_{n-1}) \ge 1$ و $f(u^2_{n-1}) \ge 1$. زیرحالت‌های زیر را به دست می‌آوریم.

زیرحالت ۱. ۱. فرض کنید $f(u^1_{n-1}) = f(u^2_{n-1}) = 2$.

چون f یک $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n)$- تابع است به سادگی دیده می‌شود که $f(u^1_{n-2}) = f(u^2_{n-2}) = f(u^1_{n-3}) = f(u^2_{n-3}) = 0$، زیرا اگر یکی از $f(u^1_{n-2})$ یا $f(u^1_{n-3})$ مثبت باشد، آن‌گاه با یـک واحد کاهـش $f(u^1_{n-1})$ و اگر یکی از $f(u^2_{n-2})$ یا $f(u^2_{n-3})$ مثبت باشد، آن‌گاه با یـک واحد کاهـش $f(u^2_{n-1})$ بـه یک CRDF برای $P_2 \times P_n$ بـا وزن کمتر از $\omega(f)$ دست می‌یابیم، که تناقض است. حال تابع $g: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$ که بـا ضابطهٔ $g(u^1_{n-1}) = g(u^2_{n-1}) = g(u^1_{n-2}) = g(u^2_{n-2}) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، به صورت $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است که در آن تعداد رئوس v با $g(v) = 2$ کمتر از $|V_2|$ است و این با انتخاب f در تناقض است.

زیرحالت ۱. ۲. فرض کنید $f(u^1_{n-1}) = 2$ و $f(u^2_{n-1}) = 1$. (حالت $f(u^1_{n-1}) = 1$ و $f(u^2_{n-1}) = 2$ نیز مشابه است).

چون f یک $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n)$-تابع است، لذا $f(u^1_{n-2}) = f(u^2_{n-2}) = f(u^1_{n-3}) = 0$ و $f(u^2_{n-3}) \ge 1$. در این صورت تابع $g: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$ که بـا ضابطهٔ $g(u^1_{n-1}) = g(u^2_{n-2}) = 1$ و برای سایر رئوس

$v \in V(P_2 \times P_n)$، به صورت $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است که در آن تعداد رئوس vبا $g(v) = 2$ کمتر از $|V_2|$ است و این با انتخاب f در تناقض است.

زیرحالت ۱. ۳. فرض کنید $f(u_{n-1}^1) = f(u_{n-1}^2) = 1$.

موارد زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^2) = 0$.

در این صورت $f(u_{n-3}^1), f(u_{n-3}^2) \geq 1$. ابتدا فرض کنید $f(u_{n-4}^1) = f(u_{n-4}^2) = 0$. در این صورت تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n) - 2$ است و لذا نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. حال فرض کنید $f(u_{n-4}^1) \geq 1$ (حالت $f(u_{n-4}^2) \geq 1$ نیز مشابه است). اگر $f(u_{n-4}^1) = 2$، آنگاه با یک واحد کاهش $f(u_{n-4}^1)$ به یک CRDF برای $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ دست می‌یابیم، که تناقض است. لذا $f(u_{n-4}^1) = 2$. اما در این‌صورت تابع $g: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$ که به صورت $g(u_{n-3}^1) = 0$، $g(u_{n-4}^1) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n) - 2$ است. بنابراین، نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-2}^2) = 0$ و $f(u_{n-2}^1) = 1$. (حالت $f(u_{n-2}^2) = 1$ و $f(u_{n-2}^1) = 0$ نیز مشابه است).
اگر $f(u_{n-3}^1) = 0$ و u_{n-3}^1 همسایه‌ای با مقدار صفر داشته باشد، آن‌گاه تابع $g: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^1) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن حداکثر $\omega(f) - 2$ است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. اگر $f(u_{n-3}^1) = 0$ و u_{n-3}^1 هیچ همسایه‌ای با مقدار صفر نداشته باشد، آن‌گاه تابع $g: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-4}^1) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_2 \square P_n) - 2$ است و مشابه فوق، نتیجه به دست می‌آید. اگر $f(u_{n-3}^1) <$، آنگاه تابع $g: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^1) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n) - 2$ است و مشابه (الف) نتیجه حاصل می‌شود.

