

تقریب‌پذیری در فضاهای لیپ‌شیتس برداری مقدار

کبرا اسمعیلی بریران

دانشگاه اردکان، دانشکده فنی و مهندسی

پذیرش ۹۸/۰۸/۱۳

دریافت ۹۸/۰۴/۲۱

چکیده

در این مقاله، معیارهایی برای بررسی چگال بودن برخی زیرفضاهای فضای لیپ‌شیتس برداری مقدار $\text{lip}_\alpha(X, S)$ وقتی (X, d) فضای متریک فشرده، S فضای باناخ روی میدان مختلط \mathbb{C} است و $0 < \alpha < 1$ ، ارائه می‌شود. درحالتی که $X = [a, b]$ ثابت می‌شود $\text{Lip}_1([a, b], S)$ در $\text{lip}_\alpha([a, b], S)$ چگال است. همچنین با استفاده از فضاهای باختر و فضاهای دوگان ثابت می‌شود $C^1([a, b], S)$ فضای توابع S -مقدار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی $[a, b]$ در $\text{lip}_\alpha([a, b], S)$ چگال است.

واژه‌های کلیدی: فضای توابع لیپ‌شیتس برداری مقدار، توابع برداری مقدار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، اندازه‌برداری، تقریب‌پذیری

مقدمات و پیش‌نیازها

فرض کنید (X, d) فضای متریک، $(S, \|\cdot\|_S)$ فضای باناخ روی میدان مختلط \mathbb{C} است و $0 < \alpha \leq 1$. فضای برداری متشکل از همه توابع S -مقدار کراندار f روی X با شرط

$$p_{\alpha, S}(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_S}{d^\alpha(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} < \infty$$

را با $\text{Lip}_\alpha(X, S)$ نمایش می‌دهیم. زیرفضایی از $\text{Lip}_\alpha(X, S)$ متشکل از تمامی توابع با شرط

$$\lim_{d(x, y) \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - f(y)\|_S}{d^\alpha(x, y)} = 0$$

را با $\text{lip}_\alpha(X, S)$ نمایش می‌دهیم. با تعریف نرم $\|f\|_{\alpha, S} = \|f\|_X + p_{\alpha, S}(f)$ به‌ازای هر $f \in \text{Lip}_\alpha(X, S)$ که در آن $\|\cdot\|_X$ نرم سوپر‌نرم روی X است، به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که $(\text{Lip}_\alpha(X, S), \|\cdot\|_{\alpha, S})$ فضای باناخ است و $\text{lip}_\alpha(X, S)$ زیرفضای بسته $\text{Lip}_\alpha(X, S)$ است. فضاهای $\text{Lip}_\alpha(X, S)$ و $\text{lip}_\alpha(X, S)$ را فضاهای لیپ‌شیتس S -مقدار می‌نامیم. در حالتی که S میدان اعداد مختلط \mathbb{C} باشد، به‌ترتیب از نمادهای $\text{Lip}_\alpha(X)$ و $\text{lip}_\alpha(X)$ به‌جای $\text{Lip}_\alpha(X, \mathbb{C})$ و $\text{lip}_\alpha(X, \mathbb{C})$ استفاده می‌کنیم. جانسون [۴] فضاهای لیپ‌شیتس برداری مقدار را بررسی کرد. در حالت اسکالر مقدار، فضاهای لیپ‌شیتس جبرهای باناخ هستند و به آنها جبرهای لیپ‌شیتس گفته می‌شود. این جبرها به‌طور گسترده بررسی شده‌اند [۱]، [۴]، [۶]، [۷]. در [۴] با به‌کارگیری قضیه استون-وایرستراس برای جبرهای لیپ‌شیتس منصوب به هدبرگ [۳] ثابت شد که وقتی $0 < \alpha < 1$ جبر $\text{Lip}_1(X)$ در $\text{lip}_\alpha(X)$ چگال است. همین

نتیجه، با استفاده از نظریه اندازه‌ها و فضاهای دوگان و با برهانی متفاوت در [۱] به اثبات رسیده است. در این مقاله، با به‌کارگیری روش به‌کار گرفته شده در [۱] و به کمک فضای اندازه‌های برداری مقدار روی X معیاری ارائه می‌دهیم که چگال بودن برخی زیرفضاهای $lip_\alpha(X, S)$ را مشخص می‌کند. سپس نشان می‌دهیم $Lip_1([a, b], S)$ در $lip_\alpha([a, b], S)$ چگال است. در نهایت، با استفاده از فضاهای باختر و دوگان ثابت می‌کنیم $C^1([a, b], S)$ در $lip_\alpha([a, b], S)$ چگال است. در بخش بعدی، پس از ارائه تعاریف و نمادهای اولیه، نتایج اصلی را ثابت می‌کنیم.

