



Kharazmi University

# A distinct numerical approach for the solution of some kind of initial value problem involving nonlinear $q$ -fractional differential equations

Mohammad Esmael Samei<sup>1</sup>  , Azam Fathipour<sup>2</sup> 

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

✉E-mail: [mesamei@basu.ac.ir](mailto:mesamei@basu.ac.ir), [mesamei@gmail.com](mailto:mesamei@gmail.com)

2. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

E-mail: [a.fathipour@alumni.basu.ac.ir](mailto:a.fathipour@alumni.basu.ac.ir)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

28 June 2020

Revised form:

30 July 2020

Accepted:

22 December 2020

Published online:

22 November 2022

### Keywords:

The fractional

$q$ -derivative;

Difference

formula;

Truncation error;

Unconditional

Stability;

The  $q$ -fractional

differential

equation;

Convergence

analysis.

### Introduction

The fractional calculus deals with the generalization of integration and differentiation of integer order to those ones of any order. The  $q$ -fractional differential equation usually describes the physical process imposed on the time scale set  $T_q$ . In this paper, we first propose a difference formula for discretizing the fractional  $q$ -derivative

$${}^c D_q^\alpha x(t),$$

of Caputo type with order  $0 < \alpha < 1$  and scale index  $0 < q < 1$ . We establish a rigorous truncation error boundness and prove that this difference formula is unconditionally stable. Then, we consider the difference method for solving the initial problem of  $q$ -fractional differential equation:

$${}^c D_q^\alpha x(t) = f(t, x(t)).$$

We prove the existence and stability of the difference solution and give the convergence analysis. Numerical experiments show the effectiveness and high accuracy of the proposed difference method.

### Material and methods

In this scheme, we first present a difference formula (called the  $L_{1,q}$  formula) to discretize the fractional  $q$ -derivative  ${}^c D_q^\alpha x(t)$ , of Caputo type with

---

---

$0 < \alpha, q < 1$ . This difference formula is constructed by using the piecewise linear interpolation to approximate the integral function. Then, by using this difference formula, we establish a difference method for solving the initial problem of  $q$ -fractional differential equation.

### Results and discussion

We prove that this difference method is unconditionally stable and give an error estimation of  $\Delta t_n^2$ -order. Numerical experiments show the high accuracy and effectiveness of this difference formula. To the authors' best knowledge, it is the first time that an unconditionally stable difference formula is presented and analyzed for the  $q$ -fractional problems. Our work provides a numerical approach for solving the  $q$ -fractional problems.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- We present the difference formula and drive truncation error boundness.
- The formula is contributed to the stability analysis.
- The difference technique is used to solve the initial value problem of  $q$ -fractional differential equation.
- The existence of the solution, stability and error estimation are given for the difference formula.

---

**How to cite:** Samei, M.E., Fathipour, A., (2022) A distinct numerical approach for the solution of some kind of initial value problem involving nonlinear  $q$ -fractional differential equations. *Mathematical Researches*, 8 (3), 91-116



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## رویکرد عددی متمایز در جواب نوعی از مسأله مقدار اولیه شامل معادلات دیفرانسیل $q$ -کسری غیرخطی

محمد اسماعیل سامعی<sup>۱</sup>، اعظم فتحی پور<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران. پست الکترونیکی: [mesamei@basu.ac.ir](mailto:mesamei@basu.ac.ir), [mesamei@gmail.com](mailto:mesamei@gmail.com)

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران. پست الکترونیکی: [a.fathipour@alumni.basu.ac.ir](mailto:a.fathipour@alumni.basu.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

معادله دیفرانسیل کسری و  $q$ -کسری تعمیمی بر انتگرال و مشتق معمولی هستند که در آن مشتق و انتگرال از هر مرتبه‌ای می‌تواند باشد. معمولاً روند فیزیکی تحمیل شده بر اشیاء در مقیاس زمانی  $T_q$  را توصیف می‌کنند. در این پژوهش ابتدا یک رابطه تفاضلی برای  $q$ -مشتق کسری  ${}^c D_q^\alpha x(t)$  از نوع کاپوتو با مرتبه  $0 < \alpha < 1$  برای  $0 < q < 1$  تحت عنوان  $L_{1,q}$  ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که این رابطه تفاضلی به طور مطلق پایدار و در مقایسه با  $q$ -حسابان کسری از دقت بیشتری برخوردار است. سپس روش تفاضلی را برای حل مسأله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری  ${}^c D_q^\alpha x(t) = f(t, x(t))$  در نظر می‌گیریم. همچنین یکتایی وجود جواب، پایداری و همگرایی جواب حاصل را ثابت می‌کنیم. در پایان چند مثال ارائه می‌دهیم که نتایج عددی آنها نشان دهنده دقت بالای روش تفاضلی مذکور خواهد بود.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۰۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:

$q$ -مشتق کسری،

روش تفاضلی،

خطای برش،

پایداری بدون قید،

معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری،

تحلیل همگرایی.

استناد: سامعی، محمد اسماعیل؛ فتحی پور، اعظم، (۱۴۰۱). رویکرد عددی متمایز در جواب نوعی از مسأله مقدار اولیه شامل معادلات دیفرانسیل  $q$ -کسری غیرخطی.

پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۹۱-۱۱۶.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در سال‌های اخیر مسائل دیفرانسیل و انتگرال کسری،  $q$ -دیفرانسیل و  $q$ -انتگرال کسری سهم قابل توجهی از پژوهش‌های ریاضی را به خود اختصاص داده‌اند [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۲]، [۳۳]، [۳۴]، [۳۵]، [۳۶]، [۳۷]، [۳۸] و [۳۹]. معادلات دیفرانسیل کسری و  $q$ -کسری از آن جهت که در توصیف بهتر پدیده‌هایی که رفتار گسسته و پیوسته دارند و نیز قابلیت ترکیب در مقیاس زمانی روی مجموعه  $T_q$ ، شامل  $\{q^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$  دارند، بسیار مفید هستند. برای مثال می‌توان به کاربرد آن در مکانیک کوانتومی<sup>۱</sup>، آنالیز تصادفی<sup>۲</sup> پردازش سیگنال و تصویر<sup>۳</sup> و مدارهای الکترونیکی<sup>۴</sup> اشاره کرد [۱۴]، [۲۱]، [۲۶] و [۳۱]. مفهوم  $q$ -مشتق اولین بار توسط جکسون<sup>۵</sup> [۲۳]، در سال ۱۹۰۸ میلادی معرفی شد و سپس  $q$ -انتگرال توسط السالام<sup>۶</sup> [۱۱]، در سال ۱۹۶۶ میلادی ارائه شد. السالام و همکارش [۱۱]، تعریفی از حسابان  $q$ -کسری را در مقاله خود متذکر شدند که از آن در پژوهش‌های بعدی استفاده شده است. برای مطالعه بیشتر مفاهیم پایه و مقدماتی روی  $q$ -حسابان و حسابان  $q$ -کسری به [۴]، [۵]، [۱۳]، [۱۴]، [۲۱] و [۲۶] می‌توان مراجعه کرد. در مقایسه با حسابان کسری معمولی، مطالعه حسابان  $q$ -کسری هنوز قابل توسعه است بطوریکه بررسی وجود راه‌حلهایی برای مسائل مقدار اولیه  $q$ -کسری کاپوتو<sup>۷</sup> و مسائل مقدار مرزی<sup>۸</sup> توسط پژوهشگران بسیاری تحقیق می‌شود [۹]، [۱۲]، [۱۰]، [۱۷]، [۱۸] و [۴۰]. با استفاده از روش مستقیم لیپانوف<sup>۹</sup>، جراد<sup>۱۰</sup> و همکارش در [۲۵] پایداری سیستم‌های غیرخودگردان<sup>۱۱</sup>  $q$ -کسری از نوع کاپوتو را مطالعه کرده‌اند. همچنین وانگ<sup>۱۲</sup> و همکارانش در [۴۲] وجود جواب برای معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری نوع کاپوتو را مورد بررسی قرار داده‌اند. تانگ<sup>۱۳</sup> و همکارش در [۴۱] قضیه وجود برای مسأله مقدار اولیه از معادله  $q$ -کسری را بیان کرده‌اند. عبدالجواد<sup>۱۴</sup> و همکارش [۳] روش عددی برای به دست آوردن یک راه حل تقریبی از معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری کاپوتو را معرفی کرده‌اند. سپس سلحشور<sup>۱۵</sup> و همکارانش در [۳۶] همگرایی روش تخمین تقریبی که به وسیله عبدالجواد معرفی شد بود را مورد استفاده قرار دادند. همچنین بالانوف<sup>۱۶</sup> در [۱۴] از روش تکرار ناپایداری<sup>۱۷</sup> و روش افزایشی لاگرانژ<sup>۱۸</sup> برای مطالعه مسأله مقدار اولیه  $q$ -کسری کاپوتو استفاده کردند. نویسندگان در [۲۹] براساس موجک برنولی تابع کسری جدید را معرفی کرده و از آن در حل دستگاه معادلات کسری استفاده نمودند. همچنین آنها روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل ریکاتی<sup>۱۹</sup> کسری براساس تعریف مشتق کسری کاپوتو ارائه نمودند [۳۰]. در سال ۱۳۹۶، اردوخانی و همکارانش با تعریف نوعی تابع کسری

<sup>1</sup> Quantum mechanic

<sup>2</sup> Stochastic analysis

<sup>3</sup> Signal and image processing

<sup>4</sup> Electronic circuits

<sup>5</sup> Jakson

<sup>6</sup> Al-Salam

<sup>7</sup> Caputo type  $q$ -fractional initial value

<sup>8</sup> Boundary value problem

<sup>9</sup> Lyapunov's direct method

<sup>10</sup> Jarad

<sup>11</sup> Non-autonomous systems

<sup>12</sup> Wang

<sup>13</sup> Tang

<sup>14</sup> Abdeljawad

<sup>15</sup> Salahshour

<sup>16</sup> Baleanu

<sup>17</sup> Variation iteration method

<sup>18</sup> Lagrange multiplier method

<sup>19</sup> Riccati

جدید بر مبنای چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری، توانستند راه حل‌هایی در یافتن جواب معادلات دیفرانسیل کسری ارائه دهند. علاوه بر آن با بیان توابع پایه ای مرتبه کسری توانستند تقریب‌های مناسبی برای جواب برخی معادلات دیفرانسیل کسری اثبات کنند [۳۴] و [۳۵]. اخیراً ژانگ<sup>۲۰</sup> و همکارش یک روش تفاضلی برای حل مسأله اولیه از معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری ارائه نموده‌اند که این روش پایداری و همگرایی را در اختیار ما قرار نمی‌دهد [۴۴]. علاوه بر این سامعی و همکارانش نتایجی از معادلات و شمول‌های دیفرانسیل  $q$ -کسری به همراه محاسبات عددی و الگوریتم‌های مورد نیاز در حسابان  $q$ -کسری را ارائه نموده‌اند [۲۲]، [۳۸]، [۳۹]، [۴۰].

در حال حاضر فقط روش‌های تقریبی و گسسته محدودی برای مسائل  $q$ -کسری پیشنهاد شده است. در این مقاله ما ابتدا یک رابطه تفاضلی<sup>۲۱</sup>، که با  $L_{1,q}$  نشان داده می‌شود، برای  $q$ -مشتق کسری کاپوتو  ${}^c D_q^\alpha x(t)$  با مرتبه و شاخص  $0 < \alpha, q < 1$  معرفی می‌کنیم که این رابطه تفاضلی با به کار بردن ترکیب خطی تکراری در تقریب تابع انتگرال ایجاد شده است و در مقایسه با  $q$ -حسابان کسری تعریف شده توسط جکسون از دقت بالایی برخوردار است. ضریب‌هایی حاصل از این رابطه با جزئیات بررسی شده‌اند سپس خطاهای برش را نتیجه می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که این رابطه تفاضلی بدون قید پایدار است. در ادامه این رابطه را برای ایجاد یک رابطه تفاضلی در حل مسأله اولیه از معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری

$${}^c D_q^\alpha x(t) = f(t, x(t))$$

به کار می‌بریم. نشان می‌دهیم که رابطه تفاضلی دارای دقت بیشتری است و یک تخمین خطا از مرتبه  $\Delta t_n^2$  بدست می‌دهد. آزمایش‌های عددی در مثال‌های ارائه شده، دقت بالا و صحت این رابطه تفاضلی را نشان می‌دهد. اعتقاد داریم این اولین باری است که رابطه تفاضلی بدون قید معرفی شده در بررسی مسائل  $q$ -کسری، دارای پایداری است. در این جا یک روش عددی برای حل مسائل  $q$ -کسری ارائه خواهد شد.