(ج) فرض کنید $f(u_{n-1}^1) = f(u_{n-1}^2) = 1$.

در این صورت چون f یک $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n)$-تابع است، لذا $f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^2) = 0$. ادعا می‌کنیم $f(u_{n-4}^1) = f(u_{n-4}^2) = 0$. به برهان خلف، فرض کنید $f(u_{n-4}^2) \geq 1$. در این صورت تابع $h: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که به صورت $h(u_{n-2}^1) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. حال تابع $g: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^1) = g(u_{n-3}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_2 \times P_n) - 2$ است و این منجر به نتیجهٔ مطلوب می‌شود.

حالت ۲. فرض کنید $f(u_n^1) = 0$ و $f(u_n^2) = 1$. (حالت $f(u_n^1) = 1$ و $f(u_n^2) = 0$ نیز مشابه است).

زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

زیرحالت ۲. ۱. فرض کنید $f(u_{n-1}^1) = f(u_{n-1}^2) = 0$.

در این‌صورت $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^2) \geq 1$. اگر $f(u_{n-2}^1) = 2$، آنگاه $f(u_{n-3}^1) = f(u_{n-4}^1) = 0$ و لذا تابع $g: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-2}^1) = g(u_{n-3}^1) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است که با انتخاب f در تناقض است.

اگر $f(u_{n-2}^2) = 2$، آنگاه تابع $g: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-2}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض است. از این پس فرض کنید $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^2) = 1$. موارد زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-3}^1) = f(u_{n-3}^2) = 0$.

در این صورت چون f یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است، داریم $f(u_{n-4}^1) \geq 1$. اگر $f(u_{n-4}^2) = 0$، آن‌گاه تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) - 2$ است و اگر $f(u_{n-4}^2) \geq 0$، آن‌گاه تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-4}^2) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) - 2$ است که منجر به نتیجهٔ مطلوب می‌شود.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-3}^1) = 0$ و $f(u_{n-3}^2) = 1$.

در این صورت، تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^2) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) - 2$ است. بنابراین، کران مطلوب به دست می‌آید.

(ج) فرض کنید $f(u_{n-3}^2) = 0$ و $f(u_{n-3}^1) = 1$.

در این صورت تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^1) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) - 2$ است. بنابراین نتیجه واضح است.

(د) فرض کنید $f(u_{n-3}^1), f(u_{n-3}^2) \geq 1$.

در این صورت تابع $h: V(P_2 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-2}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد.

زیرحالت ۲. ۲. فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 0$ و $f(u_{n-1}^1) = 1$.

مشابه زیرحالت ۲. ۱. داریم $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^2) \leq 1$. بنابراین موارد زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^2) = 0$.

در این صورت بدیهی است که $f(u_{n-3}^2) \geq 1$. اگر $f(u_{n-3}^1) = 0$، آنگاه تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_2 \times P_n) - 2$ است که منجر به نتیجهٔ مطلوب می‌شود. اگر $f(u_{n-3}^1) \geq 1$، آن‌گاه تابع $g: V(P_2 \times P_n) \to$

$\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^2) = 0$، $g(u_{n-1}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است که با انتخاب f در تناقض است.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 0$ و $f(u_{n-2}^1) = 1$ یا $f(u_{n-1}^2) = 1$ و $f(u_{n-2}^1) = 0$ یا $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^2) \geq 1$. در این صورت تابع g تعریف شده در قسمت (الف) منجر به تناقض می‌شود.

زیرحالت ۲. ۳. فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 1$ و $f(u_{n-1}^1) = 0$.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^2) = 0$ یا $f(u_{n-1}^2) = 1$ و $f(u_{n-2}^1) = 0$ یا $f(u_{n-1}^2) = 0$ و $f(u_{n-2}^1) = 1$. در این صورت تابع $g: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که به صورت $g(u_n^2) = 0$، $g(u_{n-1}^1) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است که با انتخاب f در تناقض است.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^2) = 1$.

