Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Diagonal Reduction of Matrices over Refinement Rings

Marjan Sheibani Abdolyousefi[1] ✉, Rahman Bahmani Sangesari[2], Nahid Ashrafi[3]

1. Women's University of Semnan (Farzanegan), Semnan, Iran.

✉E-mail: sheibani@fgusem.ac.ir

2. Faculty of mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran.

E-mail: rbahmani@semnan.ac.ir

3. Faculty of mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran.

E-mail: nashrafi@semnan.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
29 June 2020
Revised form:
2 February 2021
Accepted:
7 February 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:
refinement;
projective;
exchange;
diagonal
reduction;
regular.

ABSTRACT

Introduction

All rings considered here are associative with an identity and all modules are unital. A ring R is called Bezout, if every finitely generated ideal of R is principal. Let R be a ring, an $m \times n$ matrix A over R admits a diagonal reduction provided that there exist invertible matrices P and Q such that PAQ is a diagonal matrix, where by the diagonal matrix, we mean a matrix $C = (c_{ij}), (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$, such that $c_{ij} = 0$ for all $i \neq j$.

Following Kaplansky, a ring R is called a right (left) Hermite ring if every 1×2 (2×1) matrix over R admits a diagonal reduction. He also called a ring R to be an elementary divisor ring if every $m \times n$ matrix over R is equivalent to a diagonal matrix $diag(d_1, d_2, \dots, d_m)$, where d_i is a total divisor of d_{i+1}, $(Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i)$. We are interested to investigate the diagonalizability of matrices over wide class of rings, namely refinement rings, which are a generalization of exchange rings.

Main results

Dubbertin defined a monoid to be refinement as the following:

A monoid $(M,+,0)$ is said to be a refinement monoid, if the following conditions are satisfied:

(1) There are no non-zero inverse elements, that means, if $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 0$ then, $\mathrm{x} = \mathrm{y} = 0$.

(2) M has the refinement property, that is, given $x_i , y_j \in M$, with, $\sum x_i = \sum y_j$, there are, $z_{ij} \epsilon M, i < n, j < m, n, m \in N$ and $n, m \geq 2$, such that:

$x_i = \sum_j z_{ij} , y_j = \sum_i z_{ij}$.

We say that a ring R is a refinement ring, if the monoid of finitely generated projective R-modules,

$V(R)$, with the operation $P + Q = P \oplus \mathrm{Q}$, for all finitely generated projective R-modules P, Q, has the refinement property.

Let R be a commutative refinement ring and M, N, be two finitely generated projective R-modules. Then, $M \cong N$ if and only if $M_m \cong N_m$ for all maximal ideal m of R.

Also we study the diagolalizability of regular matrices over refinement rings based on the cancelation law.

For the refinement ring R with the following cancellation law,

$2R \oplus A \cong R \oplus B \Longrightarrow R \oplus A \cong B$,

Where A, B are finitely generated projective R-modules and B is a generator. It is proved that, every regular square matrix over a refinement ring R admits diagonal reduction if and only if every regular matrix, over $\frac{R}{J(R)}$ admits diagonal reduction, while it does not hold in non-refinement rings and by the regular matrix, we mean an $m \times m$ matrix A such that there exists an $m \times m$ matrix B, in which $ABA = A$.

How to cite: Sheibani Abdolyousefi, M., Bahmani Sangesari, R., Ashrafi, N., (2022) Diagonal Reduction of Matrices over Refinement Rings. *Mathematical Researches*, 8 (3), 132-143

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ای تظریف‌پذیر

مرجان شیبانی عبدالیوسفی[۱] ✉، رحمان بهمنی سنگسری[۲]، ناهید اشرفی[۳]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشگاه خواهران سمنان (فرزانگان)، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: sheibani@fgusem.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: rbahmani@semnan.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: nashrafi@semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۱۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
تظریف‌پذیر،
تصویری،
تبادلی،
قطری‌پذیر،
منظم.

چکیده

حلقهٔ R را یک حلقهٔ تظریف‌پذیر می‌نامیم، هرگاه تکواره R-مدول‌های تصویری با تولید متناهی آن، تظریف‌پذیر باشد. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی تظریف‌پذیر و M و N، R-مدول تصویری متناهی مولد باشند. در این صورت، $M \cong N$ اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال m در حلقه R، $M_m \cong N_m$.

یک ماتریس مستطیلی A روی حلقه R تقلیل یافتهٔ قطری نامیده می‌شود هرگاه، ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q موجود باشند، به طوری که PAQ یک ماتریس قطری باشد.

اگر R حلقه‌ای تظریف‌پذیر و خاصیت حذفی زیر برای R مدول‌های تصویری متناهی مولد دلخواه A و B که B مولد نیز است، برقرار باشد،

$$2R\oplus A \cong R\oplus B \Longrightarrow R\oplus A \cong B.$$

آن‌گاه هر ماتریس مربعی منظم روی R تقلیل یافته قطری است.

