

## دوتختی بودن جبرهای سگال مجرد بر پایه مشخصه‌ها

امیر سهامی<sup>۱</sup>، مهدی رستمی<sup>۲\*</sup>، مرتضی اسمعیلی<sup>۳</sup>، ارسلان رحمانی<sup>۴</sup>

۱. دانشگاه ایلام، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

۲. دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۳. دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

۴. دانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۱۲/۱۳

پذیرش ۹۹/۰۹/۰۳

### چکیده

در این مقاله به بررسی و مطالعه مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ برای جبرهای سگال مجرد می‌پردازیم که در آن  $\phi$  یک مشخصه روی جبر باناخ است. به‌طور دقیق‌تر، یک شرط لازم و کافی برای  $\phi$ -دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد مجهز به یک تقریبی چپ را ارائه می‌دهیم. به‌عنوان یک نتیجه نشان می‌دهیم که اگر  $S(G)$  یک جبر سگال دلخواه روی گروه توپولوژیک فشرده موضعی  $G$  و  $\phi: L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$  یک مشخصه باشد، آن‌گاه  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|_{S(G)}$ -دوتختی چپ است اگر و تنها اگر  $G$  یک گروه میانگین‌پذیر باشد. در واقع، این نتیجه می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از [۴، قضیه ۳.۴] در نظر گرفته شود. علاوه‌براین، به بررسی ارتباط بین  $\phi$ -دوتختی چپ با مفهوم  $\phi$ -میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ پرداخته و نشان می‌دهیم اگر  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه مفاهیم  $\phi$ -دوتختی چپ و  $\phi$ -میانگین‌پذیری چپ معادل هستند.

واژه‌های کلیدی: جبر سگال مجرد،  $\phi$ -دوتختی چپ،  $\phi$ -میانگین‌پذیری چپ،  $\phi$ -میانگین‌پذیری درونی.  
رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 43A20, 43A07, 64M10.

### مقدمه و تعاریف اولیه

فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ و  $E$  یک  $A$ -دومدول باناخ باشد. در این صورت می‌توان فضای دوگان  $E$  را که با  $E'$  نشان داده می‌شود به‌عنوان یک  $A$ -دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر در نظر گرفت.

$$(a \cdot f)(x) = f(x \cdot a), \quad (f \cdot a)(x) = f(a \cdot x) \quad (a \in A, x \in E, f \in E').$$

هم‌چنین جبر باناخ حاصل ضرب تانسوری تصویری  $A \otimes_p A$  را می‌توان به‌عنوان یک  $A$ -دومدول باناخ در نظر گرفت که در آن

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c, \quad (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca \quad (a, b, c \in A).$$

اگر  $E$  و  $F$  دو  $A$ -مدول باناخ چپ (راست) باشند، آن‌گاه عملگر خطی  $T: E \rightarrow F$  را یک هم‌ریختی  $A$ -مدولی چپ (راست) نامیم هرگاه

$$T(a \cdot x) = a \cdot T(x) \quad (T(x \cdot a) = T(x) \cdot a), \quad (a \in A, x \in E).$$

برای اطلاعات بیش‌تر در این زمینه به منابع [۳] و [۱۶] مراجعه شود.

**تعریف ۱.** جبر باناخ  $A$  را دوتختی<sup>۱</sup> نامیم هرگاه همریختی  $A$ -دومدولی پیوسته  $\rho: A \rightarrow (A \otimes_p A)''$  موجود باشد به طوری که داشته باشیم  $\pi_A'' \circ \rho = \kappa_A$  که در آن  $\kappa_A: A \rightarrow A''$  نگاشت نشاننده کانونی و  $\pi_A: A \otimes_p A \rightarrow A$  عملگر قطری تعریف شده با ضابطه زیر است.

$$\pi_A(a \otimes b) = ab, \quad (a, b \in A).$$

مفهوم دوتختی بودن جبرهای باناخ اولین بار توسط هلمسکی<sup>۲</sup> معرفی و بررسی شد. به طور دقیق تر، دو تختی بودن جبرهای باناخ از مفاهیم اساسی در نظریه مانستگی<sup>۳</sup> جبرهای باناخ است. ریاضی دانان زیادی به این مفهوم توجه کرده اند و به بررسی آن برای رده های مختلفی از جبرهای باناخ و ارتباط آن با برخی از مفاهیم همانستگی<sup>۴</sup> جبرهای باناخ پرداخته اند. به عنوان یک نتیجه بسیار مهم نشان داده شده است که برای گروه توپولوژیک فشرده موضعی  $G$ ، جبر گروهی  $L^1(G)$  دوتختی است اگر و تنها اگر  $G$  یک گروه میانگین پذیر باشد یعنی یک میانگین پایای چپ مانند  $m$  روی فضای  $L^\infty(G)$  موجود است [۱۶]. هم چنین نشان داده شده است که هر جبر باناخ دوتختی  $A$  مجهز به یک تقریبی کراندار، یک جبر باناخ میانگین پذیر است به این معنی که عضوی مانند  $M \in (A \otimes_p A)''$  موجود است به طوری که