در این صورت $f(u_{n-3}^2) = 0$، زیرا در غیر این صورت تابع $g: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-2}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. حال، تابع $h: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_n^2) = 0$، $h(u_{n-1}^1) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است با انتخاب f در تناقض است.

زیرحالت ۲. ۴. فرض کنید $f(u_{n-1}^1) = f(u_{n-1}^2) = 1$.

در این صورت بدیهی است که $f(u_{n-2}^2) = 0$. نشان می‌دهیم $f(u_{n-3}^2) = 0$. به برهان خلف، فرض کنید $f(u_{n-3}^2) \geq 1$. در این‌صورت تابع $h: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن کمتر $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. ادعا می‌کنیم که $f(u_{n-2}^1) = 0$، زیرا در غیر این صورت تابع $h: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^1) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_2 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است که با انتخاب f در تناقض است. اگر $f(u_{n-3}^1) \geq 1$، آن‌گاه تابع $g: V(P_2 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-3}^1) = 2$ و برای سایر رئوس$v \in V(P_2 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2 \times P_n$ با وزن$\gamma_{cr}(P_2 \times P_n) - 2$ که منجر به نتیجهٔ مطلوب می‌شود.

حالت ۳. فرض کنید $f(u_n^1) = f(u_n^2) = 1$.

چون f یک CRDF از $P_2 \times P_n$ است، باید داشته باشیم $f(u_{n-1}^1) = f(u_{n-1}^2) = 0$.. زیرحالت‌های زیر را در نظر بگیرید.

زیرحالت ۳. ۱. فرض کنید $f(u_{n-2}^1)=f(u_{n-2}^2)=1$.
ادعا می‌کنیم $f(u_{n-3}^1)=f(u_{n-3}^2)=0$. به برهان خلف، فرض کنید $f(u_{n-3}^1)\geq 1$. دراین صورت تابع $h:V(P_2\times P_n)\to\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^2)=0$ و برای سایر رئوس $v\in V(P_2\times P_n)$، $h(v)=f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2\times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. حال تابع $g:V(P_2\times P_n)\to\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^1)=g(u_{n-1}^2)=1$، $g(u_n^1)=g(u_n^2)=1$ و برای سایر رئوس $v\in V(P_2\times P_n)$، $g(v)=f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2\times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد.

زیرحالت ۳. ۲. فرض کنید $f(u_{n-1}^2)=0$ و $f(u_{n-2}^1)=1$ (حالت $f(u_{n-1}^2)=1$ و $f(u_{n-2}^1)=0$ نیز مشابه است).

در این صورت نیز تابع g تعریف شده در زیرحالت ۳. ۱ منجر به تناقض می‌شود.

حالت ۴. فرض کنید $f(u_n^2)=2$ و $f(u_n^1)=0$ (حالت $f(u_n^2)=0$ و $f(u_n^1)=2$ نیز مشابه است). در این صورت $f(u_{n-1}^1)=f(u_{n-1}^2)=f(u_{n-2}^2)=0$. زیرا در غیر این صورت، تابع $h:V(P_2\times P_n)\to\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_n^2)=1$ و برای سایر رئوس $v\in V(P_2\times P_n)$، $h(v)=f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2\times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. حال تابع $g:V(P_2\times P_n)\to\{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^1)=g(u_{n-1}^2)=1$، $g(u_n^2)=0$ و برای سایر رئوس $v\in V(P_2\times P_n)$، $g(v)=f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_2\times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد.

این برهان را کامل می‌کند.

