

حل عددی مدل مرتبه کسری رشد جمعیت در سیستم‌های بسته با استفاده از ماتریس عملیاتی توسعه یافته توابع مثلثی

مهناز عسگری

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ابهر، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۴/۰۴

دریافت ۹۶/۰۱/۰۵

چکیده

در این مقاله یک روش عددی بر مبنای ماتریس عملیاتی توسعه یافته از توابع مثلثی برای تقریب جواب معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا از مرتبه کسری، ارائه شده است. مشتق کسری به کار رفته در این مسئله در مفهوم کاپوتو است. استفاده از ویژگی‌های توابع مثلثی و ماتریس عملیاتی توسعه یافته برای انتگرال‌گیری کسری، معادله انتگرال-دیفرانسیل را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کند. به کارگیری روش ذکر شده برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری، باعث سادگی در محاسبات می‌شود. به منظور نشان دادن کارایی و دقت روش از مثال‌های عددی استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: ماتریس عملیاتی توسعه یافته، توابع مثلثی، مدل رشد جمعیت از مرتبه کسری، معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری

مقدمه

در سال‌های اخیر توجه ویژه‌ای به محاسبات کسری و معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری شده است. این معادلات کاربردهای زیادی در علوم مختلف از جمله فیزیک، شیمی، بیولوژی و علوم مهندسی دارند [۱]-[۵]. روش‌های زیادی نیز برای حل تحلیلی و تقریب عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل کسری ارائه شده است [۶]-[۱۰]. در این مقاله هدف حل عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل (۱) است که مدل کسری جمعیت در سیستم‌های بسته نامیده می‌شود:

$$\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = y(t)(a - by(t) - c \int_0^t y(s)ds), \quad 0 \leq t, \quad (1)$$

با مقدار اولیه $y(0) = y_0$.

در معادله (۱)، $y(t)$ میزان جمعیت را در لحظه t و y_0 جمعیت اولیه در لحظه t_0 ، $a > 0$ نرخ رشد و $b > 0$ ضریب جمعیت و آخرین قسمت که شامل انتگرال است، معین کننده متابولیسم کلی است [۱۳]، [۱۴]. در حالتی که $c = 0$ و $\alpha = 1$ باشند، مدل شناخته شده و معروف لجستیک برای جمعیت به دست می‌آید و در حالتی که $c > 0$ و $\alpha = 1$ است مدل انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی برای محاسبه جمعیت در سیستم‌های بسته را داریم.

مدل کسری رشد جمعیت انتگرال-دیفرانسیل ولترا حتی در حالت $\alpha = 1$ نیز جواب تحلیلی ندارد. این مسئله اخیراً با روش‌های عددی از قبیل تقریب چندجمله‌ای‌های بسل، تقریب پده، توابع موجک لژاندر بررسی و حل شده

است [۱۵]-[۱۸]. همچنین در حالت غیرکسری نیز توجه ویژه‌ای به حل عددی این مسئله شده است از جمله روش‌های به کار رفته عبارتند از روش‌های توابع طیفی، روش سینک-کالوکیشن، روش آدومیان و توابع ترکیبی [۱۹]-[۲۶]. لازم به ذکر است که مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل تصادفی این مسئله نیز با چندجمله‌ای‌های برنشتاین تقریب زده شده است [۲۷].

در این مقاله سعی بر این است که با تعمیم ماتریس عملیاتی توابع مثلثی به ماتریس عملیاتی کسری این توابع، تقریبی عددی از جواب معادله کسری و غیرخطی مسئله رشد جمعیت در سیستم‌های بسته به دست آید.

تعاریف مقدماتی

۱. انتگرال و مشتق کسری

تعریف ۱. (انتگرال ریمان - لیوویل): انتگرال کسری ریمان - لیوویل بدین صورت تعریف می‌شود:

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$

$$I^0 f(t) = f(t).$$

تعریف ۲. (مشتق کسری کاپوتو): عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α بدین صورت تعریف شده است:

$$D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds,$$

که $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, t > 0$.