نتایج اصلی

فرض کنید X فضای هاسدورف موضعاً فشرده و S فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط باشد. فضای متشکل از همه توابع پیوسته و کراندار از X به توی S با $C(X, S)$ و زیرفضایی از $C(X, S)$ متشکل از همه توابعی که در بینهایت صفر می‌شوند با $C_0(X, S)$ نشان داده می‌شوند. این فضاها با نرم سوپریم، $\|f\|_X = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_S$ ، فضای باناخ هستند. در حالتی که $S = \mathbb{C}$ ، این فضاها به ترتیب با $C(X)$ و $C_0(X)$ نشان داده می‌شوند. فضای متشکل از همه اندازه‌های مختلط بوردل منظم روی X را با $M(X)$ و فضای دوگان فضای باناخ S با S^* نشان داده می‌شود. فضای اندازه‌های بوردل منظم S^* -مقدار μ روی X که در شرایط زیر صدق کنند با $M(X, S^*)$ نشان داده می‌شود:

- i. برای هر $s \in S$ ، $\langle s, \mu(\cdot) \rangle \in M(X)$ ؛
- ii. ثابت C وجود دارد به طوری که $\sup |\sum \langle s_i, \mu(A_i) \rangle| \leq C$ سوپریم در این رابطه روی همه افزایش‌های متناهی X متشکل از مجموعه‌های بوردل منظم دو به دو مجزا $\{A_i\}$ و مجموعه نقاط $\{S_i\}$ در S با شرط $\|s_i\|_S \leq 1$ گرفته می‌شود.

اندازه $\mu \in M(X, S^*)$ و $s \in S$ را در نظر بگیرید. اندازه μ_s در $M(X)$ چنین تعریف می‌شود که به ازای هر مجموعه بوردل A در X داشته باشیم $\mu_s(A) = \langle s, \mu(A) \rangle$. تغییرات کلی μ_s با نماد $|\mu_s|$ مشخص می‌شود و هم‌چنین $\|\mu\|_S = |\mu_s|(X)$. تغییرات کلی اندازه μ با نماد $|\mu|$ مشخص شده و به صورت $|\mu|(A) = \sup |\sum \langle s_i, \mu(A_i) \rangle|$ تعریف می‌شود. سوپریم در این رابطه، مشابه ii در تعریف اندازه‌های بوردل منظم S^* -مقدار، روی افزایش‌های متناهی A در نظر گرفته می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که $|\mu| \in M(X)$. قرار می‌دهیم $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

فرض کنید $\mu \in M(X, S^*)$. به ازای هر $f \in C(X, S)$ ، $\int_X f d\mu$ به صورت انتگرال ریمن-اشتیل یس، از حدگیری روی تقریف‌های پی‌درپی مجموعه‌های به فرم $\sum \langle f(x_i), \mu(A_i) \rangle$ به دست می‌آید که در آن $\{A_i\}$ افزایش‌های متناهی X به مجموعه‌های بوردل دو به دو مجزا است و $x_i \in A_i$. برای جزئیات بیشتر به [۸] رجوع کنید.

فرض کنید (X, d) فضای متریک فشرده باشد، $V = \{(x, y) \in X \times X : x \neq y\}$ و $\tilde{X} = X \cup V$ در این صورت \tilde{X} فضایی موضعاً فشرده است. $0 < \alpha \leq 1$ را ثابت در نظر بگیرید. برای $f \in C(X, S)$ تابع \tilde{f} را روی \tilde{X} به صورت

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & x \in X \\ \tilde{f}(y, z) = \frac{f(y) - f(z)}{d^\alpha(y, z)} & (y, z) \in V \end{cases}$$

تعریف می کنیم. به راحتی می توان نشان داد که نگاشت $f \mapsto \tilde{f}$ یک عملگر خطی طول پا از $(\text{Lip}_\alpha(X, S), \|\cdot\|_{\alpha, S})$ به توی $(C(\tilde{X}, S), \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ است که در آن $\|\tilde{f}\|_{\tilde{X}} = \|f\|_X + \|f\|_V$. هم چنین تصویر $\text{lip}_\alpha(X, S)$ تحت این نگاشت در $C_0(\tilde{X}, S)$ قرار می گیرد.