بخش‌های این مقاله براساس زیر مرتب شده‌اند: ابتدا در بخش ۲ برخی نمادهای اصلی، مفاهیم و عملکردهایی راجع به حسابان  $q$ -کسری معرفی می‌کنیم. سپس در بخش ۳ رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  را ارائه می‌دهیم. همچنین خطای برش را بررسی می‌کنیم. بخش ۴ مربوط به پایداری رابطه تفاضلی می‌باشد. در بخش ۵ از روش تفاضلی مذکور برای حل مسأله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری استفاده کرده و یکتایی وجود جواب رابطه تفاضلی، پایداری و خطا تقریب آن بیان می‌شوند. در بخش ۶ مثال‌هایی به همراه نتایج عددی آماده شده‌اند که صحت نتایج را به درستی نشان می‌دهند. در پایان در بخش ۷، ارائه نتایج این پژوهش ارائه می‌شوند.

## $q$ -حسابان و حسابان $q$ -کسری

در این بخش ابتدا به معرفی مفاهیم و روابط  $q$ -حسابان و حسابان  $q$ -کسری می‌پردازیم و بعضی از نشانه‌گذاری‌ها در این نوع حسابان را معرفی می‌کنیم. مراجع [۱۴]، [۱۸]، [۲۶] و [۲۹] شامل مفاهیم اولیه این بخش که در ادامه عنوان شده‌اند، هستند. فرض کنیم  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  مجموعه اعداد صحیح مثبت باشند. عمل دوتایی  $q$ -جابه‌جایی به صورت زیر، برای هر  $k \in \mathbb{N}$  تعریف می‌شود:

<sup>20</sup> Zhang

<sup>21</sup> Difference formula

$$(t-s)^{(0)} = 1, (t-s)^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1} (t - q^i s). \quad (1)$$

همچنین اگر  $\alpha \in \mathbb{R}$  باشد به طوری که  $\alpha \notin \mathbb{N}$  آنگاه عمل دوتایی  $q$ -جابجایی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(t-s)^{(\alpha)} = t^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - q^i s}{t - q^{\alpha+i} s}, \quad (2)$$

که در آن  $0 \leq s \leq t$  می‌باشد [۲۶] و [۲۹]. فرض کنیم  $\mathbb{C}$  مجموعه اعداد مختلط باشد. برای  $0 < |q| < 1$  و

$$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\},$$

تابع  $q$ -گاما  $\Gamma_q(\alpha)$ ، بوسیله

$$\Gamma_q(\alpha) = (1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{1-\alpha}. \quad (3)$$

تعریف می‌شود. همچنین نماد  $[\alpha]$  برای اعداد حقیقی و اعداد صحیح مثبت به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\alpha] = \frac{1 - q^\alpha}{1 - q}.$$

با یک محاسبه ساده می‌توان نتیجه گرفت که

$$\Gamma_q(1) = 1,$$

$$\Gamma_q(\alpha + 1) = [\alpha] \Gamma_q(\alpha).$$

برای  $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$  تابع  $q$ -بتا بوسیله

$$B_q(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-qt)^{(\beta-1)} d_p t, \quad (4)$$

تعریف می‌شود [۲۶] و [۲۹]، که در آن  $q$ -انتگرال  $\int d_p t$  به وسیله (۵) و (۶) تعریف می‌شوند. رابطه بین تابع  $q$ -بتا و  $q$ -گاما از [۱۸] به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$B_q(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha + \beta)}.$$

فرض کنیم  $q \in \mathbb{R}$  یک نقطه ثابت باشد در این صورت زیرمجموعه  $A \subset \mathbb{R}$ ،  $q$ -هندسی نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $t, qt$  متعلق به  $A$  باشد. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای هر  $t$  متعلق به  $A$ ، زیرمجموعه  $A$  شامل همه دنباله‌های هندسی  $\{tq^n\}$  برای  $n = \{0, 1, 2, \dots\}$  است. یک مجموعه  $q$ -هندسی مقیاس زمانی  $T_q$  است که به وسیله

$$T_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

و  $0 < q < 1$  هستند.

تعریف ۱. [۲۳] فرض کنیم  $f(t)$  تابع حقیقی مقدار روی مجموعه  $A$  و  $|q| \neq 1$  باشد.  $q$ -مشتق  $f(t)$  توسط روابط

$$D_q f(t) = \frac{d_q f(t)}{d_q t} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t},$$

برای  $t \in A \setminus \{0\}$

$$D_q f(0) = \left. \frac{d_q f(t)}{d_q t} \right|_{t=0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(tq^n) - f(0)}{tq^n}$$

برای  $|q| < 1$  که در آن  $t \neq 0$  و

$$D_q f(0) = D_{q^{-1}} f(0).$$

برای  $|q| > 1$  محاسبه می‌شوند. در واقع  $q$ -مشتق یک مفهوم گسسته از مشتق معمولی است. به وضوح برای یک تابع  $f(t)$  که روی اعداد حقیقی تعریف شده است،  $q$ -مشتق آن  $D_q f(t)$  همواره برای  $t \neq 0$  وجود دارد و  $D_q f(0)$  خوش تعریف است در صورتی که مشتق  $f'(0)$  وجود داشته باشد. مشتقات مرتبه بالاتر  $q$ -مشتق  $D_q^n f(t)$  به صورت

$$D_q^n f(t) = D_q (D_q^{n-1} f(t)),$$

برای هر  $n \geq 2$  تعریف می‌شود. فرض کنیم  $f(t)$  و  $g(t)$  تابعهای حقیقی مقدار روی  $\mathbb{R}$  باشند به طوری که هر دو در  $t = 0$  مشتق‌پذیر باشند. آن‌گاه روابط زیر برای مشتق برقرار است [۱]:

$$D_q (af(t) \pm bg(t)) = aD_q f(t) \pm bD_q g(t),$$

برای  $a, b \in \mathbb{R}$

$$D_q (f(t)g(t)) = g(t)D_q f(t) + f(qt)D_q g(t),$$

و

$$D_q \left( \frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{g(t)D_q f(t) - f(t)D_q g(t)}{g(t)g(qt)},$$

که در آن  $g(t) \neq 0$  و  $g(qt) \neq 0$  می‌باشند.