ترکیب مشتق و انتگرال کسری بدین صورت است:

$$D^{\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t),$$

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!}, \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

۲. توابع مثلثی و ماتریس عملیاتی

توابع مثلثی به وسیله دب [۲۸] بدین صورت تعریف شده‌اند:

$$T1_i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t-ih}{h} & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$$T2_i(t) = \begin{cases} \frac{t-ih}{h} & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

که $h = \frac{T}{m}$ و $i = 0, \dots, m-1$ است.

متعامد بودن، مجزا بودن (به‌ازای هر $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ رابطه $T_i(t)T_j(t) = \delta_{i,j}T_i(t)$ برقرار است، $\delta_{i,j}$ دلتای کرونکر است) و کامل بودن این توابع ثابت شده است [۲۸]. توابع برداری مثلثی نیز بدین صورت در نظر گرفته می‌شوند:

$$T1(t) = [T1_0(t), \dots, T1_{m-1}(t)]^T, \quad T2(t) = [T2_0(t), \dots, T2_{m-1}(t)]^T,$$

$$T(t) = [T1(t), T2(t)]^T.$$

تابع دلخواه f را با استفاده از بردار توابع مثلثی می توان به صورت (۲) تقریب زد:

$$f(t) \simeq \hat{f}(t) = F1^T T1(t) + F2^T T2(t) = F^T T(t), \quad (2)$$

که در رابطه (۲)، $F1_i = f(ih)$ ، $F2_i = f((i+1)h)$ ، $i = 0 \dots m-1$ و بردار F بدین صورت است:

$$F = [F1, F2]^T.$$

هر توان صحیح مثبت از تابع f را می توان براساس توابع مثلثی بدین صورت تقریب زد:

$$[f(t)]^n \simeq F_n^T T(t),$$

که مؤلفه های بردار F_n توان n ام مؤلفه های بردار F هستند. به سادگی اثبات می شود اگر B یک ماتریس $2m \times 2m$

باشد:

$$T^T(t)BT(t) \approx \hat{B}^T T(t), \quad (3)$$

که مؤلفه های بردار \hat{B} اعضای روی قطر ماتریس B است.

ماتریس عملیاتی انتگرال توابع مثلثی P ، به وسیله دب و همکارانش به دست آمده است و می توان انتگرال توابع مثلثی را با این ماتریس بدین صورت تقریب زد [۲۸].

$$\int_0^t T(s)ds \simeq PT(t),$$

هم چنین هر تقریب از تابع انتگرال پذیر f بر اساس توابع مثلثی بدین صورت است:

$$\int_0^t f(s)ds \simeq \int_0^t F^T T(s)ds \simeq F^T PT(t).$$

۳. ماتریس عملیاتی توسعه یافته

در این بخش ماتریس عملیاتی توابع مثلثی را برای تقریب انتگرال های کسری توسعه می دهیم.

انتگرال کسری را با استفاده از رابطه (۲) می توان به صورت (۴) نوشت:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F^T T(s)ds = F^T I^\alpha T(t) \quad (4)$$

که

$$I^\alpha T(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \begin{pmatrix} T1(t) \\ T2(t) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} I^\alpha T1(t) \\ I^\alpha T2(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

برای محاسبه انتگرال های کسری در رابطه (۵) کافی است عبارت های:

$$I^\alpha T1_i(t), I^\alpha T2_i(t),$$

تقریب زده شوند. به این منظور از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم:

$$\mathcal{L}\{I^\alpha T1_i(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{T1_i(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha},$$

$$\mathcal{L}\{T1_i(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-ih) - \frac{t-ih}{h}u(t-ih) + t - \frac{(i+1)h}{h}u(t-(i+1)h)\}$$

$$= \left[\frac{e^{-ihs}}{s} - \frac{e^{-ihs}}{hs^2} + \frac{e^{-(i+1)hs}}{hs^2} \right],$$

آنگاه

$$\mathbb{L}\{I^\alpha T1_i(t)\} = \frac{e^{-ihs}}{s^{\alpha+1}} - \frac{e^{-ihs}}{hs^{\alpha+2}} + \frac{e^{-(i+1)hs}}{hs^{\alpha+2}}. \quad (6)$$

بانه کارگیری معکوس لاپلاس در رابطه (۶) داریم:

$$I^\alpha T1_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} ((\alpha+1)(t-ih)^\alpha u(t-ih) - \frac{(t-ih)^{\alpha+1}}{h} u(t-ih) + \frac{(t-(i+1)h)^{\alpha+1}}{h} u(t-(i+1)h)). \quad (7)$$