قبل از ارائه نتایج اصلی، به بیان دو لم می پردازیم که مشابه نتایج [۱] در حالت اسکالر مقدار هستند. لم ۱. به ازای هر $\mu \in M(\tilde{X}, S^*)$ و $\varepsilon > 0$ ، اندازه $\nu \in M(X, S^*)$ وجود دارد به طوری که

$$\left| \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\mu - \int_X f d\nu \right| < \varepsilon \|f\|_{\alpha, S}, \quad f \in \text{Lip}_\alpha(X, S).$$

برهان. با توجه به این که $|\mu| \in M(\tilde{X})$ ، زیرمجموعه فشرده K از V یافت می شود به طوری که $|\mu|(V \setminus K) < \varepsilon$. قرار دهید

$$\Phi(f) = \int_{X \cup K} \tilde{f} d\mu, \quad f \in C(X, S).$$

واضح است که Φ تابعک خطی روی $C(X, S)$ است. نشان می دهیم تابعک خطی Φ کران دار است. افراز متناهی $\{A_i\}$ از مجموعه $X \cup K$ ، متشکل از مجموعه های بول دوه دو مجزا را در نظر بگیرید و فرض کنید $\{\tilde{x}_i\}$ دنباله ای متناهی در $X \cup K$ باشد به طوری که $\tilde{x}_i \in A_i$ در این صورت به ازای هر $f \in C(X, S)$ داریم

$$\begin{aligned} \left| \sum \langle \tilde{f}(\tilde{x}_i), \mu(A_i) \rangle \right| &\leq \sum \|\mu(A_i)\| \|\tilde{f}(\tilde{x}_i)\|_S \\ &\leq \sum \|\mu(A_i)\| \|\tilde{f}\|_{X \cup K} \\ &\leq |\mu|(X \cup K) \|\tilde{f}\|_{X \cup K}. \end{aligned}$$

با فرض $\delta > 0$ و $\delta = \inf \{d^\alpha(y, z) : (y, z) \in K\}$ نتیجه می شود

$$\tilde{f}_{X \cup K} = \|f\|_X + \|\tilde{f}\|_K \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \|f\|_X.$$

بنابراین برای هر افراز $\{A_i\}$ از $X \cup K$ و $\tilde{x}_i \in A_i$ داریم

$$\left| \sum \langle \tilde{f}(\tilde{x}_i), \mu(A_i) \rangle \right| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \|f\|_X |\mu|(X \cup K).$$

باتوجه به تعریف انتگرال ریمان-اشتیل یس می توان نتیجه گرفت

$$|\Phi(f)| = \left| \int_{X \cup K} \tilde{f} d\mu \right| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \|f\|_X |\mu|(X \cup K),$$

که کران داری تابعک خطی Φ روی $C(X, S)$ را به دنبال دارد. با به کارگیری [لم ۴، ۸]، می توان اندازه $\nu \in M(X, S^*)$ را یافت به طوری که

$$\Phi(f) = \int_X f d\nu, \quad f \in C(X, S).$$

به ازای $f \in \text{Lip}_\alpha(X, S)$ ، نتیجه می شود

$$\left| \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\mu - \int_X f dv \right| = \left| \int_{V \setminus K} \tilde{f} d\mu \right| \leq \|\tilde{f}\|_{V \setminus K} |\mu|(V \setminus K) \leq \varepsilon \tilde{f}_X = \varepsilon \|f\|_{\alpha, S}.$$

قبل از بیان لم بعدی، ابتدا به معرفی برخی نمادها می‌پردازیم. به ازای هر $s^* \in S^*$ و $x \in X$ ، تابع $s^* \otimes \varepsilon_x$ روی $Lip_\alpha(X, S)$ با ضابطه $(s^* \otimes \varepsilon_x)(f) = \langle f(x), s^* \rangle$ را در نظر بگیرید. واضح است که $s^* \otimes \varepsilon_x$ تابع خطی و کران‌دار روی $C(X, S)$ است. بنابر [لم ۴، ۸] اندازه $\mu \in M(X, S^*)$ وجود دارد به طوری که

$$\langle f(x), s^* \rangle = (s^* \otimes \varepsilon_x)(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C(X, S).$$

به ازای هر مجموعه بول A در X اندازه δ_{x, s^*} را بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$\delta_{x, s^*}(A) = \begin{cases} s^* & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