تعریف ۲. [۲۴]  $q$ -انتگرال روی بازه  $(a, b)$  بوسیله

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t, a, b \in A. \quad (5)$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\int_0^x f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} xq^n f(xq^n), x \in A. \quad (6)$$

طبق این تعریف داریم

$$\left| \int_0^b f(t) d_q t \right| \leq \int_0^b |f(t)| d_q t, 0 < b. \quad (7)$$

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_a^c f(t) d_q t + \int_c^b f(t) d_q t, \quad (8)$$

برای  $a < c < b$

لم ۱. فرض کنیم  $f(t)$  و  $g(t)$  تابع‌های حقیقی مقدار روی مجموعه  $A$  باشند،  $0 \leq a < b$  و  $a$  و  $b$  متعلق به مجموعه  $A$  و  $|q|$  کمتر از یک باشد در این صورت

$$\int_a^b g(t)D_q f(t)d_q t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f(qt)D_q g(t)d_q t, \quad (۹)$$

$$\int_a^b g(qt)D_q f(t)d_q t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f(t)D_q g(t)d_q t. \quad (۱۰)$$

اثبات: با توجه به الگوی روابط (۹) و (۱۰)، در این جا به اثبات رابطه (۹) بسنده می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم  $a = 0$  باشد و در این صورت از رابطه (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^b g(t)D_q f(t)d_q t &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} b q^n g(b q^n) D_q f(b q^n) \\ &= (1-q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n g(b q^n) \frac{f(b q^n) - f(b q^{n+1})}{(1-q)b q^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(b q^n)(f(b q^n) - f(b q^{n+1})), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \int_0^b f(qt)D_q g(t)d_q t &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} b q^n f(b q^{n+1}) D_q g(b q^n) \\ &= (1-q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(b q^{n+1}) \frac{g(b q^n) - g(b q^{n+1})}{(1-q)b q^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(b q^{n+1})(g(b q^n) - g(b q^{n+1})) \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^b g(t)D_q f(t)d_q t + \int_0^b f(qt)D_q g(t)d_q t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f(b q^n)g(b q^n) - f(b q^{n+1})g(b q^{n+1})) \\ &= f(b)g(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(b q^{n+1}) = (fg)(b) - (fg)(0). \end{aligned} \quad (۱۱)$$

حال فرض کنیم  $a > 0$  باشد. در این صورت بنابر روابط (۵) و (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)D_q f(t)d_q t &= \int_0^b g(t)D_q f(t)d_q t - \int_0^a g(t)D_q f(t)d_q t \\ &= (fg)(b) - (fg)(0) - \int_0^a f(qt)D_q g(t)d_q t - (fg)(a) \\ &\quad + (fg)(0) + \int_0^a f(qt)D_q g(t)d_q t \\ &= (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f(qt)D_q g(t)d_q t. \end{aligned}$$



لذا اثبات تمام است.

در ادامه به بیان حسابان  $q$ -کسری می پردازیم.

**تعریف ۳.** [۱۶] فرض کنیم  $t$  متعلق به  $A$ ،  $\alpha \neq -1, -2, \dots$  و  $a \geq 0$  باشند. انتگرال  $q$ -کسری ریمان-لیوویل<sup>۲۲</sup>

با کران پایین  $a$ ، به وسیله  $I_{q,a}^0 f(t) = f(t)$  و

$$I_{q,a}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t (t - qs)^{(\alpha-1)} f(s) d_qs. \quad (12)$$

به ترتیب برای  $\alpha = 0$  و هر  $\alpha$  تعریف می شود.

**تعریف ۴.** [۳۰] فرض کنیم  $a \geq 0$ ،  $a$  متعلق به  $A$  و  $n = [\alpha]$  باشند که در آن  $[\alpha]$ ، کوچکترین عدد صحیح بزرگتر

با مساوی  $\alpha$  می باشد. مشتق  $q$ -کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$ ، تابع  $f(t): (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه

$$D_{q,a}^\alpha f(t) = \begin{cases} I_{q,a}^{-\alpha} f(t), & a \leq 0, \\ D_q^n I_{q,a}^{n-\alpha} f(t), & a > 0, \end{cases} \quad (13)$$

تعریف می شود.

**تعریف ۵.** [۳۰] فرض کنیم  $a \geq 0$ ،  $a$  متعلق به  $A$  و  $n = [\alpha]$  باشند. مشتق  $q$ -کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$ ، تابع

$f(t): (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه زیر تعریف می شود:

$${}^c D_{q,a}^\alpha f(t) = \begin{cases} I_{q,a}^{-\alpha} f(t), & a \leq 0, \\ I_{q,a}^{n-\alpha} D_q^n f(t), & a > 0, \end{cases} \quad (14)$$

در این جا برای سادگی نمادهای  $I_q^\alpha f(t)$ ،  $D_q^\alpha f(t)$  و  ${}^c D_q^\alpha f(t)$  را به ترتیب برای  $I_{q,0}^\alpha f(t)$ ،  $D_{q,0}^\alpha f(t)$  و

${}^c D_{q,0}^\alpha f(t)$  به کار می بریم. در مراجع [۳] و [۱۴]، رابطه بین مشتق  $q$ -کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  و مشتق  $q$ -کسری

ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر بیان شده است:

$${}^c D_{q,a}^\alpha f(t) = D_q^\alpha \left( f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D_q^j f(0)}{\Gamma_q(j+1)} t^j \right), n = [\alpha], \alpha > 0 \quad (15)$$

به ویژه برای  $0 < \alpha < 1$ ، داریم:

$${}^c D_{q,a}^\alpha f(t) = D_q^\alpha f(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma_q(1-\alpha)} f(0). \quad (16)$$

### معرفی رابطه تفاضلی $L_{1,q}$

در این بخش یک رابطه تفاضلی برای مشتق  $q$ -کسری کاپوتو  ${}^c D_q^\alpha x(t)$  با مرتبه  $0 < \alpha < 1$  برای اولین بار

ارائه می کنیم و محدوده خطای برش آن را نشان می دهیم.

ابتدا مشتق  $q$ -کسری کاپوتو به ازای هر  $0 < t \leq b$  را در نظر می‌گیریم:

$${}^c D_q^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \int_0^t (t-qs)^{(-\alpha)} D_q x(s) d_q s, \quad (17)$$

که در آن  $0 < \alpha$  و  $q < 1$  می‌باشند. سعی داریم یک رابطه تفاضلی برای تقریب  ${}^c D_q^\alpha x(t)$  روی نقطه گسسته  $\{t_k\} \subset T_{q,b}$  بیابیم که در آن

$$T_{q,b} = \{bq^n: n = 0, 1, \dots\} \cup \{0\}.$$

فرض کنیم

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b,$$

یک افراز از بازه  $[0, b]$  با  $t_k = bq^{N-k}$  متعلق به  $T_{q,b}$  باشد به طوری که اندازه هر گام  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  که در آن  $1 \leq k \leq N$  و  $N \geq 1$  عددی صحیح است.