به همین ترتیب $I^\alpha T2_i(t)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$I^\alpha T2_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} ((t-ih)^{\alpha+1} u(t-ih) - (t-(i+1)h)^{\alpha+1} u(t-(i+1)h) - (\alpha+1)(t-(i+1)h)^\alpha u(t-(i+1)h)). \quad (8)$$

سرانجام $I^\alpha T1_i(t)$ بر اساس توابع مثلثی به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$I^\alpha T1_i(t) \approx [c_{i0}, \dots, c_{im-1}] T1(t) + [d_{i0}, \dots, d_{im-1}] T2(t), \quad (9)$$

که:

$$d_{i,j} = I^\alpha T1_i((j+1)h), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad c_{i,j} = I^\alpha T1_i(jh) \\ c_{ij} = 0, \quad j \leq i, \quad (10)$$

$$c_{i,j} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} ((\alpha+1)(j-i)^\alpha - (j-i)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1}), \quad i < j, \quad (11)$$

$$d_{i,j} = c_{i,j+1}, \quad (12)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۹)، انتگرال کسری بردار مثلثی اول را می توان به صورت (۱۳) تقریب زد:

$$I^\alpha T1(t) = \begin{pmatrix} I^\alpha T1_0(t) \\ I^\alpha T1_1(t) \\ \vdots \\ I^\alpha T1_{m-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,m-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & & c_{1,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m-1,1} & c_{m-1,2} & \cdots & c_{m-1,m-1} \end{pmatrix} T1(t) + \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \cdots & d_{0,m-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & & d_{1,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m-1,1} & d_{m-1,2} & \cdots & d_{m-1,m-1} \end{pmatrix} T2(t), \quad (13)$$

با جای گذاری روابط (۱۰-۱۲) در (۱۳) و فرض

$$\xi_r = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} ((\alpha+1)r^\alpha - r^{\alpha+1} + (r-1)^{\alpha+1}), \quad j-i=r$$

این رابطه به دست می آید:

$$I^{\alpha} T 1(t) \approx \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} T 1(t) + \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_m \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 \end{pmatrix} T 2(t)$$

در نهایت رابطه (۱۴) به دست می آید:

$$I^{\alpha} T 1(t) \approx P 1_{\alpha} T 1(t) + P 2_{\alpha} T 2(t), \quad (14)$$

که:

$$P 1_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, P 2_{\alpha} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_m \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 \end{pmatrix},$$

می توان انتگرال کسری $I^{\alpha} T 1(t)$ مشابه روشی که در تقریب $I^{\alpha} T 2(t)$ به کار رفت را نیز تقریب زد:

$$I^{\alpha} T 2(t) \approx P 3_{\alpha} T 1(t) + P 4_{\alpha} T 2(t), \quad (15)$$

$$P 3_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_{m-1} \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \dots & \zeta_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, P 4_{\alpha} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \dots & \zeta_m \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_{m-1} \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \dots & \zeta_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta_1 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_r = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} (r^{\alpha+1} - (r-1)^{\alpha+1} - (\alpha+1)(r-1)^{\alpha})$$

با جای گذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۵) این تقریب به دست می آید:

$$I^{\alpha} T(t) = \begin{pmatrix} I^{\alpha} T 1(t) \\ I^{\alpha} T 2(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} P 1_{\alpha} T 1(t) + P 2_{\alpha} T 2(t) \\ P 3_{\alpha} T 1(t) + P 4_{\alpha} T 2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P 1_{\alpha} & P 2_{\alpha} \\ P 3_{\alpha} & P 4_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T 1 \\ T 2 \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$I^{\alpha} T(t) = P_{\alpha} T(t), \quad I^{\alpha} f(t) \simeq F^T P_{\alpha} T(t). \quad (16)$$

که P_{α} ماتریس عملیاتی توسعه یافته برای تقریب انتگرال های کسری توابع مثلثی است [۲۹].

۴. حل عددی مدل کسری جمعیت

در این بخش با استفاده از ماتریس عملیاتی توسعه یافته یک روش عددی برای حل مدل کسری جمعیت در سیستم های بسته ارائه خواهد شد.