واضح است که $\delta_{x, s^*} \in M(X, S^*)$ و تکیه‌گاه آن برابر $\{x\}$ است. هم‌چنین برای هر $f \in C(X, S)$ داریم

$$\int_X f d\delta_{x, s^*} = \int_X s^* \circ f d\delta_x = \langle f(x), s^* \rangle = (s^* \otimes \varepsilon_x)(f) \quad (۱)$$

که در آن اندازه جرم نقطه‌ای در x است. بنابراین δ_{x, s^*} یک اندازه نمایشی برای تابع $s^* \otimes \varepsilon_x$ است. رابطه (۱) را برای هر $f \in Lip_\alpha(X, S)$ داریم.

لم ۲. فرض کنید $v \in M(X, S^*)$ و $\varepsilon > 0$. در این صورت اندازه $\lambda \in M(X, S^*)$ با تکیه‌گاه متناهی وجود دارد که

$$\left| \int_X f dv - \int_X f d\lambda \right| < \varepsilon \|f\|_{\alpha, S}, \quad f \in lip_\alpha(X, S).$$

برهان. تابع خطی و کران‌دار $\phi_v(f) = \int_X f dv$ روی $lip_\alpha(X, S)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از [لم ۵، ۲.۵]، تابع‌های خطی $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^* \in S^*$ و $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ وجود دارند به طوری که

$$\left\| \phi_v - \sum_{i=1}^n s_i^* \otimes \varepsilon_{x_i} \right\| < \varepsilon.$$

تعریف می‌کنیم $\lambda = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, s_i^*}$. در این صورت λ اندازه‌ای با تکیه‌گاه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ در $M(X, S^*)$ بوده است و برای هر $f \in lip_\alpha(X, S)$ داریم

$$\begin{aligned} \left| \int_X f dv - \int_X f d\lambda \right| &= \left| \phi_v(f) - \sum_{i=1}^n \int_X f d\delta_{x_i, s_i^*} \right| \\ &= \left| \phi_v(f) - \sum_{i=1}^n (s_i^* \otimes \varepsilon_{x_i})(f) \right| \\ &\leq \left\| \phi_v - \sum_{i=1}^n (s_i^* \otimes \varepsilon_{x_i}) \right\| \|f\|_{\alpha, S} \\ &< \varepsilon \|f\|_{\alpha, S}. \end{aligned}$$

با به کارگیری لم‌های فوق، قضیه تقریب‌پذیری زیر را ثابت می‌کنیم. مشابه این قضیه در حالت اسکالر مقدار را می‌توان در [۱] ملاحظه کرد.

قضیه ۳. زیر فضای L از $\text{lip}_\alpha(X, S)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید عدد ثابت C وجود دارد به طوری که برای هر زیرمجموعه متناهی E از X و هر $f \in \text{lip}_\alpha(X, S)$ بتوان تابع $g \in L$ را یافت به طوری که روی E داشته باشیم $f = g$ و $\|g\|_{\alpha, S} \leq C \|f\|_{\alpha, S}$ در این صورت L در $\text{lip}_\alpha(X, S)$ چگال است.

برهان. تابع خطی و کران دار $\Phi \in \text{lip}_\alpha(X, S)^*$ را در نظر بگیرید به طوری که روی L ، $\Phi = 0$. با استفاده از قضیه هان-باناخ، Φ دارای توسیع حافظ نرم روی $(C_0(\tilde{X}, S), \tilde{X})$ است و بنابر [۸، ۴]، اندازه $\mu \in M(\tilde{X}, S^*)$ وجود دارد به طوری که

$$\Phi(f) = \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\mu, \quad f \in \text{lip}_\alpha(X, S).$$

برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، بنابر لم های ۱ و ۲، اندازه $\lambda \in M(X, S^*)$ با تکیه گاه متناهی E یافت می شود به طوری که

$$\left| \Phi(f) - \int_X f d\lambda \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_{\alpha, S}, \quad f \in \text{lip}_\alpha(X, S).$$

تابع $f \in \text{lip}_\alpha(X, S)$ را در نظر بگیرید. با توجه به فرض مسئله، تابع $g \in L$ یافت می شود به طوری که روی E داریم $f = g$ و هم چنین $\|g\|_{\alpha, S} \leq C \|f\|_{\alpha, S}$ بنابراین

$$\left| \Phi(g) - \int_X g d\lambda \right| \leq 2\varepsilon \|g\|_{\alpha, S} \leq 2\varepsilon C \|f\|_{\alpha, S}.$$

باتوجه به این که $\Phi(g) = 0$ و $\int_X g d\lambda = \int_X f d\lambda$ ، نتیجه می شود $|\Phi(f)| \leq 2(C+1)\varepsilon \|f\|_{\alpha, S}$. بنابراین $\Phi(f) = 0$ و $\Phi = 0$. در نتیجه L در $\text{lip}_\alpha(X, S)$ چگال است.