همچنین نشان می‌دهیم، برای هر حلقه تظریف‌پذیر R، هر ماتریس منظم روی R، تقلیل یافته قطری است اگر تنها اگر هر ماتریس منظم روی حلقه $\frac{R}{J(R)}$، تقلیل یافته قطری باشد.

استناد: شیبانی عبدالیوسفی، مرجان؛ بهمنی سنگسری، رحمان؛ اشرفی، ناهید؛ (۱۴۰۱). قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ای تظریف‌پذیر. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۴۳-۱۳۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله، تمامی حلقه‌ها یکدار و شرکت پذیر و تمام مدول‌ها یکانی می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که یک حلقه R، بزوت[۱] نامیده می‌شود ،هر گاه هر ایده‌آل با تولید متناهی R، دوری باشد.

ماتریس مستطیلی $A = (a_{ij})_{m\times n}$ روی R تقلیل یافته قطری نامیده می‌شود، هر گاه ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q موجود باشند به طوری‌که PAQ یک ماتریس قطری باشد. منظور از ماتریس قطری ماتریسی مانند $(a_{ij})_{m\times n}$ است، که برای هر $i \neq j$، $a_{ij} = 0$.

کاپلانسکی در مرجع [۱] حلقه R را هرمیتی[۲] راست (چپ) نامید، هر گاه هر ماتریس ۲×۱ (۱×۲) روی R، تقلیل یافته قطر ی‌باشد. او همچنین حلقه R را حلقه مقسوم علیه ابتدایی[۳] نامید هر گاه هر ماتریس $m \times n$ در R تقلیل یافته قطری به فرم $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ باشد که برای هر $1 \leq i \leq m$ ،d_i یک مقسوم علیه کلی از d_{i+1} باشد ($Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i$). یعنی ایده‌آل دو طرفه تولید شده توسط d_{i+1} زیر مجموعه اشتراک ایده‌آل‌های چپ و راست تولید شده توسط d_i باشد. مطالعهٔ قطرپذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ها، تاریخچه‌ای قوی دارد. قبل از مطالعه کاپلانسکی روی حلقه‌های مقسوم علیه ابتدایی، در سال ۱۹۴۸، [۱]، نویسندگان زیادی از جمله اسمیت [۲]، دیکسون [۳] ودربورن [۴] واردن [۵] و جاکوبسون [۶] این مسأله را روی دامنه‌های اقلیدسی جابه‌جایی و ناجابه‌جایی و دامنهٔ ایده‌ال اصلی جابه‌جایی مطالعه کردند. هنریکسن [۷] ثابت کرد هر حلقهٔ منظم یکه یک حلقهٔ مقسوم علیه ابتدایی است و لوی در [۸] نشان داد هر ماتریس مربعی روی حلقه‌های سریال تقلیل یافتهٔ قطری است. یک حلقهٔ R سریال نامیده می‌شود هر گاه به عنوان مدول $R-$مدول سریال باشد یعنی زیر مدول‌های آن با نسبت ترتیب مرتب کلی باشند. منال و منکیسی [۹] به مسأله قطرپذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌های منظم[۴] با استفاده از قانون حذفی در تکواره R–مدول‌های تصویری متناهی مولد را مطالعه و ثابت کردند که هر ماتریس منظم روی حلقهٔ منظم R تقلیل یافتهٔ قطری است اگر و فقط اگر R– مدول‌های تصویری متناهی مولد، در خاصیت حذفی زیر صدق کنند.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \Longrightarrow R \oplus A \cong B$$

[۱] Bezout
[۲] Hermite
[۳] Elementary divisor ring
[۴] Regular rings

در سال ۱۹۷۷، آرا، گودرل، امرا و پاردو [۱۰] این نتیجه را از حلقه‌های منظم به حلقه‌های تبادلی[۵] گسترش دادند، و نشان دادند هر ماتریس منظم روی حلقهٔ تبادلی R، تقلیل یافته قطری است اگر و فقط اگر برای R–مدول‌های تصویری متناهی مولد دلخواه A و B رابطه حذفی زیر برقرار باشد.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \Rightarrow R \oplus A \cong B$$