با استفاده از مفهوم انتگرال کسری معادله (۱) را می توان به صورت معادله (۱۷) باز نویسی کرد:

$$y(t) = y_0 + a I^{\alpha} y^2(t) - b I^{\alpha} y^2(t) - c I^{\alpha} y(t) \int_0^t y(s) ds \quad (17)$$

بر حسب توابع مثلثی بدین صورت تقریب زده می شوند:

$$y_0 \simeq Y_0^T T(t) = T^T(t) Y_0, \quad (18)$$

$$y(t) \simeq Y^T T(t) = T^T(t) Y, \quad (19)$$

$$[y(t)]^2 \simeq Y_2^T T(t) = T^T(t) Y_2, \quad (20)$$

که اعضای بردار Y_2 توان دوم اعضای بردار Y هستند. با جای گذاری روابط (۱۸-۲۰) قسمت انتگرالی معادله (۱۷) را می‌توان به صورت (۲۱) تقریب زد:

$$I^\alpha(y(t) \int_0^t y(s) ds) \approx I^\alpha(T^T(t) Y \int_0^t Y^T T(s) ds) \approx I^\alpha(T^T(t) Y Y^T P T(t)) \approx \hat{B}^T P_\alpha T(t) \quad (21)$$

هم‌چنین:

$$I^\alpha(y^2(t)) \simeq I^\alpha(Y_2^T T(t)) = Y_2^T P_\alpha T(t). \quad (22)$$

بردار \hat{B} ، در رابطه (۲۱) با توجه به رابطه (۳)، به دست آمده است. در نهایت با جای گذاری روابط (۲۱) و (۲۲) در معادله (۱۷) و تبدیل \simeq به $=$ رابطه (۲۳) به دست می‌آید:

$$Y^T T(t) = Y_0^T T(t) + a Y^T P_\alpha T(t) - b Y_2^T P_\alpha T(t) - c \hat{B}^T P_\alpha T(t),$$

و یا

$$Y - P_\alpha^T (aY - bY_2 - c\hat{B}) = Y_0. \quad (23)$$

معادله (۲۳) یک دستگاه جبری غیرخطی است که می‌توان آن را با روش‌های تکراری حل کرد.

نتایج عددی

در این بخش نخست با قراردادن $c = 0$ معادله لجستیک کسری را حل می‌کنیم، سپس تقریبی عددی برای معادله انتگرال - دیفرانسیل کسری به دست می‌آوریم. نتایج عددی در این بخش با استفاده از نرم‌افزار MATLAB 2014 محاسبه شده‌اند.

حالت اول: معادله جمعیت کسری لجستیک را در نظر بگیرید [۳۰]:

$$D^\alpha y(t) = \frac{1}{2} y(t)(1 - y(t)), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (24)$$

با فرض: $y(0) = \frac{1}{2}$.

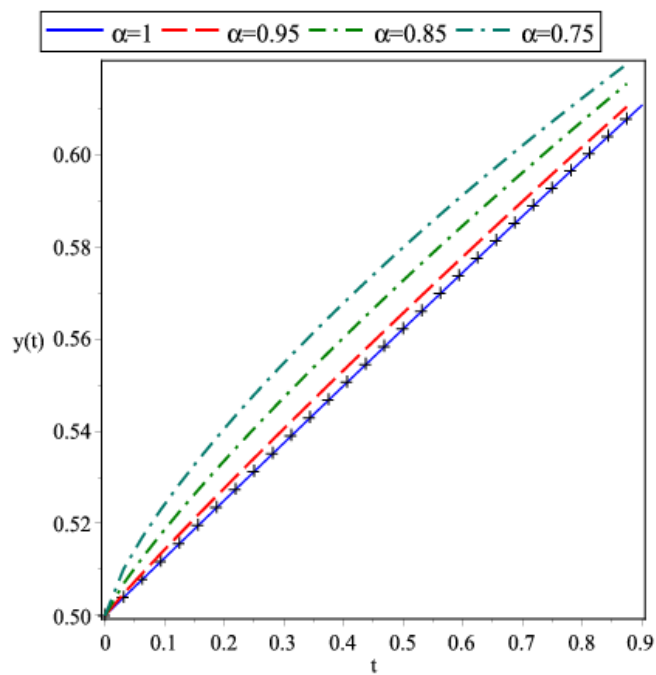
جواب دقیق این معادله در حالت $\alpha = 1$ برابر است با $y(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{1 + e^{\frac{1}{2}t}}$.