$$a \cdot M = M \cdot a, \quad \pi_A''(M)a = a \quad (a \in A).$$

مفاهیم دوتختی و میانگین پذیری جبرهای باناخ برای رده های مختلف و مهمی از جبرهای باناخ از جمله جبرهای نیم گروهی، جبرهای فوریه، جبرهای سگال و جبرهای اندازه مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته اند. برای اطلاعات بیشتر در این باره به منابع [۲]، [۳]، [۵]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه شود. کانیو<sup>۵</sup> و دیگران در [۱۰]، مفهوم جدیدی برگرفته از میانگین پذیری معرفی کردند که بر پایه تابع های خطی ضربی روی جبرهای باناخ است. در سرتاسر این مقاله، تابع خطی ضربی ناصفر روی جبر باناخ  $A$  را مشخصه<sup>۶</sup> می نامیم و مجموعه تمام مشخصه ها روی  $A$  را با نماد  $\Delta(A)$  نمایش می دهیم. فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ باشد و  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت جبر باناخ  $A$  را  $\phi$ -میانگین پذیر چپ<sup>۷</sup> نامیم هرگاه عضوی مانند  $m \in A''$  موجود باشد به طوری که

$$a \cdot m = \phi(a)m, \quad \tilde{\phi}(m) = 1 \quad (a \in A),$$

که در آن  $\tilde{\phi}: A'' \rightarrow \mathbb{C}$  توسیع خطی ضربی نگاشت  $\phi$  تعریف شده به صورت  $\tilde{\phi}(F) = F(\phi)$  است. به طور مشابه مفاهیم  $\phi$ -میانگین پذیر راست و  $\phi$ -میانگین پذیری جبرهای باناخ قابل تعریف هستند. این مفاهیم به وسیله ریاضی دانان زیادی بررسی و شده است. برای مثال، برخی نتایج در مورد  $\phi$ -میانگین پذیری جبرهای فوریه، جبرهای سگال مجرد و جبرهای گروهی در منابع [۱]، [۷]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] ارائه شده است. به تازگی برخی از مؤلفان در [۴] و [۱۷] با الهام گرفتن از مفهوم  $\phi$ -میانگین پذیری چپ جبرهای باناخ به معرفی و بررسی مفهومی با عنوان  $\phi$ -دوتختی بودن چپ جبرهای باناخ پرداخته اند.

**تعریف ۲.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ باشد و  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت جبر باناخ  $A$  را  $\phi$ -دوتختی چپ<sup>۸</sup> نامیم هرگاه نگاشت خطی پیوسته  $\rho: A \rightarrow (A \otimes_p A)''$  موجود باشد به طوری که برای هر  $a, b \in A$  داشته باشیم

$$\rho(ab) = \phi(b)\rho(a) = a \cdot \rho(b), \quad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

1. Biflat

2. Helemskii

3. Homology

4. Cohomology

5. Kaniuth

6. Character

7. Left  $\phi$ -amenable8. Left  $\phi$ -biflat

لازم بذکر است که مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ جبرهای باناخ تعریف شده در بالا همان مفهوم شرایط (W) برای جبرهای باناخ است که در [۴] معرفی و بررسی شده است. برای گروه فشرده موضعی تک‌هنگی<sup>۱</sup>  $G$  نشان داده شده است که جبر لبگ-فوریه  $LA(G)$ ،  $\phi$ -دوتختی چپ است اگر و تنها اگر  $G$  میانگین‌پذیر باشد [۴، نتیجه ۳.۵]. همچنین در [۱۷]، مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ دوگان دوم برخی جبرهای باناخ ماتریسی بررسی شده است. در [۴]، مؤلفان به بررسی مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ جبرهای باناخ سگال مجرد متقارن پرداخته و به‌عنوان یک نتیجه نشان دادند اگر  $S(G)$  یک جبر سگال متقارن باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای  $\phi$ -دوتختی بودن  $S(G)$  این است که گروه  $G$  میانگین‌پذیر باشد.

در این مقاله، قصد داریم  $\phi$ -دوتختی بودن جبرهای باناخ سگال مجرد مجهز به یک تقریبی چپ را بررسی و مطالعه کنیم و شرط لازم و کافی برای آن ارائه دهیم. با به‌کارگیری این مطلب نشان می‌دهیم اگر  $S(G)$  جبر سگال دلخواه روی گروه فشرده موضعی  $G$  باشد و  $\phi \in \Delta(L^1(G))$ ، آن‌گاه  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|S(G)$ -دوتختی چپ است اگر و تنها اگر  $G$  یک گروه میانگین‌پذیر باشد. در واقع، این نتیجه می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از [۴، قضیه ۳.۴] در نظر گرفته شود. علاوه‌براین، به بررسی ارتباط بین  $\phi$ -دوتختی بودن با مفهوم  $\phi$ -میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ پرداخته و نشان می‌دهیم اگر  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه مفاهیم  $\phi$ -دوتختی چپ و  $\phi$ -میانگین‌پذیری چپ معادل هستند. در واقع، این نتیجه نیز تعمیمی از [۴، قضیه ۲.۲] است.