چن در مرجع [۱۱] یک حلقهٔ R را تبادلی نامید هرگاه برای هر R–مدول M و هر دو تجزیه M به صورت زیر

$$M = A \oplus B = \oplus_{i \epsilon I} A_i$$

که $A_i \cong R$ و I یک مجموعه اندیس گذار دلخواه، می‌باشند، $R-$ مدول‌های $A'_i \subseteq A_i$ موجود باشند، به طوری که

$$M = A \oplus (\oplus_{i \epsilon I} A'_i).$$

از آن‌جا که دستهٔ وسیعی از حلقه‌ها، از جمله حلقهٔ چند جمله‌ای‌ها روی حلقهٔ اعداد صحیح، تبادلی نیستند. ما علاقمندیم، قطری‌پذیری ماتریس‌ها را روی دستهٔ وسیع‌تری از حلقه‌های تبادلی، حلقه‌های تظریف‌پذیر[۶]، را بررسی کنیم. بیشتر حلقه‌های شناخته شده تظریف‌پذیر هستند و در مرجع [۱۴] نویسندگان مثالی از حلقه‌ای غیر تظریف‌پذیر ارائه کرده‌اند. در بخش دوم، موضعی‌سازی حلقه‌های تظریف‌پذیر را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی تظریف‌پذیر و M و N دو R– مدول باشند، آن‌گاه $M \cong N$ اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسمال P از حلقه R، $M_P \cong N_P$.

در بخش سوم، برخی خواص حلقه‌های هرمیتی را بررسی می‌کنیم و خاصیت هرمیتی بودن را روی حلقهٔ چند جمله‌ای‌ها و سری‌های توانی بررسی می‌کنیم. مثالی از توسیعی از یک حلقهٔ هرمیتی ارائه می‌دهیم که هرمیتی نباشد. همچنین با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری دو جبر هرمیتی،، هرمیتی نیست. سپس نتایج مرجع [۱۰] را، از حلقه‌های تبادلی به حلقه‌های تظریف‌پذیر گسترش می‌دهیم.

نشان می‌دهیم، روی حلقهٔ تظریف‌پذیر و جابه‌جایی R، هر ماتریس تقلیل یافته قطری است اگر و تنها اگر هر ماتریس روی حلقهٔ $\frac{R}{J(R)}$ تقلیل یافته قطر می‌باشد.

در سراسر این مقاله، ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های دوطرفه و R–مدول‌ها، R-مدول‌های راست یکانی می‌باشند. از نماد $M_n(R)$ برای نشان دادن حلقهٔ ماتریس‌های $n \times n$ روی R استفاده می‌کنیم. نماد I_n نشان دهندهٔ ماتریس همانی، $GL_n(R)$ گروه خطی ماتریس‌های $n \times n$ وارون پذیر روی R و $FP(R)$ نیم گروه، R- مدول‌های تصویری متناهی مولد R با عمل

---

[۵] Exchange rings

[۶] Refinement rings

جمع را نشان می‌دهد. V (R) نماد تکواره R– مدول‌های تصویری متناهی مولد است که عمل جمع آن به صورت زیر است.

$$A + B = A \oplus B$$

از نماد Z برای نشان دادن مجموعه اعداد صحیح استفاده می‌کنیم و J (R) رادیکال جابکسون R را نشان می‌دهد.

حلقه‌های جابه‌جایی تظریف‌پذیر

دبرتین [۱۲] در سال ۱۹۸۲ یک تکواره $(M , + , 0)$ را تظریف‌پذیر نامید اگر در شرایط زیر صدق کند.

۱- در تکواره M، هیچ عنصر غیرصفر وارونی موجود نباشد. یعنی اگر برای هر $x,y \in M$، $x + y = 0$ آنگاه $x = y = 0$.

۲- تکواره M خاصیت تظریف پذیری داشته باشد، به عبارتی اگر

$$x_i, y_j \in M ,\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j ، 2 \le i \le m,\ \ 2 \le j \le n$$

آن‌گاه $z_{ij} \in M$ موجود باشد که

$$x_i = \Sigma_i z_{ij} ,y_i = \Sigma_i z_{ij} ، \left(n,m \in N, j < m , i < n \text{ و } n,m \ge 2\right)$$

کافی است، رابطهٔ بالا برای حالت $m = n = 2$ برقرار باشد.

حلقهٔ R را تظریف‌پذیر می‌نامیم، هر گاه تکواره، R- مدول‌های تصویری متناهی مولد آن، V (R)، تظریف‌پذیر باشد. در سال ۱۹۶۴، کرالی و جانسن [۱۳] نشان دادند که اگر R حلقه‌ای تبادلی باشد آن‌گاه تکوارهٔ R مدول‌های تصویری متناهی مولد آن تظریف‌پذیر است. اما عکس آن درست نیست. به عنوان مثال حلقهٔ اعداد صحیح تظریف‌پذیر است اما تبادلی نیست. همچنین در مرجع [۱۵] نشان داده شده که هرحلقهٔ تصویری آزاد[۷]، تظریف‌پذیر است اما لزوماً تبادلی نیست. این مسائل ما را ترغیب کرد تا قطرپذیری ماتریس‌ها را روی حلقه‌های تظریف‌پذیر بررسی کنیم. و نتایج مرجع [۱۰] را روی حلقه‌های تظریف‌پذیر گسترش دهیم.

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی، M یک R– مدول تصویری متناهی مولد، P یک ایده‌آل ماکسیمال R و R_P حلقه موضعی‌سازی R باشد، لذا R_P حلقه‌ای موضعی است و $M_P \cong M \otimes_{ریال} R_P$ یک R_P– مدول آزاد است.