**تعریف ۶.** درونیایی خطی نقطه به نقطه تابع  $x(t)$  را به صورت زیر برای هر  $s \in [t_{k-1}, t_k]$  تعریف می‌کنیم:

$$L_{1,k}(s) = \frac{s-t_{k-1}}{\Delta t_k} x(t_k) + \frac{t_k-s}{\Delta t_k} x(t_{k-1}), \quad (18)$$

که در آن  $k = 1, 2, \dots, N$ . همچنین خطای درونیایی را با

$$R_k(s) = x(s) - L_{1,k}(s), s \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

محاسبه می‌کنیم. از آنجائیکه

$${}^c D_q^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n-qs)^{(-\alpha)} D_q x(s) d_q s, \quad (20)$$

با جای‌گزینی  $x(s)$  با  $L_{1,k}x(s)$  در (۲۰) و استفاده از برابری

$$D_q L_{1,k}x(s) = \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\Delta t_k},$$

برای هر  $k = 1, 2, \dots, n$  خواهیم داشت:

$${}^c D_q^\alpha x(t_n) = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n b_k (x(t_k) - x(t_{k-1})) + R_q^n, \quad (21)$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n-qs)^{(-\alpha)} d_q s, \quad (22)$$

که در آن خطای برش عبارت است از

$$R_q^n = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n-qs)^{(-\alpha)} D_q R_k(s) d_q s, \quad (23)$$

بنابراین رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\Delta_q^\alpha x^n = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n b_k(x^k - x^{k-1}), \quad {}^c D_q^\alpha x(t_n) = \Delta_q^\alpha x(t_n) + R_q^n, \quad (24)$$

که در آن  $x^k$  هر تابع تعریف شده روی مجموعه  $\{t_k\}$  است به طوری که  $x(t)$  روی  $[0, t_N]$  پیوسته می‌باشد. قرار می‌دهیم  $x^k = x(t_k)$ .

در ادامه خطای برش  $R_q^n$  را تخمین می‌زنیم. ابتدا به بیان و اثبات چند لم مورد نیاز می‌پردازیم.

لم ۲. (لم  $q$ -رول<sup>۲۳</sup>) فرض کنید  $x(t)$  تابع پیوسته روی  $[a, b]$  باشد در این صورت برای  $q$  متعلق به  $(a, b)$  نقطه  $\xi$  متعلق به  $(a, b)$  وجود دارد به طوری که  $D_q x(\xi) = 0$ .

اثبات: به مرجع [۲۱] مراجعه شود.

لم ۳. فرض کنید  $x(s)$  و  $D_q x(s)$  روی  $[t_{k-1}, t_k]$  پیوسته باشند. آن‌گاه خطای درونیابی خطی

$$R_k(s) = x(s) - L_{1,k}(s),$$

به صورت زیر برای  $s \in [t_{k-1}, t_k]$  و  $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$  بیان می‌شود:

$$R_k(s) = \frac{1}{1+q} D_q^2 x(\xi_k)(s - t_{k-1})(s - t_k),$$

که در آن  $1 \leq k \leq N$  است.

اثبات: از این که  $R_k(t_{k-1}) = R_k(t_k) = 0$  می‌توانیم فرض کنیم

$$R_k(s) = K_q(s)(s - t_{k-1})(s - t_k), \quad (25)$$

برای  $s \in [t_{k-1}, t_k]$ ، که در آن  $K_q(s)$  یک تابع نامعین<sup>۲۴</sup> است. نقطه ثابت  $s \in (t_{k-1}, t_k)$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$\varphi_q(t) = x(t) - L_{1,k}(t) - K_q(s)(t - t_{k-1})(t - t_k).$$

چون

$$\varphi_q(t_{k-1}) = \varphi_q(t_k) = \varphi_q(s) = 0$$

با دو مرتبه استفاده از لم ۲،  $q$ -رول، ملاحظ می‌شود که  $D_q^2 \varphi_q(t)$  حداقل یک نقطه صفر  $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$  دارد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D_q^2 \varphi_q(\xi_k) &= D_q^2 (x(t) - L_{1,k}(t) - K_q(s)(t - t_{k-1})(t - t_k)) \Big|_{t = \xi_k} \\ &= D_q^2 x(\xi_k) - (1+q)K_q(s) = 0 \end{aligned}$$

از این رو داریم:

$$K_q(s) = \frac{D_q^2 x(\xi_k)}{1+q}.$$

<sup>23</sup>  $q$ -Rulle lemma

<sup>24</sup> Undetermined function

با جای‌گذاری  $K_q(s)$  در رابطه (۲۵) اثبات تمام خواهد شد.

لم ۴. فرض کنید  $0 < \alpha, q < 1$  و عملگر  $q$ -مشتق نسبت به متغیر  $s$  باشد. آنگاه برای  $0 \leq s \leq t$  داریم:

$$D_q(t-s)^{(-\alpha)} = -[-\alpha](t-qs)^{(-\alpha-1)}, \quad (26)$$

و

$$|(t-qs)^{(-\alpha-1)}| \leq t^{-\alpha-1} \frac{1}{1-q^\alpha} \frac{1}{1-q^{1-\alpha}}. \quad (27)$$

اثبات: ابتدا رابطه (۲۶) را ثابت می‌کنیم. با استفاده از عملگر  $D_q$  و رابطه (۲) داریم:

$$D_q(t-s)^{(-\alpha)} = \frac{(t-qs)^{(-\alpha)} - (t-s)^{(-\alpha)}}{(q-1)s} = \frac{t^{-\alpha}}{(q-1)s} \lim_{m \rightarrow \infty} s_m, \quad (28)$$

که در آن

$$s_m = \prod_{i=0}^m \left[ \frac{(t-q^{i+1}s)}{(t-q^{i+1-\alpha}s)} - \frac{(t-q^i s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} \right].$$

همچنین با محاسبه ساده می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} s_m &= \prod_{i=1}^m \frac{(t-q^i s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} \left[ \frac{(t-q^{m+1}s)}{(t-q^{m+1-\alpha}s)} - \frac{(t-s)}{(t-q^{-\alpha}s)} \right] \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{(t-q^i s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} \left[ \frac{st(1-q^{-\alpha})(1-q^{m+1})}{(t-q^{m+1-\alpha}s)(t-q^{-\alpha}s)} \right] \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{(t-q^{i+1}s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} \left[ \frac{st(1-q^{-\alpha})(1-q^{m+1})}{(t-q^{m+1-\alpha}s)(t-q^{m+1}s)} \right] \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{(t-q^{i+1}s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} \left[ \frac{s(1-q^{-\alpha})}{t} \right], \end{aligned}$$