### شرط لازم و کافی برای $\phi$ -دوتختی بودن جبرهای سگال مجرد

ویژگی‌های همانستگی و مانستگی جبرهای سگال مجرد در مقالات متعددی از جمله [۱]، [۹] و [۱۸] مورد توجه قرار گرفته است. هدف اصلی ما در این بخش بررسی و مطالعه مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ برای جبرهای باناخ سگال مجرد است. در واقع، یک شرط لازم و کافی برای مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد مجهز به یک تقریبی چپ ارائه می‌دهیم. بدین منظور ابتدا مفهوم جبر سگال مجرد را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۳.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ با نرم  $\|\cdot\|_A$  باشد. در این صورت جبر باناخ  $B$  با نرم  $\|\cdot\|_B$  را یک جبر سگال مجرد<sup>۲</sup> نسبت به  $A$  نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

(الف)  $B$  یک ایده‌آل چپ چگال در  $A$  باشد.

(ب) عدد ثابت  $M > 0$  موجود باشد به‌طوری‌که برای هر  $b \in B$  داشته باشیم  $\|b\|_A \leq M\|b\|_B$ .

(ج) عدد ثابت  $C > 0$  موجود باشد به‌طوری‌که برای هر  $b \in B, a \in A$  داشته باشیم

$$\|ab\|_B \leq C\|a\|_A\|b\|_B.$$

علاوه براین، گوئیم  $B$  جبر سگال متقارن<sup>۳</sup> نسبت به  $A$  است هرگاه  $B$  یک ایده‌آل دو طرفه در  $A$  باشد به‌طوری‌که عدد ثابت  $C > 0$  موجود باشد که

$$\|ba\|_B \leq C\|a\|_A\|b\|_B \quad (a \in A, b \in B).$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد جبرهای سگال مجرد به [۶] مراجعه شود. لازم بذکر است که جبرهای سگال مجردی وجود دارند که متقارن نیستند (مثال ۸ را ملاحظه کنید).

**نمادگذاری ۴.** فرض کنیم  $T_1: X \rightarrow Z$  و  $T_2: Y \rightarrow W$  عملگرهای خطی و کراندار روی فضاهای باناخ باشند. در این صورت نگاشت

1. Unimodular  
2. Abstract Segal algebra  
3. Symmetric Segal algebra

$T_1 \otimes T_2: X \otimes_p Y \rightarrow Z \otimes_p W$  تعریف شده با ضابطه زیر یک عملگر خطی و کراندار است.

$$(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y) \quad (x \in X, y \in Y).$$

اگر  $X$  یک  $A$ -مدول باناخ چپ و  $Y$  یک  $A$ -مدول باناخ راست باشند می‌توان دید  $X \otimes_p Y$  یک  $A$ -دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر است.

$$a \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes y, \quad (x \otimes y) \cdot a = x \otimes y \cdot a \quad (a \in A, x \in X, y \in Y).$$

هم‌چنین اگر  $T_1, T_2$  به‌ترتیب هم‌ریختی‌های  $A$ -مدولی چپ و راست باشند، آن‌گاه  $T_1 \otimes T_2$  یک هم‌ریختی  $A$ -مدولی است.

برای به‌دست آوردن نتیجه اصلی این بخش نیازمند لم مقدماتی ۵ هستیم. لازم به‌ذکر است که نتیجه زیر را می‌توان به‌عنوان تعمیمی از [۱۷، قضیه ۲.۱] در نظر گرفت.

**لم ۵.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ باشد به‌طوری‌که  $\ker \phi = \{ab : a \in A, b \in \ker \phi\}$  یک زیرمجموعه نرم چگال در  $\ker \phi$  است. در این صورت  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است. **برهان:** چون  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است، عملگر خطی کراندار  $\rho: A \rightarrow (A \otimes_p A)''$  موجود است به‌طوری‌که برای هر  $a, b \in A$  داریم

$$\rho(ab) = a \cdot \rho(b) = \phi(b)\rho(a), \quad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

قرار دهیم  $\zeta := (id_A \otimes q)'' \circ \rho: A \rightarrow (A \otimes_p \frac{A}{\ker \phi})''$  که در آن منظور از  $id_A: A \rightarrow A$  نگاشت همانی و  $q: A \rightarrow \frac{A}{\ker \phi}$  نگاشت خارج قسمتی است. به‌وضوح  $\zeta$  یک نگاشت  $A$ -دومدولی چپ کراندار است. فرض کنیم  $l \in \ker \phi$  دلخواه باشد. با توجه به فرض نتیجه می‌شود دنباله‌های  $(a_n) \subseteq A$  و  $(k_n) \subseteq \ker \phi$  موجودند به‌طوری‌که  $a_n k_n \rightarrow l$  بنابراین

$$\begin{aligned} \zeta(l) &= \lim_n (id_A \otimes q)'' \circ \rho(a_n k_n) \\ &= \lim_n \phi(k_n)(id_A \otimes q)'' \circ \rho(a_n) = 0. \end{aligned}$$

با توجه به این مطلب به‌راحتی می‌توان دید نگاشت  $\zeta$  نگاشتی مانند  $\bar{\zeta}: \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow (A \otimes_p \frac{A}{\ker \phi})''$  را القا می‌کند.