[۷] Projective – free ring

اگر عدد ثابت n موجود باشد به طوری که به ازای هر ایده‌آل اول P از حلقه R, $M_P \cong R_P^n$، آن‌گاه گوییم M یک R مدول تصویری متناهی مولد از رتبهٔ ثابت[۸] n نامیده می‌شود.

در این بخش برخی خواص حلقه‌های تظریف‌پذیر جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید R یک حلقه جابجایی تظریف‌پذیر و M و N، R- مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند، آن‌گاه شرایط زیر معادلند.

(۱) $M \cong N$

(۲) برای هر ایده‌آل اول P از حلقه R، $M_P \cong N_P$

اثبات. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) بدیهی است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم $M \ncong N$ مشابه آن‌چه در مرجع [۱۶] قضیهٔ ۲.۱، ثابت شده است، خود توان‌های متعامد[۹] $e_1, e_2, \dots, e_n$ از حلقهٔ R موجودند به طوری که،

$M \cong t_{11}(e_1R) \oplus \dots t_{1k}(e_kR)$ و $N \cong t_{21}(e_1R) \oplus \dots \oplus (t_{2k}e_kR)$.

پس $1 \leq j \leq k$ موجود است به طوری که $e_j \neq 0$ و $t_{1j} \neq t_{2j}$. چون e_j پوچ توان نیست، لذا ایده‌آل اول P از R موجود است که $e_j \notin P$ برای هر $i \neq j$ چون $e_ie_j = 0$ لذا $e_i \in P$. بنابراین،

$$M_P \cong M_R \otimes_R P \cong \bigoplus_{i=1}^{k} t_{1i}(e_iR) \otimes_R R_P$$

اگر $i \neq j$ چون $e_i \in P$، لذا $1 - e_i \notin P$. همچنین $(1 - e_i)e_i = 0$، $R_P = 0$، $e_iR \otimes R_P \cong \frac{e_i}{1}$.

بنابراین

لذا، $M_P \cong t_{1j}R_P$. به طریق مشابه، $N_p \cong t_{2j}R_p$.

همچنین R_P حلقه‌ای جابه‌جایی است و دارای بعد ثابت پایاست.[۱۰] بنابراین، $M_P \ncong N_P$ که تناقص است.

نتیجهٔ ۱. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی تظریف‌پذیر باشد. در این صورت، هر R–مدول تصویری متناهی مولد و از رتبهٔ ثابت، آزاد است.

اثبات: فرض کنید M یک R- مدول تصویری متناهی مولد و از رتبهٔ ثابت n باشد. داریم،

$$M \cong R_P^n \cong (R^n)_P$$

[۸] Constant rank

[۹] Orthogonal idempotent

[۱۰] Invariant basis number

که، P ایده‌آل اولی از حلقهٔ R است. بنا بر قضیهٔ ۱، M آزاد است.

چن در مرجع [۱۱] یک R–مدول تصویری متناهی مولد P را به طور پایدار آزاد نامید، هر گاه اعداد طبیعی m, n موجود باشند به طوری که $P \oplus R^n \cong R^m$.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید R یک حلقه تظریف‌پذیر جابه‌جایی باشد. آن‌گاه هر R مدول به طور پایدار آزاد، آزاد است.

اثبات: طبق نتیجه ۱، اثبات بدیهی است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید، R یک حلقه جابه‌جایی تظریف‌پذیر و N وM ، R -مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند. در این صورت شرایط زیر معادلند،

(۱) $M \cong N$

(۲) $M_P \cong N_P$ برای هر ایده آل ماکسیمال P از حلقه R.

اثبات: (۱) $\Leftarrow$ (۲) بدیهی است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید $M \ncong N$، بنابر قضیهٔ ۲.۱ از .مرجع [۱۶]، خود توان‌های متعامد $e_1, \dots, e_k \in R$ و اعداد صحیح نامنفی t_{ij} موجودند به طوری که،

$$N \cong t_{21}(e_1R) \oplus t_{22}(e_2R) \dots \oplus t_{2k}(e_kR)$$
$$M \cong t_{11}(e_1R) \oplus t_{12}(e_2R) \oplus \dots \oplus t_{1k}(e_kR)$$

چون $M \ncong N$ سپس $1 \le j \le k$ موجود است به طوری که، $e_j \neq 0$ و $t_{1j} \neq t_{2j}$. لذا ایده‌ال ماکسیمال P از حلقهٔ R موجود است که $e_j \notin P$ ، زیرا در غیر این صورت $e_j \in J(R)$ و لذا $e_j = 0$ که متناقض است با این‌که $e_j \notin P$.

از طرفی به ازای هر $i \neq j$، $e_i e_j = 0$. حال با روشی مشابه قضیهٔ ۱، نتیجه می‌گیریم که $M \cong N$.