که در آخرین تساوی زمانی است که  $m \rightarrow \infty$  میل می‌کند. حال با جای‌گذاری نتیجه حاصل در رابطه (۲۸) خواهیم داشت:

$$D_q(t-s)^{(-\alpha)} = \frac{(1-q^{-\alpha})}{(q-1)} t^{-\alpha-1} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(t-q^{i+1}s)}{(t-q^{i-\alpha}s)} = -[-\alpha](t-qs)^{(-\alpha-1)}.$$

حال درستی نابرابری (۲۷) را نشان می‌دهیم. چون

$$(t-qs)^{(-\alpha-1)} = t^{-\alpha-1} \lim_{m \rightarrow \infty} s'_m, \quad (29)$$

که در آن

$$s'_m = \prod_{i=0}^m \frac{(t-q^{i+1}s)}{(t-q^{i-\alpha}s)}$$

و

$$\max_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{(t - qs)}{(t - q^{-\alpha}s)} \right| = \max \left\{ 1, \left| \frac{1 - q}{1 - q^{-\alpha}} \right| \right\} \leq \frac{1 - q}{1 - q^\alpha},$$

$$\max_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{(t - q^{i+1}s)}{(t - q^{i-\alpha}s)} \right| = \frac{(1 - q^{i+1})}{(1 - q^{i-\alpha})},$$

برای هر  $1 \leq i$  برقرار است. بنابراین

$$\begin{aligned} |s'_m| &\leq \frac{1 - q}{1 - q^\alpha} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{i+1})}{(1 - q^{i-\alpha})} \\ &= \frac{1}{1 - q^\alpha} \frac{1}{1 - q^{1-\alpha}} \frac{1 - q}{1 - q^{2-\alpha}} \frac{1 - q^2}{1 - q^{3-\alpha}} \cdots \frac{1 - q^{m-1}}{1 - q^{m-\alpha}} \frac{1 - q^m}{1} \frac{1 - q^{m+1}}{1} \\ &\leq \frac{1}{1 - q^\alpha} \frac{1}{1 - q^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

که با جای‌گذاری در رابطه (۲۹)، اثبات کامل می‌شود.

حال به محاسبه تخمین خطای برش می‌پردازیم.

**قضیه ۱.** فرض کنید  $x(t)$  و  $D_q x(t)$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشند. در این صورت خطای برش رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  که در رابطه (۲۴) معرفی شده است، برای  $n \geq 1$  در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$|R_q^n| \leq \frac{1}{4\Gamma_q(1 - \alpha)} \frac{1}{1 - q^2} \frac{1}{q^\alpha - q} t_n^{-\alpha} \Delta t_n^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)|. \quad (30)$$

**اثبات:** فرض کنیم  $\bar{R}(s) = R_k(s)$  برای هر  $s \in [t_{k-1}, t_k]$  که در آن  $1 \leq k \leq N$  می‌باشد. از رابطه (۲۳)،  $q$ -انتگرال، رابطه (۱۰) و لم ۴ داریم:

$$\begin{aligned} R_q^n &= \frac{1}{\Gamma_q(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - qs)^{(-\alpha)} D_q R_k(s) d_q s \\ &= \frac{(t_n - qs)^{(-\alpha)}}{\Gamma_q(1 - \alpha)} R_k(s) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma_q(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} D_q (t_n - s)^{(-\alpha)} R_k(s) d_q s \\ &= \frac{[-\alpha]}{\Gamma_q(1 - \alpha)} \int_0^t (t_n - s)^{(-\alpha-1)} \bar{R}(s) d_q s. \end{aligned}$$

از این‌رو با استفاده از روابط (۷) و (۸)، لم ۳ و رابطه (۲۷) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} |R_q^n| &= \frac{|[-\alpha]|}{\Gamma_q(1-\alpha)} \int_0^t |(t_n-s)^{(-\alpha-1)} \bar{R}(s)| d_q s \\ &= \frac{|[-\alpha]|}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |(t_n-qs)^{(-\alpha-1)} R_k(s)| d_q s \\ &\leq \frac{|[-\alpha]|}{\Gamma_q(1-\alpha)} \frac{1}{1+q} \frac{1}{4} \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta t_k|^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)| \int_0^{t_n} |(t_n-s)^{(-\alpha-1)}| d_q s \\ &\leq \frac{|[-\alpha]|}{\Gamma_q(1-\alpha)} \frac{1}{1+q} \frac{1}{4} \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta t_k|^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)| t_n^{-\alpha} \frac{1}{1-q^\alpha} \frac{1}{1-q^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \frac{q^{-\alpha}}{1-q^2} \frac{1}{4} \frac{1}{1-q^{1-\alpha}} t_n^{-\alpha} \Delta t_n^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)|. \end{aligned}$$

و لذا برهان تمام است.

### پایداری رابطه تفاضلی $L_{1,q}$

ابتدا دو لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۵. برای  $0 < \alpha, q < 1$  نامساوی

$$t_n^{-\alpha} < (t_n - q^{i+1}s)^{(-\alpha)} \leq (t_n - qs)^{(-\alpha)}, \quad (31)$$

به ازای هر  $0 \leq s \leq t_n$  برقرار است، که در آن  $i \geq 0$ .

اثبات: برای اثبات سمت چپ نابرابری، چون برای هر  $i \geq 0$  و  $j \geq 0$  نابرابری

$$\frac{t_n - q^{i+j+1}s}{t_n - q^{i+j+1-\alpha}s} > 1,$$

برقرار است، داریم:

$$(t_n - q^{i+1}s)^{(-\alpha)} = t_n^{-\alpha} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{t_n - q^{i+j+1}s}{t_n - q^{i+j+1-\alpha}s} > t_n^{-\alpha},$$

به ازای هر  $i \geq 0$  و هر  $0 \leq s \leq t_n$ . حال با استفاده از رابطه حاصل، برای هر  $i \geq 1$  داریم:

$$\begin{aligned} &(t_n - q^{i+1}s)^{(-\alpha)} - (t_n - qs)^{(-\alpha)} \\ &= t_n^{-\alpha} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(t_n - q^{i+j+1}s)}{(t_n - q^{i+j+1-\alpha}s)} - t_n^{-\alpha} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(t_n - q^{j+1}s)}{(t_n - q^{j+1-\alpha}s)} \\ &= t_n^{-\alpha} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(t_n - q^{j+1}s)}{(t_n - q^{j+1-\alpha}s)} \left( 1 - \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(t_n - q^{j+1}s)}{(t_n - q^{j+1-\alpha}s)} \right) < 0. \end{aligned}$$

در نتیجه اثبات تمام است.