حال با توجه به این که  $A \otimes_p \mathbb{C} \cong A$  تعریف کنیم

$$\theta := (id_A \otimes \bar{\phi})'' \circ \bar{\zeta}: \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow A'',$$

که در آن  $\bar{\phi} \in \Delta(\frac{A}{\ker \phi})$  مشخصه القا شده به‌وسیله  $\phi$  است. به‌وضوح  $\theta$  یک نگاشت  $A$ -دومدولی چپ کراندار است

و

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \circ \theta(a + \ker \phi) &= \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes \bar{\phi})'' \circ \bar{\zeta}(a + \ker \phi) \\ &= (\phi \otimes \bar{\phi})'' \circ \zeta(a) \\ &= (\phi \otimes \bar{\phi})'' \circ (id_A \otimes q)'' \circ \rho(a) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a). \end{aligned}$$

حال قرار دهیم  $m := \theta(a_0 + \ker \phi) \in A''$  که در آن  $a_0 \in A$  به‌گونه‌ای است که  $\phi(a_0) = 1$ . در این صورت برای هر  $a \in A$  بدیهی است که  $aa_0 - \phi(a)a_0 \in \ker \phi$  و در نتیجه

$$aa_0 + \ker \phi = \phi(a)a_0 + \ker \phi.$$

بنابراین

$$a \cdot m = \theta(aa_0 + \ker \phi) = \theta(\phi(a)a_0 + \ker \phi) = \phi(a)m, \quad \tilde{\phi}(m) = \phi(a_0) = 1.$$

در نتیجه  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است و حکم ثابت می‌شود. ذکر این نکته حائز اهمیت است که در [۱، لم ۲.۲] ثابت شده است که اگر  $B$  یک جبر سگال مجرد دلخواه نسبت به جبر باناخ  $A$  باشد، آن‌گاه  $\Delta(A) = \{\phi|B : \phi \in \Delta(A)\}$ . اکنون می‌توانیم قضیه اصلی این بخش را ارائه کرده و شرط لازم و کافی برای  $\phi$ -دوتختی بودن جبرهای باناخ سگال مجهز به یک تقریبی چپ را به دست آوریم. **قضیه ۶.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ و  $B$  یک جبر سگال مجرد نسبت به  $A$  باشد به طوری که دارای یک تقریبی چپ است. در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند.

۱.  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است.
  ۲.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -دوتختی چپ است.
  ۳.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -میانگین‌پذیر چپ است.
  ۴.  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است.
- برهان:** (۲)  $\Rightarrow$  (۱) با توجه به فرض عملگر خطی کراندار  $\Gamma: A \rightarrow (A \otimes_p A)''$  موجود است به طوری که برای هر  $a, b \in A$  داریم

$$\Gamma(ab) = a \cdot \Gamma(b) = \phi(b)\Gamma(a), \quad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \Gamma(a) = \phi(a).$$

چون  $B$  در  $A$  چگال است می‌توان عضو  $b_0 \in B$  را اختیار کرد به طوری که  $\phi(b_0) = 1$ . حال نگاشت خطی کراندار  $R_{b_0}: A \rightarrow B$  را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$R_{b_0}(a) = ab_0 \quad (a \in A).$$

در این صورت با در نظر گرفتن نگاشت خطی کراندار  $\rho := (R_{b_0} \otimes R_{b_0})'' \circ \Gamma|B: B \rightarrow (B \otimes_p B)''$  برای هر  $b_1, b_2 \in B$  داریم:

$$\rho(b_1 b_2) = b_1 \rho(b_2) = \phi(b_2) \rho(b_1).$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho(b_1) &= \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ (R_{b_0} \otimes R_{b_0})'' \circ \Gamma|B(b_1) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \Gamma(b_1) = \phi(b_1). \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -دوتختی چپ است.

(۳)  $\Rightarrow$  (۲) چون  $B$  دارای یک تقریبی چپ است به سادگی می‌توان نتیجه گرفت  $\{b_1 b_2 : b_1 \in B, b_2 \in \ker \phi|B\}$  یک زیرمجموعه نرم چگال  $\ker \phi|B$  است. حال با به کارگیری لم ۵ نتیجه می‌شود  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -میانگین‌پذیر چپ است.