فرض کنید، R حلقه‌ای جابه‌جایی و $0 \neq x \in R$. قرار دهید،

$$R_{(x)} = S^{-1}R \ , S = \{1, x, x^2, \dots\}.$$

قضیهٔ ۳. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و تظریف‌پذیر باشد و $R = (f_1, \dots, f_n)$. فرض کنیم M و N، R– مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند در این صورت شرایط زیر معادلند.

(۱) $M \cong N$.

(۲) $M_{(f_i)} \cong N_{(f_i)}$ برای هر $1 \le i \le n$.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) بدیهی است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید P یک ایده آل اول R باشد، چون $R = (f_1, \dots, f_n)$، $f_i \in R$ موجود است که $f_i \notin P$ لذا

$f_i \in R - P$. فرض کنید $T = R - P$. در این صورت

$$M_P \cong T^{-1}M_{(f_i)}$$

به طریق مشابه،

$$N_P \cong T^{-1}N_{(f_i)}$$

چون

$$M_{(f_i)} \cong N_{(f_i)}$$

داریم،

$$M_P \cong N_P$$

طبق قضیهٔ ۱، نتیجه می‌گیریم که $M \cong N$.

نتیجهٔ ۳. فرض کنید R حلقه‌ای تظریف‌پذیر جابه‌جایی، $a\in R$، M و N ، R - مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

(۱) $M \cong N$

(۲) $M_{(a)} \cong N_{(a)}$ و $M_{(1-a)} \cong N_{(1-a)}$

اثبات: بدیهی است.

حلقه‌های هرمیتی و قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌های تظریف‌پذیر

در این بخش برخی خواص حلقه‌های هرمیتی را بررسی می‌کنیم.

حلقهٔ R را یک حلقهٔ هرمیتی نامیم، هر گاه هر ماتریس 2×1 و هر ماتریس 1×2 روی R، تقلیل یافته قطری باشد.

مثال ۱. فرض کنید $R = Z_4[x]$ در این صورت $\frac{R}{J(R)}$ حلقه‌ای هرمیتی است ولی R هرمیتی نیست.

اثبات: واضح است که $J(R) = \{\bar{0},\bar{2}\}[x]$. بنابراین $\frac{R}{J(R)} \cong Z_2[x]$ که یک دامنهٔ ایده‌آل اصلی و لذا هرمیتی است. در حالی که $I = 2R + xR$، ایده‌آلی از حلقه R است ،که دوری نیست. بنابراین R حلقه بزوت نیست و لذا هرمیتی نیست.

گزارهٔ ۱. فرض کنید، R حلقه‌ای هرمیتی و x یک متغیر روی R باشد، به طوری که $R[[x]]$ حلقه‌ای بزوت باشد. در این صورت

$R[[x]]$ هرمیتی است.

برهان: فرض کنید $\psi: R[\![x]\!] \to R$ با ضابطهٔ $\psi: \big(f(x)\big) = f(0)$. در این صورت، $\ker\psi \subseteq J(R[\![x]\!])$ و ψ همریختی پوشاست. بنابراین $\frac{R[\![x]\!]}{\ker\psi} \cong R$ که نشان می‌دهد $\frac{R[\![x]\!]}{\ker\psi}$ هرمیتی است، چون $R[\![x]\!]$ بزوت است. طبق مرجع[۱۵]،$R[\![x]\!]$ هرمیتی است.

تگانبیو (Toganbaev) در مطالعهٔ خود روی حلقه‌های بزوت، در مرجع [۱۶] لم ۳، نشان داد که برای هر حلقه R، حلقهٔ بزوت S و خود توان $e\in S$ موجودند به طوری که $R \cong eSe$. بنابراین برای هر حلقه R و هر خودتوان e، حلقه eRe لزوماً بزوت نیست. این مسأله که برای هر حلقه هرمیتی R، تحت چه شرایطی eRe یک حلقه هرمیتی است همچنان یک سؤال باز است.

مثال ۲. فرض کنیدF یک میدان و x و y دو متغیر روی F باشند در این صورت F[x] و F[y] جبرهای هرمیتی هستند اما $F[x]\otimes_F F[y]$ یک F جبر هرمیتی نیست.

اثبات: چون F [x] و F [y] دامنه ایده آل اصلی جابه‌جایی هستند لذا دامنهٔ بزوت هستند پس بنابر قضیهٔ ۲. ۵. از مرجع [۱]، F [x] و F [y] هرمیتی هستند. در حالی که، $F[x]\otimes_F F[y] \cong F[x,y]$ و F [x , y] بزوت نیست. زیرا ایده‌آل

$I = (x, y)$ دوری نیست. پس این جبر هرمیتی نیست.