نتایج حاصل از حل عددی معادله (۲۴) به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۱ نشان داده شده است. شکل ۲ خطای حاصل به ازای $\alpha = 1$ و $m = 32$ برای حالت اول را نمایش می‌دهد. هم‌چنین برای بررسی دقت روش، در حالت $\alpha = 1$ نتایج تقریبی با جواب دقیق مقایسه شده و در جدول ۱ نمایش داده شده است.

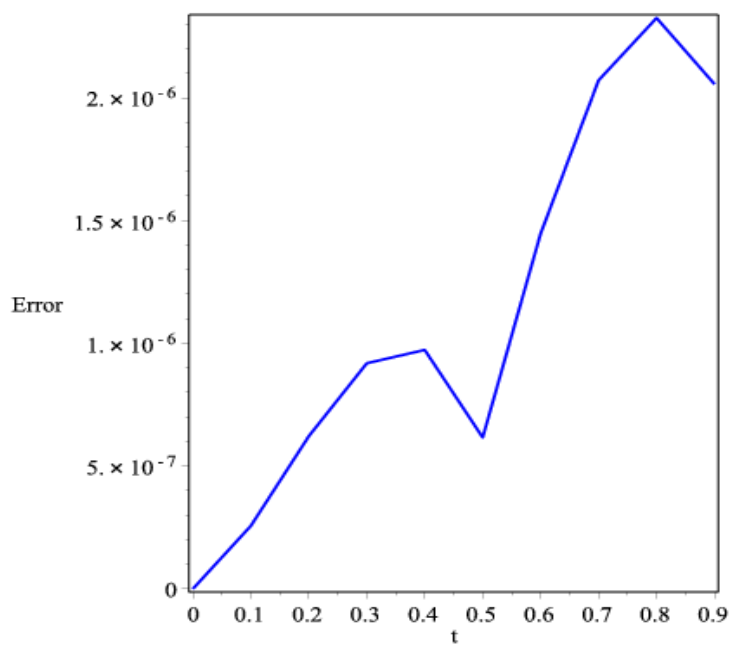
جدول ۱. خطای مطلق بین جواب‌های تقریبی و جواب واقعی

t	$m = 8$	$m = 16$	$m = 32$
۰	۰	۰	۰
۰/۱	۳/۴e-۰۶	۱/۲e-۰۶	۲/۶e-۰۷
۰/۲	۹/۶e-۰۶	۲/۰e-۰۶	۶/۲e-۰۷
۰/۳	۱/۴e-۰۵	۲/۹e-۰۶	۹/۱e-۰۷
۰/۴	۱/۶e-۰۵	۴/۹e-۰۶	۹/۷e-۰۷

t	$m = 8$	$m = 16$	$m = 32$
۰/۵	$9/8e-06$	$2/4e-06$	$6/1e-07$
۰/۶	$2/2e-05$	$7/1e-06$	$1/4e-06$
۰/۷	$3/3e-05$	$6/6e-06$	$2/0e-06$
۰/۸	$3/7e-05$	$7/4e-06$	$2/3e-06$
۰/۹	$3/3e-05$	$1/0e-05$	$2/0e-06$