هم‌چنین استلزام (۴)  $\Rightarrow$  (۳) از [۱، قضیه ۲.۳] و استلزام (۱)  $\Rightarrow$  (۴) از [۴، قضیه ۲.۲] نتیجه می‌شود.

**تعریف ۷.** برای گروه فشرده موضعی  $G$  زیرفضای خطی  $S(G)$  از جبر گروهی  $L^1(G)$  را یک جبر سگال روی  $G$  نامیم هرگاه

الف)  $S(G)$  زیر مجموعه چگال در  $L^1(G)$  باشد.

ب)  $S(G)$  با نرم  $\|\cdot\|_{S(G)}$  یک فضای باناخ است و برای هر  $f \in S(G)$  داریم  $\|f\|_{L^1(G)} \leq \|f\|_{S(G)}$ .

ج) برای هر  $f \in S(G)$  و  $y \in G$  داشته باشیم  $L_y(f) \in S(G)$  و نگاشت  $y \rightarrow L_y(f)$  از  $G$  بتوی  $S(G)$  پیوسته است که در آن  $L_y(f)(x) = f(y^{-1}x)$ .

د) برای هر  $f \in S(G)$  و  $y \in G$  داشته باشیم  $\|L_y(f)\|_{S(G)} = \|f\|_{S(G)}$ .

علاوه بر این، گوییم  $S(G)$  یک جبر سگال متقارن روی  $G$  است هرگاه برای هر  $f \in S(G)$  و  $y \in G$  داشته باشیم  $R_y(f) \in S(G)$  و نگاشت  $y \rightarrow R_y(f)$  از  $G$  بتوی  $S(G)$  پیوسته است و  $\|R_y(f)\|_{S(G)} = \|f\|_{S(G)}$  که در آن  $R_y(f)(x) = f(xy^{-1})$ .

برای جزییات بیش‌تر دربارهٔ جبرهای سگال روی گروه‌های فشردهٔ موضعی به [۱۴] مراجعه شود. به‌عنوان یک نتیجه شناخته شده هر جبر سگال یک جبر سگال مجرد نسبت به جبر گروهی  $L^1(G)$  است ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. برای مثال جبر باناخ  $L^\infty(G)$  یک جبر سگال مجرد نسبت به  $L^1(G)$  است ولی  $L^\infty(G)$  یک جبر سگال نیست [۱۸، مثال ۴.۸]. در ادامه مثالی از جبرهای سگال مجرد ارائه می‌دهیم که متقارن نیستند.

**مثال ۸.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده موضعی باشد که تک‌هنگی نیست. در این صورت زیرفضای خطی  $S(G) = C_0(G) \cap L^1(G)$  با نرم تعریف شده به‌صورت  $\|f\|_{S(G)} = \|f\|_1 + \|f\|_\infty$  یک جبر سگال نامتقارن روی  $G$  است. همچنین برای هر  $1 \leq p < \infty$  زیرفضای خطی  $S(G) = L^p(G) \cap L^1(G)$  با نرم  $\|f\|_{S(G)} = \|f\|_1 + \|f\|_p$  یک جبر سگال نامتقارن روی  $G$  است [۱۵، بخش ۵].

در [۴، قضیهٔ ۳.۴]، مؤلفان  $\phi$ -دوتختی بودن چپ جبرهای سگال متقارن را بررسی و یک شرط لازم و کافی برای آن به‌دست آوردند. در ادامه به‌عنوان یک نتیجهٔ اساسی از قضیهٔ ۶،  $\phi$ -دوتختی بودن چپ جبرهای سگال را در حالت کلی مشخص‌سازی می‌کنیم.

**نتیجهٔ ۹.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده موضعی و  $S(G)$  یک جبر سگال روی  $G$  باشد. در این صورت برای هر  $\phi \in \Delta(L^1(G))$  عبارات زیر هم‌ارزند.

۱.  $L^1(G)$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است.

۲.  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|_{S(G)}$ -دوتختی چپ است.

۳.  $G$  میانگین‌پذیر است.

**برهان:** ابتدا با توجه به [۱۵، قضیهٔ ۱ از فصل ۸] می‌دانیم هر جبر سگال دلخواه  $S(G)$  همواره دارای یک تقریبی چپ است. حال با استفاده از قضیهٔ ۶ و [۴، نتیجهٔ ۳.۱] اثبات تمام است.

در پایان این بخش، مفهوم  $\phi$ -دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد را در حالتی بررسی می‌کنیم که  $A$  یک جبر باناخ با یک تقریبی چپ است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که ایده برهان قضیهٔ ۱۰ برگرفته از اثبات [۱۲، قضیهٔ ۱.۲] در مورد مفهوم  $\phi$ -دوتصویری جبرهای باناخ است.

**قضیهٔ ۱۰.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ با یک تقریبی چپ باشد و  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت برای هر جبر سگال مجرد  $B$  نسبت به  $A$  شرایط زیر هم‌ارزند.

۱.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|_B$ -دوتختی چپ است.

۲.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|_B$ -میانگین‌پذیر چپ است.