قضیه ۴ نتیجه ای مشابه [۱، ۳.۳] در حالت برداری مقدار ارائه می دهد. هر چند برهان به کار رفته در [۱] برای حالت برداری مقدار قابل استفاده نیست.

قضیه ۴. به ازای هر $f \in \text{lip}_\alpha([a, b], S)$ و هر زیرمجموعه متناهی E از $[a, b]$ ، تابع $g \in \text{Lip}_1([a, b], S)$ وجود دارد به طوری که $f = g$ روی E و $\|g\|_{\alpha, S} \leq 3\|f\|_{\alpha, S}$.

برهان. فرض کنید $I = [a, b]$ و $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ به طوری که $a < x_1 < \dots < x_n < b$. قرار می دهیم $x_0 = a$ و $x_{n+1} = b$ و تعریف می کنیم

$$L_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (f(x_i) - f(x_{i-1})), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

و

$$g(x) = L_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

در این صورت تابع $g: I \rightarrow S$ پیوسته است و برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $g(x_i) = L_i(x_i) = f(x_i)$ بنابراین $f = g$ روی E . نشان می دهیم $g \in \text{Lip}_1(I, S)$ و $\|g\|_{\alpha, S} \leq 3\|f\|_{\alpha, S}$. فرض کنید $\gamma = \min \{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$. بنابراین $\gamma > 0$ برای $x, y \in I$ با شرط $x < y$ دو حالت اتفاق می افتد:

حالت اول. به ازای $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ، داشته باشیم $x_{i-1} \leq x < y \leq x_i$. در این حالت $y - x \leq x_i - x_{i-1}$ و در نتیجه

$$\|g(x) - g(y)\|_S = \|L_i(x) - L_i(y)\|_S = \frac{y - x}{x_i - x_{i-1}} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|_S.$$

بنابراین

$$\frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|} = \frac{\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S}{x_i-x_{i-1}} \leq \frac{2\|f\|_I}{\gamma}, \quad (۲)$$

و

$$\frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|^\alpha} = \frac{\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S}{(x_i-x_{i-1})^\alpha} \frac{(y-x)^{1-\alpha}}{(x_i-x_{i-1})^{1-\alpha}} \leq p_{\alpha,S}(f). \quad (۳)$$

حالت دوم: برای $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ داشته باشیم $x \in [x_{i-1}, x_i]$ و $y \in [x_{j-1}, x_j]$ به طوری که $x_i \leq x_{j-1}$. در این حالت، با در نظر گرفتن $x_i < x_{j-1}$ داریم

$$\begin{aligned} \|g(x)-g(y)\|_S &= \|L_i(x)-L_j(y)\|_S \\ &\leq \|L_i(x)-f(x_i)\|_S + \|f(x_i)-f(x_{j-1})\|_S + \|f(x_{j-1})-L_j(y)\|_S \\ &= \left\| \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-1}} (f(x_i)-f(x_{i-1})) \right\|_S + \|f(x_i) - f(x_{j-1})\|_S \\ &\quad + \left\| \frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \right\|_S \\ &= \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|_S \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} + \|f(x_i) - f(x_{j-1})\|_S \\ &\quad + \|f(x_j) - f(x_{j-1})\|_S \frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\|g(x) - g(y)\|_S}{|x-y|} &\leq \frac{2}{\gamma} \|f\|_I \frac{x_i-x}{y-x} + \frac{\|f(x_i)-f(x_{j-1})\|_S}{(x_{j-1}-x_i)^\alpha} \frac{(x_{j-1}-x_i)}{(y-x)(x_{j-1}-x_i)^{1-\alpha}} \\ &\quad + \frac{2}{\gamma} \|f\|_I \frac{y-x_{j-1}}{y-x} \\ &\leq \frac{4}{\gamma} \|f\|_I + \frac{1}{\gamma^{1-\alpha}} p_{\alpha,S}(f), \end{aligned} \quad (۴)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S}{(x_i-x_{i-1})^\alpha} \left(\frac{x_i-x}{y-x}\right)^\alpha \left(\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}\right)^{1-\alpha} \\ &\quad + \frac{\|f(x_i)-f(x_{j-1})\|_S}{(x_{j-1}-x_i)^\alpha} \left(\frac{x_{j-1}-x_i}{y-x}\right)^\alpha \\ &\quad + \frac{\|f(x_j)-f(x_{j-1})\|_S}{(x_j-x_{j-1})^\alpha} \left(\frac{y-x_{j-1}}{y-x}\right)^\alpha \left(\frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^{1-\alpha} \\ &\leq 3 p_{\alpha,S}(f). \end{aligned} \quad (۵)$$