شکل ۱. نتایج به ازای مقادیر مختلف α برای حالت ۱

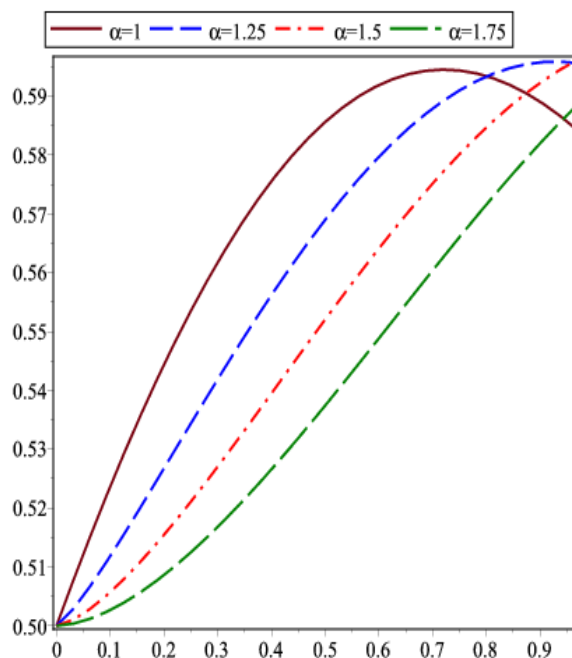


شکل ۲. نمایش خطا به ازای مقادیر $m = 32, \alpha = 1$

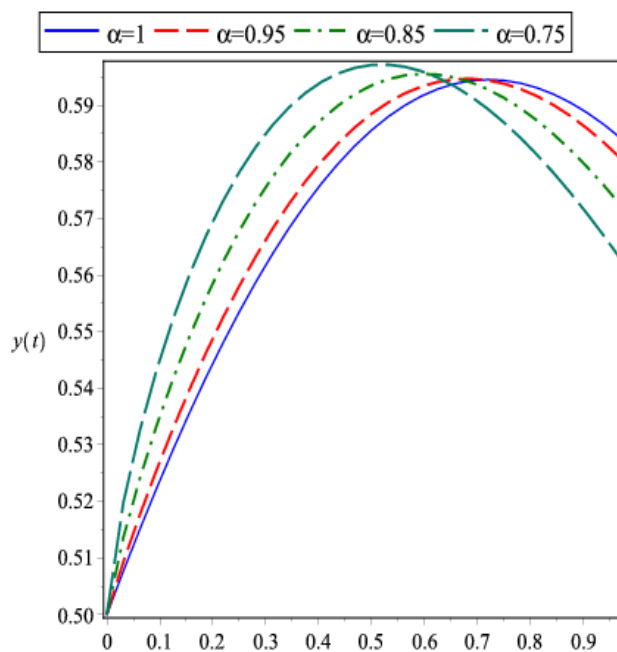
حالت دوم: معادله انتگرال - دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = y(t)(1 - y(t) - \int_0^t y(s)ds), \quad 0 \leq t, \quad y(0) = 0.5.$$

در شکل‌های ۳ و ۴ نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف α نمایش داده شده‌اند.



شکل ۳. نتایج حالت ۲ به‌ازای مقادیر مختلف α



شکل ۴. نتایج حالت ۲ به‌ازای مقادیر مختلف α

نتایج عددی حالت اول نشان می‌دهند روش پیشنهادی کارا و از دقت خوبی برخوردار است. در حالت دوم مسئله جواب تحلیلی ندارد، نتایج عددی به‌ازای مقادیر مختلف α در شکل‌های ۳ و ۴ نشان از کارایی روش پیشنهادی دارد.

نتیجه گیری

در این مقاله روش عددی کارا بر مبنای ماتریس عملیاتی توسعه یافته از توابع مثلثی برای حل معادله انتگرال-دیفرانسل کسری جمعیت ارائه شد. این روش معادله انتگرال-دیفرانسیل را به دستگاه معادله جبری تبدیل می کند و بدون نیاز به هیچ نوع انتگرال گیری معادله را حل می کند. مزایای روش، سادگی در محاسبات بدون استفاده از انتگرال گیری و مشتق گیری است. نتایج عددی مقایسه شده با جواب دقیق معادله در حالت لجستیک نشان می دهد که این روش دقت خوبی دارد.

تقدیر و تشکر

مراتب تشکر و قدرانی خود را از داوران گران قدر به دلیل نکات و پیشنهادهای ارزشمند که باعث بهبود مقاله حاضر شد، ابراز می کنیم.