**برهان:** (۲)  $\Rightarrow$  (۱) چون  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|_B$ -دوتختی چپ است، نگاشت خطی و کراندار  $\rho: B \rightarrow (B \otimes_p B)''$  موجود است به‌طوری‌که در شرایط تعریف ۲ صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم  $b_0 \in B$  و  $R_{b_0}$  به‌ترتیب همان عضو و نگاشتی باشد که در برهان قضیهٔ ۶ استفاده شد. حال نگاشت خطی کراندار

$$\lambda := (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}: A \rightarrow (A \otimes_p A)'',$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $I: B \rightarrow A$  نگاشت شمول است. در این صورت برای هر  $a \in A$  و  $b_1, b_2 \in B$  داریم

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \lambda(a) &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a) = \phi(ab_0) = \phi(a), \end{aligned}$$

و علاوه بر این

$$\begin{aligned}
b_1 \cdot \lambda(b_2) &= b_1 \cdot (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_2) \\
&= (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_1 b_2) \\
&= \phi(b_2)(I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_1) \\
&= \phi(b_2)\lambda(b_1).
\end{aligned}$$

با فرض این که  $K = \ker \phi$  و  $q: A \rightarrow \frac{A}{K}$  نگاشت خارج قسمتی باشد قرار می‌دهیم  $\zeta := (id_A \otimes q)'' \circ \lambda$ . بدیهی است  $\zeta$  نگاشتی خطی و کراندار است. از طرفی چون  $A$  دارای یک تقریبی چپ است،  $AK$  در  $K$  نرم چگال است و در نتیجه برای هر  $k \in K$  دنباله‌های  $(a_n) \subseteq A$  و  $(k_n) \subseteq K$  موجودند به طوری که  $a_n k_n \rightarrow k$  در این صورت

$$\begin{aligned}
\zeta(k) &= (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(k) \\
&= \lim (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(a_n k_n) \\
&= \lim \phi(k_n)(id_A \otimes q)'' \circ \lambda(a_n) = 0
\end{aligned}$$

بنابراین نگاشت  $\zeta$  یک نگاشت روی فضای خارج قسمتی  $\frac{A}{K}$  القا می‌کند که آن را با همان نماد  $\zeta$  نمایش می‌دهیم. از آن جاکه  $\mathbb{C} \cong \frac{A}{K}$  به راحتی می‌توان  $m := \zeta(b_0 + K)$  را به عنوان یک عضو در  $A''$  در نظر گرفت. بدین ترتیب برای هر  $b \in B$  داریم

$$\begin{aligned}
b \cdot m &= b \cdot \zeta(b_0 + K) = \zeta(bb_0 + K) \\
&= \zeta(\phi(b)b_0 + K) = \phi(b)m,
\end{aligned}$$

و همچنین

$$(\phi \otimes \bar{\phi})'' \circ \lambda(b) = \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(b) = \phi(b), \quad \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes \bar{\phi})'' = (\phi \otimes \bar{\phi})'',$$

که در آن  $\bar{\phi}: \frac{A}{K} \rightarrow \mathbb{C}$  مشخصه تعریف شده به صورت  $\bar{\phi}(a + K) = \phi(a)$  است. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(m) &= \tilde{\phi} \circ \zeta(b_0 + K) \\
&= \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(b_0) \\
&= (\phi \otimes \bar{\phi})'' \circ \lambda(b_0) = \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho(b_0) \\
&= \phi(b_0) = 1.
\end{aligned}$$

حال چون  $B$  در  $A$  چگال است برای هر  $a \in A$  داریم  $a \cdot m = \phi(a)m$  و در نتیجه  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین پذیر چپ است. با جایگزینی  $m \cdot b_0$  به جای  $m$  می‌توان فرض کرد  $m \in B''$  و در نتیجه  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -میانگین پذیر چپ است.

استلزام (۱)  $\Rightarrow$  (۲) نیز بدیهی است و بدین ترتیب اثبات تمام است.

### ارتباط بین $\phi$ -دوتختی و $\phi$ -میانگین پذیری درونی

هدف اصلی در این بخش بررسی ارتباط بین  $\phi$ -دوتختی بودن با مفهوم  $\phi$ -میانگین پذیری درونی جبرهای باناخ است. به عنوان نتیجه اساسی نشان می‌دهیم اگر  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین پذیر درونی باشد، آنگاه مفاهیم  $\phi$ -دوتختی چپ و  $\phi$ -میانگین پذیری چپ معادل هستند. در ابتدا مفهوم  $\phi$ -میانگین پذیری درونی جبرهای باناخ را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱۱.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ باشد و  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت  $A, \phi$ -میانگین‌پذیر درونی<sup>۱</sup> است هرگاه  
تور  $a_\alpha \subseteq A$  موجود باشد به‌طوری‌که برای هر  $a \in A$  داشته باشیم

$$aa_\alpha - a_\alpha a \rightarrow 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$

در حالتی‌که جبر باناخ  $A$  جابه‌جایی یا دارای یک تقریبی کراندار باشد به راحتی می‌توان دید  $A, \phi$ -میانگین‌پذیر درونی است ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست [۸]. هم‌چنین در [۴، قضیه ۲.۲] ثابت شده است که اگر جبر باناخ  $A$  دارای یک تقریبی کراندار باشد، آن‌گاه مفاهیم  $\phi$ -دوتختی چپ و  $\phi$ -میانگین‌پذیری چپ معادل هستند. با توجه به این مطالب در ادامه یک تعمیم از [۴، قضیه ۲.۲] را برای جبرهای باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی ثابت می‌کنیم.