قضیهٔ ۲. به ازای $n\geq ۲$،

$$\gamma_{\rm cr}(P_3\times P_n)=\begin{cases} n & n\equiv 1\ (mod\ 3)\\ n+1 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}.$$

برهان. فرض کنید $V(P_3\times P_n)=\{u_i^j|1\leq i\leq n,1\leq j\leq 3\}$. به آسانی می‌توان دید که تابع $f:V(P_3\times P_n)\to\{0,1,2\}$، بــه ازای $0\leq i\leq n-1$، به صورت $f(u_i^2)=1$ برای $i\equiv 1\ (mod\ 3)$، $f(u_i^1)=1$ برای $i\equiv 0\ (mod\ 3)$، $f(u_i^3)=1$ برای $i\equiv 2\ (mod\ 3)$، $f(u_n^2)=1$ برای $n\equiv 1\ (mod\ 3)$، $f(u_n^1)=f(u_n^3)=1$ برای $n\equiv 0,2\ (mod\ 3)$، و همچنین بـــه ازای $n\equiv 0,1\ (mod\ 3)$، $f(u_{2+3i}^1)=f(u_{1+3j}^2)=1$ و $f(u_n^2)=1$ و برای سایر رئوس $x\in V(P_3\times P_n)$، $f(x)=0$ تعریف کنیـد. به وضوح f یک CRDF از $P_3\times P_n$ با وزن مطلوب است و در نتیجه

$$\gamma_{\rm cr}(P_3\times P_n)\leq\begin{cases} n & n\equiv 1\ (mod\ 3)\\ n+1 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

اکنون طرف عکس نامساوی را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

نتیجه به ازای $n = 2.3$ به سادگی به دست می‌آید. فرض کنید $n \geq 4$ و نتیجه برای هر $n' < n$ برقرار باشد. گراف G' را به‌صورت $G' = P_3 \times P_n - \{u_n^1, u_n^2, u_n^3\}$ تعریف کنید. به‌وضوح $G' = P_3 \times P_{n-1}$. فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_{\rm cr}(P_3 \times P_n)$-تابع باشد که $|V_2|$ و $f(u_n^1) + f(u_n^2) + f(u_n^3)$، تا حد ممکن کوچک باشند. ادعا می‌کنیم که $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) \leq 2$. به برهان خلف، فرض کنید $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) \geq 3$. اگر $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) \geq 4$، آن‌گاه تابع $g: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، با $g(u_n^1) = g(u_n^2) = g(u_n^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. بنابراین فرض کنید $\sum_{j=1}^{3} f(u_n^j) = 3$. اگر $f(u_n^3) = 0$ ،$f(u_n^2) = 2$ و $f(u_n^1) = 1$، آن‌گاه تابع $g: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^2) = g(u_{n-1}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است و این با انتخاب f در تناقض است. اگر $f(u_n^3) = 1$ ،$f(u_n^2) = 0$ و $f(u_n^1) = 2$، آن‌گاه تابع $g: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^1) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض می‌باشد. اگر $f(u_n^1) = f(u_n^2) = f(u_n^3) = 1$، آن‌گاه تابع $g: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^2) = 0$ و $g(u_{n-1}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است ولی این با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) \leq 2$.

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنید $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) = 2$.

زیرحالت ۱. ۱. فرض کنید $f(u_n^3) = 0$ و $f(u_n^1) = f(u_n^2) = 1$. در این صورت باید داشته باشیم که $f(u_{n-2}^2) = f(u_{n-3}^2) = f(u_{n-2}^1) = f(u_{n-2}^3) = f(u_{n-1}^3) = 0$، زیرا در غیر این‌صورت می‌توان با یک واحد کاهش مقدار $f(u_{n-1}^2)$، یک CRDF با وزن کمتر از $\omega(f)$ به دست آورد که یک تناقض است. بنابراین تابع $g: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^2) = g(u_{n-2}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن $\omega(f)$ است و این با انتخاب f در تناقض است. از این رو، فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 1$. در این‌صورت تابع $h: V(P_3 \times P_n) \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^2) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و لذا نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. در نهایت فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 0$. در این‌صورت رأس $w \in N(u_{n-1}^2) - \{u_n^2\}$ وجود دارد به طوری‌که $f(w) \geq 1$ و لذا تابع $h: V(G') \rightarrow \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(w) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\rm cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و دوباره نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.

زیرحالت ۱. ۲. فرض کنید $f(u_n^2) = 0$ و $f(u_n^1) = f(u_n^3) = 1$.