ملاحظه می‌کنیم که روابط (۴) و (۵) برای حالت $x_i = x_{j-1}$ برقرار است.

در هر دو حالت فوق، بنا بر رابطه (۲) یا (۴) نتیجه می‌گیریم $g \in Lip_1(I, S)$ و از رابطه (۳) یا (۵) نتیجه می‌گیریم $p_{\alpha,S}(g) \leq 3 p_{\alpha,S}(f)$. از طرف دیگر، فرض کنید $x \in I$. در این صورت به‌ازای یک i داریم $x \in [x_{i-1}, x_i]$. در نتیجه

$$\|g(x)\|_S = \|L_i(x)\|_S = \left\| \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} f(x_{i-1}) + \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} f(x_i) \right\|_S \leq 2\|f\|_I,$$

که نتیجه می‌دهد $\|g\|_I \leq 2\|f\|_I$. بنابراین

$$\|g\|_{\alpha,S} = \|g\|_1 + p_{\alpha,S}(g) \leq 2\|f\|_1 + 3 p_{\alpha,S}(f) \leq 3\|f\|_{\alpha,S}.$$

به عنوان نتیجه مستقیم قضیه های ۳ و ۴ داریم:

نتیجه ۵. زیر فضای $Lip_1([a,b], S)$ در $lip_\alpha([a,b], S)$ چگال است.

نتیجه ۶. فرض کنید $0 < \alpha < \beta < 1$ در این صورت زیر فضاهای $Lip_\beta([a,b], S)$ و $lip_\beta([a,b], S)$ در $lip_\alpha([a,b], S)$ چگال هستند.

برهان. با استفاده از نتیجه ۵ و با بستارگیری از روابط

$$Lip_1([a,b], S) \subseteq lip_\beta([a,b], S) \subseteq Lip_\beta([a,b], S) \subseteq lip_\alpha([a,b], S)$$

تحت نرم $lip_\alpha([a,b], S)$ ، نتیجه مطلوب حاصل می شود.

در ادامه، نشان می دهیم $C^1([a,b], S)$ زیر فضای چگال $lip_\alpha([a,b], S)$ است. واضح است که $C^1([a,b], S) \subseteq lip_\alpha([a,b], S)$ و مشابه [۴] ثابت می شود

$$\|f\|_{C^1(I,S)} = \|f\|_1 + \|f'\|_1 \approx \|f\|_1 + p_{1,S}(f) = \|f\|_{1,S}.$$

بنابراین $C^1([a,b], S)$ زیر فضای بسته $Lip_1([a,b], S)$ است. در حقیقت، $C^1([a,b], S)$ زیر فضای سرهای از $Lip_1([a,b], S)$ است. برای اثبات قضیه تقریب پذیری بعدی، به تعاریف و نمادهایی نیاز داریم که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم.

فرض کنید S فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} ، μ اندازه مختلط بول منظم روی فضای هاسدورف و فشرده X باشد و $p \in [1, \infty)$. فضای باختر $L^p(X, S)$ متشکل از تمامی توابع S -مقدار اندازه پذیر f روی X است که در این رابطه صدق می کنند:

$$\|f\|_{L^p(X,S)} = \left(\int_X \|f(x)\|_S^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

در حالتی که $S = \mathbb{C}$ ، $L^p(X, \mathbb{C})$ را با $L^p(X)$ نمایش می دهیم. فرض کنید $L^p(X) \otimes S$ مجموعه همه ترکیب های خطی متناهی به فرم uf باشد که $u \in S$ و $f \in L^p(X)$ با استفاده از تعریف انتگرال باختر [۲]، می توان ثابت کرد $L^p(X) \otimes S$ در $L^p(X, S)$ چگال است. با توجه به چگال بودن فضای $C(X)$ در $L^p(X)$ ، می توان ثابت کرد که به ازای هر $p \in [1, \infty)$ ، فضای $C(X, S)$ در $L^p(X, S)$ چگال است.