**لم ۱۲.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت این عبارات هم‌ارزند:

۱.  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است.

۲.  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است.

**برهان:** (۲)  $\Rightarrow$  (۱) چون  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است، عملگر خطی کراندار  $\rho: A \rightarrow (A \otimes_p A)''$  موجود است به‌طوری‌که برای هر  $a, b \in A$  داریم

$$\rho(ab) = a \cdot \rho(b) = \phi(b)\rho(a), \quad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

از طرفی دیگر چون  $A, \phi$ -میانگین‌پذیر درونی است در نتیجه تور  $a_\alpha \subseteq A$  وجود دارد به‌طوری‌که برای هر  $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \rightarrow 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$

قرار دهیم  $m_\alpha = \rho(a_\alpha)$ . بدیهی است  $(m_\alpha)$  یک تور کراندار در  $(A \otimes_p A)''$  است و

$$a \cdot m_\alpha - \phi(a)m_\alpha = \rho(aa_\alpha - a_\alpha a) \rightarrow 0 \quad (a \in A),$$

و هم‌چنین

$$\tilde{\phi} \circ \pi_A''(m_\alpha) = \phi(a_\alpha) = 1.$$

از طرف دیگر بنابر قضیه باناخ-آل‌اوغلو می‌دانیم تور  $(m_\alpha)$  دارای نقطه انباشتگی مانند  $M$  در توپولوژی ضعیف ستاره روی  $(A \otimes_p A)''$  است. در این صورت برای هر  $a \in A$  داریم

$$a \cdot M - \phi(a)M = w^* - \lim_{\alpha} a \cdot m_\alpha - \phi(a)m_\alpha = 0,$$

و با توجه به پیوستگی نگاشت‌های  $\tilde{\phi}$  و  $\pi_A''$  نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره نتیجه می‌شود

$$\tilde{\phi} \circ \pi_A''(M) = w^* - \lim_{\alpha} \tilde{\phi} \circ \pi_A''(m_\alpha) = 1.$$

حال با به کارگیری [۷، قضیه ۲.۳] نتیجه می‌گیریم که  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است.

**قضیه ۱۳.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن  $\phi \in \Delta(A)$  و  $B$  یک جبر سگال مجرد نسبت به  $A$  باشد. در این صورت این عبارات هم‌ارزند:

۱.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -دوتختی چپ است.

۲.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -میانگین‌پذیر چپ است.

**برهان:** (۲)  $\Rightarrow$  (۱) فرض کنیم  $\zeta, \rho, \lambda, q, R_{b_0}$  همان نگاشت‌های استفاده شده در برهان قضیه ۱۰ باشند. چون  $A, \phi$ -میانگین‌پذیر درونی است در نتیجه تور  $a_\alpha \subseteq A$  وجود دارد به‌طوری‌که برای هر  $a \in A$  داریم

$$aa_\alpha - a_\alpha a \rightarrow 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$



قرار دهیم  $m_\alpha := \zeta(a_\alpha) \in \left(A \otimes \frac{A}{K}\right)'' \cong A''$  بوضوح  $(m_\alpha)$  یک تور کراندار در  $A''$  است که برای هر  $b \in B$  داریم

$$\begin{aligned} b \cdot m_\alpha - \phi(b)m_\alpha &= b \cdot (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &\quad - \phi(b)(id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(ba_\alpha) \\ &\quad - (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha b) \\ &= (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(ba_\alpha - a_\alpha b) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

علاوه براین

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(m_\alpha) &= \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_B \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= \phi(a_\alpha) = 1. \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن  $M \in A''$  به عنوان نقطه انباشتگی تور کراندار  $(m_\alpha)$  در توپولوژی ضعیف ستاره داریم

$$b \cdot M = \phi(b)M, \quad \tilde{\phi}(M) = 1 \quad (b \in B).$$

حال از آن جاکه  $B$  در  $A$  چگال است نتیجه می‌شود

$$a \cdot M = \phi(a)M, \quad \tilde{\phi}(M) = 1 \quad (a \in A),$$

و در نتیجه  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است. اکنون با به کارگیری [۱، قضیه ۲.۳]، نتیجه می‌شود که  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -میانگین‌پذیر چپ است. استلزام (۱)  $\Rightarrow$  (۲) نیز از [۴، قضیه ۲.۲] نتیجه می‌شود. در ادامه، به عنوان یک کاربرد از قضیه ۱۳ می‌توان نتیجه ۹ که در بخش قبل ارائه شد را با روشی دیگر بدین صورت به دست آورد.