فرض کنید R یک حلقهٔ و M یک $R - R$ دو مدول باشد در این صورت مجموعه $\big\{(r,m)|r \in R, m \in M\big\}$ با دو عمل زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقهٔ توسیع بدیهی[۱۱] نامیده می‌شود و با نماد T (R ,M) نشان داده می‌شود.

$$\forall r_1, r_2 \in R, m_1, m_2 \in M,\ (r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1).(r_2, m_2) = \big(r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2\big)$$

واضح است که $T(R,M) \cong \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} a \in R, b \in M\right\}$.

حال نشان می‌دهیم که خاصیت هرمیتی بودن از حلقه R به حلقه توسیع بدیهی آن انتقال داده نمی‌شود.

ابتدا مفهوم FP– انژکتیو بودن را بیان می‌کنیم.

بنابر مرجع [۱۷] یک R– مدول M، FP انژکتیو نامیده می‌شود هر گاه برای هر R– مدول با نمایش متناهی N، $\mathrm{Ext}^1 (N , M) = 0$. واضح است که $\mathrm{Ext}^1(Z_4,Z) \neq 0$ که نشان می‌دهد حلقه Z، FP- انژکتیو نیست. همچنین یک حلقه R، کاهشی[۱۲] نامیده می‌شود.، هر گاه هیچ پوچ توان غیربدیهی نداشته باشد.

[۱۱] Trivial ring extension
[۱۲] Reduced ring

یک حلقهٔ R منسجم[۱۳] نامیده می‌شود. هر گاه هر ایده‌ال با تولید متناهی آن با نمایش متناهی باشد.

مثال ۳. فرض کنید حلقه R به صورت، $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a,b \in Z\right\}$ باشد. در این صورت R حلقه‌ای غیر هرمیتی است، در حالی که، Z حلقه هرمیتی است.

برهان: بنا بر قضیهٔ ۶.۲.۱ از مرجع[۱۸] ، Z یک حلقه مقسوم علیه ابتدایی و لذا هرمیتی است. فرض کنید R حلقه‌ای هرمیتی باشد، لذا بنابر نتیجه ۳. ۳ مرجع [۱۷]، Z حلقه‌ای بزو و $FP-$ انژکتیو است که متناقض با مثال بالاست. لذا R هرمیتی نیست.

بنا بر مرجع [۱۱] برای هر دو عدد طبیعی m, n، یک همریختی $f \in \mathrm{Hom}_R(nR , mR)$ منظم نامیده می‌شود هرگاه همریختی $g \in \mathrm{Hom}_R(nR , mR)$ موجود باشد به طوری که $fgf = f$.

گزارهٔ زیر در مرجع [۱۰] برای حلقه‌های تبادلی اثبات شده است، ما آن را به حلقه‌های تظریف‌پذیر تعمیم می‌دهیم.

گزارهٔ۲. فرض کنید R حلقه‌ای تظریف‌پذیر، $(n \geq m)$، $f \in M_{m\times n}(R)$ ، منظم باشد. در این صورت f تقلیل یافتهٔ قطری است اگر و فقط اگر تجزیه‌های زیر، برای $Ker(f), Im(f), Coker(f)$ موجود باشند.

$$\mathrm{Ker}(f) = K_1\oplus \dots \oplus K_n \;\; , \mathrm{Im}(f) = I_1\oplus \dots \oplus I_m \;\; , \mathrm{Coker}(f) = C_1 \oplus C_2 \dots \oplus C_m \,.$$

به طوری که،

$K_j\oplus I_j \cong C_j\oplus I_j \cong R$ برای هر $j = 1 , \dots , m$ و $\cong R$ برای هر $j = m+1 , \dots , n$.

و اگر $m \geq n$ آن‌گاه f تقلیل یافتهٔ قطری است اگر و تنها اگر

$$Ker\, f = K_1\oplus \dots \oplus K_n \text{ و } \mathrm{Im}(f) = I_1\oplus \dots \oplus I_n \text{ ، } \mathrm{Coker}(f) = C_1\oplus \dots \oplus C_m$$

به طوری که

$K_j\oplus I_j \cong C_j\oplus I_j \cong R,\; j = 1 \dots ,n$ ، $K_j \cong R,\;\; j=n+1 \dots ,m$.

برهان: اثبات شبیه اثبات گزارهٔ ۲. ۳. از مرجع [۱۰] است.

فرض کنید R, C, I, K- مدول‌های با تولید متناهی باشند به طوری که،

$nR \cong K\oplus I$ و $(n \geq m) mR \cong R\oplus C$.