با استفاده از مطالب مذکور و لم های ۱ و ۲ قضیه تقریب پذیری ۷ را بیان می کنیم.

قضیه ۷. فرض کنید $0 < \alpha < 1$. در این صورت $C^1([a,b], S)$ در $lip_\alpha([a,b], S)$ چگال است.

برهان. فرض کنید $I = [a,b]$ و $\Phi \in lip_\alpha(I, S)^*$ به طوری که روی $C^1(I, S)$ داشته باشیم $\Phi = 0$. با استفاده از قضیه هان-باناخ، Φ دارای توسیع پیوسته حافظ نرم روی $C_0(\tilde{I}, S)$ است و با استفاده از [۸، لم ۴] اندازه $\mu \in M(\tilde{I}, S^*)$ وجود دارد به طوری که

$$\Phi(f) = \int_{\tilde{I}} \tilde{f} d\mu, \quad f \in lip_\alpha(I, S).$$

$\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر بگیرید. بنابر لم های ۱ و ۲، اندازه $\lambda \in M(I, S^*)$ با تکیه گاه متناهی وجود دارد به طوری که

$$\left| \int_{\tilde{I}} \tilde{f} d\mu - \int_I f d\lambda \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_{\alpha,S}, \quad f \in lip_\alpha(I, S). \quad (۶)$$

تابع $f \in \text{lip}_\alpha(I, S)$ با شرط $\|f\|_{\alpha, S} \leq 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\text{supp } \lambda = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. مانند برهان قضیه ۴، تابع $F \in \text{Lip}_1(I, S) \subseteq \text{lip}_\alpha(I, S)$ وجود دارد به طوری که روی $\text{supp } \lambda$ ، $F=f$ و $\|F\|_{\alpha, S} \leq 3\|f\|_{\alpha, S}$ واضح است که F در همه نقاط I به جز $\text{supp } \lambda$ مشتق پذیر است. بنابراین می توان نوشت

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + f(a), \quad x \in I.$$

اگر قرار دهیم $\gamma = \min \{|x-y| : x, y \in \text{supp } \lambda\}$ آن گاه برای تقریباً همه نقاط $x \in I$ داریم $\|F'(x)\|_S \leq \frac{1}{\gamma^{1-\alpha}} p_{\alpha, S}(f)$. در نتیجه F' روی I به طور اساسی کران دار است و $\int_a^b \|F'(x)\|_S^p dx < \infty$.

بنابراین برای هر $p > 1$ نتیجه می شود $F' \in L^p(I, S)$.

عدد مثبت $q > 1$ با شرط $\alpha < \frac{1}{q} < 1$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $p = \frac{q}{q-1}$. بنابر مطالبی که قبل از قضیه بیان کردیم، تابع $g \in C(I, S)$ وجود دارد به طوری که

$$\|F' - g\|_{L^p(I, S)} = \left(\int_a^b \|F'(x) - g(x)\|_S^p dx \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{M \|\Phi\|}$$

که در آن $M = \left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} + (b-a)^\alpha \right) (1 + (b-a)^\alpha)$ تابع G را بدین صورت تعریف می کنیم:

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt + f(a), \quad x \in I.$$

به راحتی ثابت می شود G تابعی به طور پیوسته مشتق پذیر روی I است و $G' = g$. به عبارت دیگر، $G \in C^1(I, S)$. با به کارگیری نامساوی هولدر به ازای هر $x \in I$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \|G(x) - F(x)\|_S &\leq \int_a^x \|g(t) - F'(t)\|_S dt \\ &\leq \left(\int_a^b \|g(t) - F'(t)\|_S^p dt \right)^{1/p} (b-a)^{1/q} \\ &< \frac{\varepsilon (b-a)^{1/q}}{M \|\Phi\|}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|G - F\|_I = \sup_{x \in I} \|G(x) - F(x)\|_S < \frac{\varepsilon (b-a)^{1/q}}{M \|\Phi\|}. \quad (7)$$