در این صورت بنا به تعریف تابع f، داریم $f(u_{n-1}^{1}) = f(u_{n-1}^{3}) = 0$. اگر $f(u_{n-1}^{2}) = 0$، آنگاه داریم $f(u_{n-2}^{2}) \geq 1$. بنابراین تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^{2}) = 1$ و برای سایر رئوس $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. حال فرض کنید $f(u_{n-1}^{2}) = 1$. در این‌صورت تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^{2}) = 2$ و برای سایر رئوس $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' است که وزن آن با $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ برابر است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود.

زیرحالت ۱. ۳. فرض کنید $f(u_n^2) = 2$ و $f(u_n^1) = f(u_n^3) = 0$.

اگر $f(u_{n-1}^{2}) \geq 1$، آنگاه تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^{2}) = 2$ و برای سایر رئوس $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. اگر $f(u_{n-1}^{2}) = 0$ و به ازای رأس $w \in \{u_{n-1}^{1}, u_{n-1}^{3}\}$، $f(w) \geq 1$ (توجه می‌کنیم که $f(u_{n-1}^{1}), f(u_{n-3}^{3}) \leq 1$. زیرا در غیر این صورت به آسانی می‌توان دید f یک CRDF می‌نیمم از $P_3 \times P_n$ نیست)، آن‌گاه تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(w) = 2$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و فرض استقرا منجر به نتیجه‌ی مطلوب می‌شود. اگر $f(u_{n-1}^{2}) = 0$ و به ازای رأسی مانند $w \in \{u_{n-1}^{1}, u_{n-1}^{3}\}$، $f(w) \geq 0$، آن‌گاه تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(w) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و دوباره نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.

زیرحالت ۱. ۴. فرض کنید $f(u_n^1) = 2$ و $f(u_n^2) = f(u_n^3) = 0$.

در این صورت باید داشته‌باشیم $f(u_{n-1}^{1}) = f(u_{n-1}^{2}) = f(u_{n-2}^{2}) = 0$. بنابراین تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^{1}) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و از فرض استقرا به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

حالت ۲. فرض کنید $\sum_{j=1}^{3} f(u_n^j) = 1$.

زیرحالت ۲. ۱. فرض کنید $f(u_n^1) = 1$ و $f(u_n^2) = f(u_n^3) = 0$.

در این‌صورت به وضوح $f(u_{n-1}^{3}) \geq 1$. موارد زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-1}^{1}) \geq 1$.

اگر $f(u_{n-1}^{2}) = 0$، آنگاه تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. اگر $f(u_{n-1}^{2}) \geq 1$، آنگاه بنا به تعریف تابع احاطه‌گر هم-رومی، داریم $f(u_{n-2}^{1}) = 0$. ادعا می‌کنیم $f(u_{n-2}^{2}) = f(u_{n-2}^{3}) = 0$. بدین منظور، ابتدا فرض کنید $f(u_{n-2}^{2}) \geq 1$، دراین‌صورت تابع $g: V(P_3 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^1) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض است. اکنون فرض کنید

$f(u_{n-2}^3) \geq 1.$ در این‌صـــورت تابع $g: V(P_3 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_n^1) = g(u_{n-1}^3) = 0$، $g(u_n^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که دوباره یک تناقض است.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-1}^1) = 0$.

ابتدا، فرض کنید $f(u_{n-1}^2) \geq 1$. در این صورت تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و لـــذا از فـــرض استـقـرا نتیـجه‌ی مطلوب حاصل می‌شـود. حال فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 0$. در این‌صورت با توجه به تعریف تابع f، $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^2) \geq 1$ و تحدید f به G' یک CRDF از G' وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا حاصل می‌شود.

زیرحالت ۲.۲. فرض کنید $f(u_n^2) = 1$ و $f(u_n^1) = f(u_n^3) = 0$.

چون f ، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ است، لذا $f(u_{n-1}^1) \geq 1$ یا $f(u_{n-1}^3) \geq 1$. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید $f(u_{n-1}^1) \geq 1$. حالتهای زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) فرض کنید $f(u_{n-1}^2), f(u_{n-1}^3) = 0$. در این صورت تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و لـــذا از فـــرض استـقـرا نتیـجه‌ی مطلوب حاصل می‌شـود.