**نتیجه ۱۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده موضعی و  $S(G)$  یک جبر سگال روی  $G$  باشد. در این صورت برای هر  $\phi \in \Delta(L^1(G))$  این عبارات هم‌ارزند:

۱.  $L^1(G)$  یک جبر باناخ  $\phi$ -دوتختی چپ است.

۲.  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|S(G)$ -دوتختی چپ است.

۳.  $G$  میانگین‌پذیر است.

**برهان:** (۲)  $\Rightarrow$  (۱) چون جبر گروهی  $L^1(G)$  همواره دارای یک تقریبی کراندار است، با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌گیریم  $L^1(G)$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است. حال با به کارگیری [۱، قضیه ۲.۳] نتیجه می‌شود جبر سگال  $S(G)$ ،  $\phi|S(G)$ -میانگین‌پذیر چپ و در نتیجه  $\phi|S(G)$ -دوتختی چپ است.

(۳)  $\Rightarrow$  (۲) با توجه به این که جبر گروهی  $L^1(G)$  همواره دارای یک تقریبی کراندار است نتیجه می‌شود  $L^1(G)$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی است. اکنون با توجه به این که  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|S(G)$ -دوتختی چپ است و با استفاده از قضیه ۱۳ نتیجه می‌شود  $S(G)$  یک جبر باناخ  $\phi|S(G)$ -میانگین‌پذیر چپ است. بنابراین  $G$  یک گروه میانگین‌پذیر است [۱، نتیجه ۳.۴].

استلزام (۱)  $\Rightarrow$  (۳) نیز بدیهی است.

**نتیجه ۱۵.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن  $\phi \in \Delta(A)$ . در این صورت برای هر جبر سگال مجرد  $B$  نسبت به  $A$  شرایط زیر هم‌ارزند.

۱.  $B$  یک جبر باناخ  $\phi|B$ -دوتختی چپ است.

۲.  $A$  یک جبر باناخ  $\phi$ -میانگین‌پذیر چپ است.  
برهان: از لم ۱۲ و [۱، قضیه ۳.۲] به راحتی نتیجه می‌شود.

### منابع

1. Alaghmandan M., Nasr Isfahani R., Nemati M., "Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras", Bull. Aust. Math. Soc., 82 (2010) 274-281.
2. Dales H. G., Ghahramani F., Ya. Helemskii A., "Amenability of measure algebras", J. London Math. Soc., 66 (2002) 213-226.
3. Dales H. G., Lau A. T., Strauss D., "Banach algebras on semigroups and their compactifications", Mem. Amer. Math. Soc., 205 (2010) 1-165.
4. Essmaili M., Rostami M., Amini M., "A Characterization of biflatness of Segal algebras based on a character", Glasnik Math., 51 (71) (2016) 45-58.
5. Forrest B. E., Runde V., "Amenability and weak amenability of the Fourier algebra", Math. Z., 250 (2005) 731-744.
6. Ghahramani F., Lau A. T., "Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identity", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 133 (2002) 357-371.
7. Hu Z., Monfared M. S., Traynor T., "On character amenable Banach algebras", Studia Math., 193 (2009) 53-78.
8. Jabbari A., Mehdi Abad T., Zaman Abadi M., "On  $\phi$ -inner amenable Banach algebras", Colloq. Math., 122 (2011) 1-10.
9. Javanshiri H., Nemati M., "Invariant  $\phi$ -means for abstract Segal algebras related to locally compact groups", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 25 (2018) 687-698.
10. Kaniuth E., Lau A. T., Pym J., "On  $\phi$ -amenability of Banach algebras", Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 44 (2008) 85-96.
11. Monfared M. S., "Character amenability of Banach algebras", Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 144 (2008) 697-706.
12. Pourabbas A., Sahami A., "On character bijectivity of Banach algebras", U.P.B. Sci. Bull., Series A. 78 (4) (2016) 163-174.
13. Pourmahmood-Aghababa H., "Amenability properties of Figà-Talamanca-Herz algebras on inverse semigroups", Studia Mathematica, 1 (233) (2016) 1-12.
14. Ramsden P., "Biflatness of semigroup algebras", Semigroup Forum, 79 (2009) 515-530.
15. Reiter H., " $L^1$ -algebras and Segal algebras", Lecture Notes in Mathematics, 231 Springer, (1971).
16. Runde V., "Lectures on Amenability", Springer, New York (2002).
17. Sahami A., "On left  $\phi$ -bijectivity and left  $\phi$ -biflatness of certain Banach algebras", U.P.B. Sci. Bull., Series A., Vol. 81, Iss 4, (2019).
18. Samea H., "Essential amenability of abstract Segal algebras", Bull. Aust. Math. Soc., 79 (2009) 319-325.