به طریق مشابه، برای هر $x, y \in I$ با شرط $x < y$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\|G(x) - F(x) - G(y) + F(y)\|_S}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{1}{|x-y|^\alpha} \left\| \int_x^y g(t) dt - \int_x^y F'(t) dt \right\|_S \\ &\leq \frac{1}{|x-y|^\alpha} \int_x^y \|g(t) - F'(t)\|_S dt \\ &\leq \frac{1}{|x-y|^\alpha} \left(\int_x^y \|g(t) - F'(t)\|_S^p dt \right)^{1/p} |x-y|^{1/q} \\ &< \frac{\varepsilon (b-a)^{1/q-\alpha}}{M \|\Phi\|}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$p_{\alpha,S}(G-F) = \sup_{x \neq y} \frac{\|G(x)-F(x)-G(y)+F(y)\|_S}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{\varepsilon (b-a)^{1/q-\alpha}}{M\|\Phi\|}. \quad (8)$$

با جمع کردن روابط (۷) و (۸) داریم

$$\|G-F\|_{\alpha,S} = \|G-F\|_1 + p_{\alpha,S}(G-F) < \frac{\varepsilon \left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} \right)}{M\|\Phi\|}. \quad (9)$$

رابطه (۹) را برای دو حالت ممکن بررسی می کنیم.

حالت اول: اگر $b-a < 1$. در این حالت، با توجه به رابطه $\alpha < \frac{1}{q}$ نتیجه می شود $(b-a)^\alpha < (b-a)^{\frac{1}{q}}$. بنابراین

$$\frac{\left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} \right)}{M} < \frac{\left((b-a)^\alpha + (b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} \right)}{\left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} + (b-a)^\alpha \right) (1+(b-a)^\alpha)} < 1. \quad (10)$$

حالت دوم: اگر $b-a > 1$. در این حالت،

$$\frac{\left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} \right)}{M} < \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} (1+(b-a)^\alpha)}{\left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha} + (b-a)^\alpha \right) (1+(b-a)^\alpha)} < 1. \quad (11)$$

از رابطه های (۹) و (۱۰) و (۱۱) نتیجه می شود

$$\|G-F\|_{\alpha,S} < \frac{\varepsilon}{\|\Phi\|}. \quad (12)$$

از این که $\Phi(G)=0$ و روی تکیه گاه λ ، $F=f$ ، با استفاده از رابطه های (۶) و (۱۲) داریم

$$\begin{aligned} |\Phi(f)| &\leq \left| \Phi(f) - \int_I f \, d\lambda \right| + \left| \int_I f \, d\lambda - \Phi(F) \right| + |\Phi(F) - \Phi(G)| \\ &\leq 2\varepsilon \|f\|_{\alpha,S} + \left| \int_I F \, d\lambda - \Phi(F) \right| + |\Phi(F) - \Phi(G)| \\ &\leq 2\varepsilon \|f\|_{\alpha,S} + 2\varepsilon \|F\|_{\alpha,S} + \|\Phi\| \|F-G\|_{\alpha,S} \\ &\leq 8\varepsilon \|f\|_{\alpha,S} + \varepsilon \leq 9\varepsilon. \end{aligned}$$

در نهایت نتیجه $\Phi=0$ حاصل می شود و این یعنی $C^1([a,b],S)$ در $\text{lip}_\alpha([a,b],S)$ چگال است.

تشکر و قدردانی

از راهنمایی ها و پیشنهادات ارزنده سرکار خانم دکتر حکیمه ماهیار در نگارش این مقاله تشکر و قدردانی می کنم.

منابع

1. Bade W. G., Curtis, Jr P. C., Dales H. G., "Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras", Proc. London Math. Soc., 55 (3) (1987) 359-377.
2. Diestel J., Uhl, Jr J., "Vector Measures", Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Rhode Island (1977).

3. Hedberg L. I., "The Stone-Weierstrass theorem in Lipschitz algebras", *Ark. Mat.* (1969) 63-72.
4. Honary T. G., Mahyar H., "Approximation in Lipschitz algebras", *Quaest. Math.*, 23 (1) (2000) 13-19.
5. Johnson J. A., "Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 148 (1970) 147-169.
6. Sherbert D. R., "Banach algebras of Lipschitz functions", *Pacific. J. Math*, 13 (1963) 1387-1399.
7. Sherbert D. R., "The structure of ideals and point derivations in Banach algebras of Lipschitz functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111 (1964) 240-272.
8. Wells J., " Bounded continuous vector-valued functions on a locally compact space", *Mich. Math. J* ۱۲ ., (1965) 119-126.