در این صورت یک تظریف قطری برای این تجزیه‌ها در صورت وجود به شکل،

$$K = K_1 \oplus K_2 \dots \oplus K_n \text{ ،} I = I_1 \oplus I_2 \dots \oplus I_n \text{ ، } C_1 \oplus C_2 \dots \oplus C_m$$

[۱۳] Coherent ring

می‌باشد، به طوری که

$$K_i \cong R \text{ ،} K_j \oplus I_j \cong C_j \oplus I_j \cong R, i = m+1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

لم ۱. فرض کنید R حلقه‌ای تظریف‌پذیر باشد. n و m اعداد طبیعی، K ، I وC، $R-$ مدول‌های با تولید متناهی باشند و

$nR \cong K\oplus I$ ، $mR \cong R\oplus C$ و $n \geq m$. همچنین $K \cong K'\oplus X$ و $C \cong C'\oplus X$

برای $R-$ مدول‌های K' ، X و C' . در این صورت اگر تجزیه‌های بالا دارای تظریف قطری باشند، آن‌گاه، تجزیه

$nR \cong K\oplus I$ و $mR \cong R\oplus C$

دارای تظریف قطری است.

برهان: مشابه برهان گزارهٔ ۲.۲، از مرجع [۱۰] است.

قضیهٔ زیر در مرجع [۱۰] برای هر حلقه تبادلی ثابت شد که ما آن را برای حلقهٔ تظریف‌پذیر تعمیم می‌دهیم.

قضیهٔ ۴. فرض کنید R حلقه‌ای تظریف‌پذیر با این خاصیت که $2R\oplus A \cong R\oplus B$ ایجاب کند که $R\oplus A \cong B$ برای $R-$ مدول‌های تصویری با تولید متناهی B و A که B مولد نیز باشد. در این صورت هر ماتریس مربعی منظم روی R تقلیل یافتهٔ قطری است.

برهان: فرض کنیم $f: nR \to nR$ یک ماتریس منظم باشد، قرار دهید،

$\mathrm{Kerf} = K$، $\mathrm{Im}\,(f) = I$ و $\mathrm{Coker}\,(f) = C$.

طبق لم ۱،کافی است، نشان دهیم که K , I و C می‌توانند به صورت،

$K = K_1 \oplus K_2 \dots \oplus K_n$ ، $I = I_1\oplus\dots I_n$ و $C = C_1\oplus\dots\oplus C_n$

باشند، به طوری که

$K_j\oplus I_j \cong I_j\oplus C_j \cong R$ برای هر $j = 1, \dots, n$.

چون f یک همریختی منظم است طبق لم ۱ . ۱. ۱۴ از مرجع [۴]،

$$K\oplus I \cong I\oplus C \cong nR.$$

همچنین R حلقه‌ی تظریف پذیر است و $K\oplus I \cong I\oplus C$ برای $R-$ مدول‌های تصویری متناهی مولد I، K و R. پس $R-$ مدول‌های K_1 ، K_2 و I_1 و I_2 موجودند به طوری که،

$$K = K_1\oplus K_2 \text{ ،} I = I_1\oplus I_2 \text{ ،} K_1\oplus I_1 \cong I \text{ و } K_2\oplus I_2 \cong C$$

طبق لم ۱، کافی است، یک تظریف قطری برای تجزیه‌های زیر داشته باشیم.

$$nR \cong K_1\oplus(I\oplus K_2) \cong (I\oplus K_2)\oplus I_2$$

بنابراین می‌توان فرض کرد، که K با جمعوندی از I و nR با جمعوند مستقیمی از $2I$ یکریخت است و لذا I یک مولد است.

حال از یکریختی‌های

$$nR \cong K \oplus I \cong I \oplus C \cong (n-1)R \oplus R$$

و

$$(n-1)R \oplus C \cong K \oplus I \oplus C \cong (n-1)R \oplus (R \oplus K)$$

نتیجه می‌شود که $R \oplus K$ یک مولد است. با به کار بردن رابطهٔ حذفی فرض، $n-1$ مرتبه داریم،

$$R \oplus K \cong R \oplus C.$$

چون R حلقه‌ای تظریف‌پذیر و R، K و C، R- مدول‌های تصویری با تولید متناهی هستند R– مدول‌های تصویری با تولید متناهی R_1 , R_2 , C_1 و C_2 موجودند، به طوری که

$$R \cong R_1 \oplus R_2 \quad , \quad C \cong C_1 \oplus C_2,$$
$$R_1 \oplus C_1 \cong R \quad , \quad C_2 \oplus C_2 \cong k.$$

طبق گزارهٔ ۱ کافی است، یک تظریف قطری برای تجزیه‌های زیر داشته باشیم.

$$R_2 \oplus (I \oplus C_2) \cong (I \oplus C_2) \oplus C_1.$$

بنابر این تجزیه می‌توان فرض کرد که R مدول تصویری متناهی مولد E چنان موجود است که

$$E \oplus K \cong E \oplus C \cong R.$$

پس می‌توان نوشت

$$nR \oplus E \cong 2R \oplus (n-2)R \oplus E \cong K \oplus I \oplus E \cong R \oplus I.$$

چون I مولد هست طبق فرض می‌توان R را از طرفین تجزیه بالا حذف کرد و داریم

$$(n-1)R \oplus E \cong I.$$

بنابراین

$$I \cong E \oplus R \oplus \ldots \oplus R, K \cong K \oplus 0 \oplus \ldots + 0، C \cong C \oplus 0 + \cdots + 0$$

و طبق گزارهٔ ۱. نتیجه حاصل می‌شود.