لم ۶. فرض کنیم سری  $\{b_k\}$  به وسیله رابطه (۳۲) تعریف شده باشد. آن گاه

$$b_k = (t_k - qt_k)^{(-\alpha)}, k \geq 2 \quad (32)$$

$$t_n^{-\alpha} < b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} < b_k, 2 \leq k \leq n, \quad (33)$$

اثبات: چون  $t_{k-1} = qt_k$ ,  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = t_k(1 - q)$  می باشد، با استفاده از رابطه (۳۲)، برای  $k \geq 2$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - qs)^{(-\alpha)} d_qs \\ &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_0^{t_k} (t_n - qs)^{(-\alpha)} d_qs - \frac{1}{\Delta t_k} \int_0^{t_{k-1}} (t_n - qs)^{(-\alpha)} d_qs \\ &= (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_k}{\Delta t_k} q^i (t_n - q^{i+1}t_k)^{(-\alpha)} \\ &\quad - (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_{k-1}}{\Delta t_k} q^i (t_n - q^{i+1}t_{k-1})^{(-\alpha)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q^i (t_n - q^{i+1}t_k)^{(-\alpha)} - \sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} (t_n - q^{i+1}t_k)^{(-\alpha)} \\ &= (t_n - qt_k)^{(-\alpha)}. \end{aligned}$$

که نتیجه حاصل همان تساوی (۳۲) را بیان می کند. برای بررسی درستی نابرابری (۳۳)، ابتدا بنابر لم ۵ داریم:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_0^{t_k} (t_n - qs)^{(-\alpha)} d_qs = (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_1}{\Delta t_1} q^i (t_n - q^{i+1}t_1)^{(-\alpha)} \\ &> t_n^{-\alpha} (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i = t_n^{-\alpha} \end{aligned} \quad (34)$$

و

$$\begin{aligned} b_1 &= (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_1}{\Delta t_1} q^i (t_n - q^{i+1}t_1)^{(-\alpha)} \leq (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i (t_n - qt_1)^{(-\alpha)} \\ &= (t_n - qt_1)^{(-\alpha)}. \end{aligned} \quad (35)$$

حال با استفاده از روابط (۳۲)، (۳۵) و لم ۵ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_2 - b_1 &\geq (t_n - qt_k)^{(-\alpha)} - (t_n - qt_{k-1})^{(-\alpha)} \\ &= (t_n - qt_k)^{(-\alpha)} - (t_n - q^2t_k)^{(-\alpha)} > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

از طرفی از رابطه (۳۲) و لم ۵ می توانیم برای هر  $k \geq 3$  نتیجه بگیریم که:

$$\begin{aligned} b_k - b_{k-1} &= (t_n - qt_k)^{(-\alpha)} - (t_n - qt_{k-1})^{(-\alpha)} \\ &= (t_n - qt_k)^{(-\alpha)} - (t_n - q^2t_k)^{(-\alpha)} > 0, \end{aligned} \quad (37)$$

از ترکیب روابط (۳۶) و (۳۷) نابرابری (۳۳) را نتیجه خواهیم گرفت. حال پایداری رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$ ، رابطه (۲۴)، را بررسی می‌کنیم. بدین منظور معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta_q^\alpha x^n = f^n, n = 1, 2, \dots, N, \Delta_q^\alpha x^n = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n b_k (x^k - x^{k-1}), \quad (38)$$

که در آن مقدار اولیه  $x^0$  و  $f^n$  داده شده‌اند. حال با استفاده از رابطه

$$\sum_{k=0}^n b_k (x^k - x^{k-1}) = b_n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k-1}) x^k - b_1 x^0,$$

می‌توانیم رابطه تفاضلی (۳۸) را، برای  $n \geq 1$  به شکل زیر بنویسیم:

$$b_n x^n = b_1 x^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) x^k + \Gamma_q(1-\alpha) f^n. \quad (39)$$

**قضیه ۲.** رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  بدون قید پایدار است، ب طوری که جواب معادله تفاضل (۳۹)، در نابرابری

$$|x^n| \leq |x^0| + \Gamma_q(1-\alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f^k|,$$

برای  $n \geq 1$  صدق می‌کند.

**اثبات:** با استفاده از رابطه (۳۹) و لم ۶ داریم:

$$\begin{aligned} b_n |x^n| &\leq b_1 |x^0| + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \max_{1 \leq k \leq n} |x^k| + \Gamma_q(1-\alpha) |f^n| \\ &\leq b_1 |x^0| + (b_n - b_1) \max_{1 \leq k \leq n} |x^k| + \Gamma_q(1-\alpha) |f^n|. \end{aligned} \quad (40)$$

فرض کنیم  $1 \leq n_0 \leq n$  باشد به طوری که  $|x^{n_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x^k|$ . در نتیجه (۴۰)، اگر قرار دهیم  $n = n_0$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$b_1 \max_{1 \leq k \leq n} |x^k| \leq b_1 |x^0| + \Gamma_q(1-\alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f^k|.$$

از این‌رو با استفاده از رابطه (۳۳)، برهان تمام است.

### روش تفاضلی برای معادله دیفرانسیل $q$ -کسری

مسأله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری

$$\begin{cases} {}^c D_q^\alpha x(t) = f(t, x(t)), 0 < t \leq b, 0 < q, a < 1, t \in T_{q,b}, \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (41)$$



را در نظر می‌گیریم، که در آن تابع  $f: [0, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  پیوسته و  $d \geq 1$  است. افراز بازه  $[0, b]$  که در بخش ۳ بیان شد را در نظر می‌گیریم. با تعریفی که از رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  بیان شد و روش تفاضلی که برای حل مسأله (۴۱)، می‌توان برای  $n = 1, 2, \dots, N$  نتیجه گرفت:

$$b_n x^n = b_1 x^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) x^k + \Gamma_q(1 - \alpha) f(t_n, x^n), \quad (42)$$

ابتدا یکتایی وجود حل تفاضلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳. فرض کنیم تابع  $f: [0, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  پیوسته و در شرط لیپشیتس

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|, \quad (43)$$

برای هر  $x, x' \in \mathbb{R}^d$  صدق کند و  $L_1 = L\Gamma_q(1 - \alpha)b^\alpha < 1$  باشد. در این صورت معادله تفاضلی (۴۲) دارای جواب منحصر به فرد است.