(ب) فرض کنید $f(u_{n-1}^3) \geq 1$ و $f(u_{n-1}^2) = 0$. در این صورت تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و لـــذا از فـــرض استـقـرا نتیـجه‌ی مطلوب حاصل می‌شـود.

(ج) فرض کنید $f(u_{n-1}^3) = 0$ و $f(u_{n-1}^2) \geq 1$. اگر $f(u_{n-2}^1) \geq 1$ و $f(u_{n-2}^3) \geq 1$، آنگاه تابع $g: V(P_3 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض است.

اگر $f(u_{n-2}^1) \geq 1$ و $f(u_{n-2}^3) = 0$، آن‌گاه تابع $h: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $h(u_{n-1}^3) = 1$، $h(u_{n-1}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و دوباره نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.

(د) فرض کنید $f(u_{n-1}^3) \geq 1$ و $f(u_{n-1}^2) \geq 1$. اگر $f(u_{n-2}^1), f(u_{n-2}^3) = 0$، آن‌گاه تحدید f به G' یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{\mathrm{cr}}(P_3 \times P_n) - 1$ است و لـــذا از فـــرض استـقـرا نتیـجه‌ی مطلوب حاصل می‌شـود. فرض کنید $f(u_{n-2}^3) \geq 1$ (حالت $f(u_{n-2}^3) \geq 1$ مشابه است). در این صورت تابع $g: V(P_3 \times P_n) \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^1) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(P_3 \times P_n)$، $h(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از $P_3 \times P_n$ با وزن کمتر از $\omega(f)$ است که یک تناقض است.

حالت۳. فرض کنید $\sum_{j=1}^{3} f\left(u_n^j\right) = 0$.

در این حالت به ازای $j = 1,2,3$ داریم $f\left(u_{n-1}^j\right) \geq 1$ زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

زیرحالت ۳. ۱. فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 1$.
در این‌صورت تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^2) = 0$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.
زیرحالت ۳. ۲. فرض کنید $f(u_{n-1}^2) = 2$.
در این‌صورت تابع $g: V(G') \to \{0,1,2\}$، که با ضابطهٔ $g(u_{n-1}^2) = 1$ و برای سایر رئوس $v \in V(G')$، $g(v) = f(v)$ تعریف می‌شود، یک CRDF از G' با وزن $\gamma_{cr}(P_3 \times P_n) - 1$ است و نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید.
این برهان را کامل می‌کند.

References

1. Amjadi J., Chellali M., Sheikholeslami S. M., Soroudi M., "On two open problems concerning weak Roman domination in trees", ,s. J. Combinustrala A74 (2019) 61-73.

2. Arumugam S., Ebadi K., Manrique M., "Co-Roman dominaton in graphs", Indian Acad.Sci.(Math. Sci), 125 (2015) 1-10.

3. Chambers E. W., Kinnersley B., Prince N., West D. B., "Extremal problems for Roman domination", SIAM J. Discrete. Math, 23 (2009) 1575-1586.

4. Chellali M., Haynes T. W., Hedetniemi S. T., "Bounds on weak Roman and 2-rainbow domination numbers", Discrete. Appl. Math., 178 (2014) 27-32.

5. Cockayne E. J., Dreyer Jr. P. A., Hedetniemi S. M., Hedetniemi.S. T , "Roman domination in graphs", Discrete Math., 278 (2004) 11-22.

6. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J., "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, Inc, New York, (1998).

7. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J., "Dominatin in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, Inc, New York, (1988).

8. Henning M. A., "Defending the Roman Empire-A new strategy", Discrete Math. ,266 (2003) 239-251.

9. Shao Z., Sheikholeslami S. M., Soroudi M., Volkmann L., Liu X., "On the co-Roman domination in graphs", Discuss. Math. Graph Theory, 39 (2019) 455-472.

10. West D. B., "Introduction to graph theory". Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, (2001) 2 nded.