منابع

1. Hilfer (Ed) R., "Application of fractional calculus in physics", World scientific publishing Co. Singapore (2000).
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., "Theory and applications of fractional differential equations", Volume 24, North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam (2006).
3. Miller K. S., Ross B., "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley (1993).
4. Oldham K. B., Spanier J., "The fractional calculus", Academic Press, New York (1974).
5. Podlubny I., "Fractional differential equations", Academic Press, New York (1999).
6. Hakem A., Berbiche M., "On the Blow-up Behavior of Solutions to Semi-Linear Wave Models with Fractional Damping", IAENG International Journal of Applied Mathematics, 41:3 (2011) 206-212.
7. Bijura A. M., "Systems of Singularly Perturbed Fractional Integral Equations II", IAENG International Journal of Applied Mathematics, 42:4 (2012) 198-203.
8. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J., "Fractional calculus models and numerical methods (Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos)", World Scientific (2012).
9. Bhatti M., Bracken P., "Solutions of Differential Equations in a Bernstein Polynomial Basis", J. Comput. Appl. Math., 205 (2007) 272-280.
10. Doha E. H., Bhrawy A. H., Saker M. A., "Integrals of Bernstein polynomials: an application for the solution of high even-order differential equations", Appl. Math. Lett., 24 (2011) 559-565.
11. Xu H., "Analytical approximations for a population growth model with fractional order", Commun Nonlinear Sci Numer. Simulat, 14 (2009) 1978-1983.
12. Momani S., Qaralleh R., "Numerical approximations and Padé' approximants for a fractional population growth model", Appl. Math. Model. 31(2009) 1907-1914.
13. TeBeest K., "Numerical and analytical solutions of Volterra's population model", SIAM Rev. 39 (1997) 484-93.
14. Small R. D. "Population growth in a closed model, mathematical modelling: classroom notes in applied mathematics", SIAM, Philadelphia, PA, 1989, SIAM Rev., 39 (3) (1997)

- 484-493.
15. Scudo F. M., "Vito Volterra and theoretical ecology", *Theor. Populat. Biol.* 2 (1971) 1-23.
 16. Yüzbaşı S., "A numerical approximation for Volterra's population growth model with fractional order", *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013) 3216-3227.
 17. Wazwaz A. M., "Analytical approximations and Pade' approximants for Volterra's population model", *Appl. Math. Comput.* 100 (1999) 13-25.
 18. Heydari M. H., Hooshmandasl M. R., Cattani C., Ming Li., "Legendre Wavelets Method for Solving Fractional Population Growth Model in a Closed System", *Mathematical Problems in Engineering*, doi.org/10.1155/2013/161030 (2013).
 19. Mohyud-Din S. T., Yildirm A., Gülkanat Y., "Analytical solution of Volterra's population model", *J. King Saud University (Science)* 22 (2010) 247-250.
 20. Al-Khaled K., "Numerical approximations for population growth models", *Appl. Math. Comput.* 160 (2005) 865-873.
 21. Ramezani M., Razzaghi M., Dehghan M., "Composite spectral functions for solving Volterra's population model", *Chaos Solitons Fract.*, 34 (2007) 588-593.
 22. Parand K., Delafkar Z., Pakniat N., Pirkhedri A., Kazemnasab Haji M., "Collocation method using sinc and Rational Legendre functions for solving Volterra's population model", *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 1811-1819.
 23. Parand K., Hojjati G., "Solving Volterra's population model using new second derivative multistep methods", *Am. J. Appl. Sci.* 5 (2008) 1019-1022.
 24. Parand K., Razzaghi M., "Rational Chebyshev Tau method for solving Volterra's population model", *Appl. Math. Comput.* 149 (2004) 893-900.
 25. Marzban H., Hoseini S. M., Razzaghi M., "Solution of Volterra's population model via block-pulse functions and Lagrange interpolating polynomials", *Math. Methods Appl. Sci.* 32 (2009) 127-134.
 26. Bouhassoun A., "Multistage Telescoping Decomposition Method for Solving Fractional Differential Equations", *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 43:1 (2013) 10-16.
 27. Khodabin M., Maleknejad K., Asgari M., "Numerical solution of a stochastic population growth model in a closed system", *Advances in Difference Equations* (2013) 130.
 28. Deb A., Dasgupta A., Sarkar G., "A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems", *J. Franklin Institute*, 343 (2006) 1-26.
 29. Maleknejad K., Asgari M., "The construction of operational matrix of fractional integration using triangular functions", *Applied Mathematical Modelling*, 39 (3-4) (2015) 1341-1351.
 30. Khan H., Alipour M., Khan R. A., Tajadodi H., Khan A., "On Approximate Solution of Fractional Order Logistic Equations by Operational Matrices of Bernstein Polynomials", *Journal of mathematics and computer science*, 14 (2015) 222-232.