در نتیجهٔ زیر می‌خواهیم قطری پذیری ماتریس‌های منظم روی حلقه‌های تظریف پذیر را با استفاده از خاصیت حذفی قضیهٔ ۴ بررسی کنیم.

نتیجهٔ ۴. فرض کنیم R یک حلقه تظریف‌پذیر باشد. در این صورت هر ماتریس منظم $m \times n$ روی R تقلیل یافته قطری است، اگر و تنها اگرخاصیت حذفی زیر، برای R– مدول‌های تصویری متناهی مولد برقرار باشد.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \Longrightarrow R \oplus A \cong B.$$

در مثال ۱، نشان داده شد که خاصیت قطری‌پذیری ماتریس‌ها از حلقه $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{J(R)}}$ به حلقه R انتقال داده نمی‌شوند. در گزارهٔ زیر این موضوع را تحت شرایط خاص بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. فرض کنید R یک حلقهٔ تظریف‌پذیر باشد به طوری که هر ماتریس منظم روی $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{J(R)}}$ تقلیل یافتهٔ قطری باشد آن‌گاه هر ماتریس منظم روی R تقلیل یافته قطری است.

برهان:

فرض کنید A و B ، R -مدول‌های تصویری با تولید متناهی باشند به‌طوری که

$$2\mathrm{R}\oplus \mathrm{A} \cong \mathrm{R}\oplus \mathrm{B}$$

بنابراین داریم،

$$2\frac{R}{J(R)}\oplus\frac{A}{RJ(A)} \cong \frac{2R\oplus A}{J(2R\oplus A)} \cong \frac{R\oplus B}{J(R\oplus B)} \cong \frac{R}{J(R)}\oplus\frac{B}{RJ(B)}.$$

چون هر ماتریس منظم روی $\frac{R}{J(R)}$ تقلیل یافته قطری است طبق نتیجه ۴،

$$\frac{R}{J(R)}\oplus\frac{A}{RJ(A)} \cong \frac{R}{RJ(R)}.$$

چون A و R، هر دو مدول‌های تصویری با تولید متناهی هستند پس، $\mathrm{R}\oplus\mathrm{A} \cong B$. طبق نتیجهٔ ۴ حکم حاصل می‌شود.

قدردانی

از داوران محترم که با ارئه نظرات ارزشمند خود، باعث شدندکه نسخهٔ ابتدایی از نظر کیفیت علمی و نگارشی ارتقا یابد، سپاسگزاری می‌کنیم.

References

1. Kaplansky, I., Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc, 66 (1949), 464-491.

2. Smith, H. J. S., On systems of linear indeterminate equations and congruences, Philos Trans R Soc., 151 (1861), 293-326.

3. Dickson L. E., Algebras and their arithmetics, University of Chicago press, Chicago, 1923.

4. Wedderburn, J. H., Non-commutative domains of integrity, J. Reine Angew Math, 167 (1930), 129-141.

5. Waerden, B. L. V., Modern Algebra, Springer, Berlin, New York.

6. Jacobson N., Pseudo- Linear Transformations, Ann of Math, 38 (1937) 484-507.

7. Henriksen M., On a class of regular rings that are elementary divisor rings, Archiv der Mathematik, 24 (1973), 133-141.

8. Levy. L. S., Sometimes only square matrices can be diagonalized, Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1979), 18-22.

9. Menal. P., Moncasi J., On regular rings with stable range 2, 24 (1982), 25-40.

10. Ara. P., Goodearl. K., Omera K. C., Pardo. E., Diagonalizations of matrices over regular rings, Linear Algebra Appl., 265 (1997), 147-163.

11. Chen. H., Rings related to stable range conditions, World scientific publishing, (2001).

12. Dubbertin. H., On vaught's criterion for isomorphisms of countable Algebra Universalis.

15 (1982), 95-144.

13. Crawly. P., Jonsson. B., Refinement for infinite decompositions of algebraic systems. 14 (1964), 797-855.

14. Bahmani Sangesari R., Sheibani Abdolyousefi M., Ashrafi N., Extension of refinement rings, Turk J Math, 40 (2016), 71-79.

15. Tongsuo. Wu., Finitely generated projective modules over exchange rings, Manuscript Math,

16. Tuganbaev, A. A., Bezout modules and rings, Journal of Mathematical Science, 5 (2009), 596-597.

17. Couchot F., Gaussian trivial ring extensions and Fqp rings. Communications in Algebra, 43(2015), 2863-2874.

18. Zabavsky B., Diagonal reduction of matrices over rings, Mathematical studies monograph series, Vol XVI, VNTL Publishers.