اثبات: کافیست نشان دهیم برای هر ثابت  $n \geq 1$  و دنباله  $\{x^k\}$  که  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ، عنصر منحصر به فرد  $x^n$  وجود داشته باشد به طوری که در رابطه (۴۲) صدق کند. الگوی تکرار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b_n x^{n,l} = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) x^k + \Gamma_q(1 - \alpha) f(t_n, x^{n,l-1}), \quad l = 1, 2, \dots, x^{n,0} = x^{n-1}. \quad (44)$$

توجه داشته باشید که داریم  $b_n \geq t_n^{-\alpha} \geq b^{-\alpha}$  و نیز از روابط (۴۳) و (۴۴) برای  $l \geq 1$  داریم:

$$\begin{aligned} |x^{n,l+1} - x^{n,l}| &= b_n^{-1} \Gamma_q(1 - \alpha) |f(t_n - x^{n,l}) - f(t_n - x^{n,l-1})| \\ &\leq L_1 |x^{n,l} - x^{n,l-1}| \leq \dots \leq L_1^l |x^{n,l} - x^{n,0}|. \end{aligned}$$

چون  $L_1 < 1$ ، لذا سری  $\{x^{n,l}\}$  همگراست. اگر در رابطه (۴۴)،  $l$  به بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه می‌توان مشاهده کرد که  $x^n = x^{n,\infty}$  جوابی برای معادله تفاضلی (۴۲) خواهد بود. حال فرض کنیم برای ثابت  $n$ ، معادله (۴۲) دارای دو جواب  $x^n$  و  $\bar{x}^n$  باشد. در این صورت  $x^n$  و  $\bar{x}^n$  در رابطه

$$\begin{aligned} |x^n - \bar{x}^n| &= b_n^{-1} \Gamma_q(1 - \alpha) |f(t_n - x^n) - f(t_n - \bar{x}^n)| \\ &\leq L_1 |x^n - \bar{x}^n| < |x^n - \bar{x}^n| \end{aligned}$$

صدق می‌کنند. لذا این نشان می‌دهد که  $x^n = \bar{x}^n$  پس حد یکتاست.

در قضیه بعدی پایداری راه حل تفاضلی را نشان می‌دهیم.

قضیه ۴. فرض کنیم شرط رابطه (۴۳) برقرار باشد. در این صورت جواب معادله تفاضلی (۴۲)، در تخمین پایداری

$$|x^n| \leq \frac{1}{1 - L_1} \left[ |x^0| + \Gamma_q(1 - \alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f(t_k, 0)| \right],$$

برای  $n \geq 1$  صدق می‌کند.

اثبات: فرض کنیم  $x^n$  جوابی برای معادله (۴۲) باشد. به طور مشابه با برهان قضیه ۲، برای  $n \geq 1$  داریم:

$$|x^n| \leq |x^0| + \Gamma_q(1 - \alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f(t_k, x^k)|. \quad (45)$$

همچنین از شرط (۴۳) نتیجه می‌شود:

$$|f(t_k, 0)| = |f(t_k, x^k) - f(t_k, 0)| + |f(t_k, 0)| \leq L|x_k| + |f(t_k - 0)|.$$

با ترکیب نتیجه حاصل و رابطه (۴۵)، برای  $n \geq 1$  خواهیم داشت:

$$|x^n| \leq |x^0| + L_1 \max_{1 \leq k \leq n} |x^k| + \Gamma_q(1 - \alpha)t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f(t_k, 0)|. \quad (۴۶)$$

حال فرض کنیم  $1 \leq n_0 \leq n$ ، به طوری که  $|x^{n_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x^k|$  اگر در رابطه (۴۶) قرار دهیم  $n = n_0$  آن‌گاه برای هر  $n \geq 1$  خواهیم داشت:

$$(1 - L_1) \max_{1 \leq k \leq n} |x^k| \leq |x^0| + \Gamma_q(1 - \alpha)t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f(t_k, 0)|,$$

که نتیجه حاصل همان تخمین مطلوب را برآورد می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنیم  $x(t)$  و  $x^n$  به ترتیب جواب‌هایی برای معادلات (۴۱) و (۴۲) باشند. همچنین فرض کنیم  $x(t)$  و  $D_q x(t)$  روی بازه  $[0, b]$  پیوسته و شرط (۴۳) نیز برقرار باشد. آن‌گاه تخمین خطای زیر را برای  $n \geq 1$  داریم:

$$|x(t_n) - x^n| \leq \frac{1}{1 - L_1} \frac{1}{4} \frac{1}{1 - q^2} \frac{1}{q^\alpha - q} \Delta t_n^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)|. \quad (۴۷)$$

اثبات: در رابطه (۴۱) دیدیم که جواب  $x(t)$  در معادله گسسته

$$\Delta_q^\alpha x(t_n) = f(t_n, x(t_n)) - R_q^n,$$

یا در رابطه

$$b_n x(t_n) = b_1 x^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) x(t_k) + \Gamma_q(1 - \alpha) f(t_n, x(t_n)) - \Gamma_q(1 - \alpha) R_q^n \quad (۴۸)$$

صدق می‌کند که در آن خطای برش

$$R_q^n = {}^c D_q^\alpha x(t_n) - \Delta_q^\alpha x(t_n)$$

همان تعریف رابطه (۲۳) را دارد. تابع خطای  $e_n = x^n - x(t_n)$  را تعریف می‌کنیم. از معادلات (۴۲) و (۴۸) خواهیم داشت:

$$b_n e_n = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) e_k + \Gamma_q(1 - \alpha) (f(t_n, x^n) - f(t_n, x(t_n))) + \Gamma_q(1 - \alpha) R_q^n.$$

در این صورت به طور مشابه از قضیه ۲، برای  $n \geq 1$  داریم:

$$|e_n| \leq \Gamma_q(1 - \alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |f(t_k, x^k) - f(t_k - x(t_k))| + \Gamma_q(1 - \alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |R_q^k|. \quad (۴۹)$$

از این رو شرط (۴۳)، برای  $n \geq 1$  نتیجه می‌دهد:

$$|e_n| \leq L_1 \max_{1 \leq k \leq n} |e_k| + \Gamma_q(1 - \alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |R_q^k|.$$

که مجدداً از نتیجه حاصل برای  $n \geq 1$  خواهیم داشت:

$$|e_n| \leq \frac{1}{1-L_1} \Gamma_q(1-\alpha) t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |R_q^k|, \quad (50)$$

از طرفی با استفاده از قضیه ۱ و  $t_k = \Delta t_k / (1-q)$  داریم:

$$|R_q^k| \leq \frac{1}{4\Gamma_q(1-\alpha)} \frac{1}{1-q^2} \frac{(1-q)^\alpha}{q^\alpha - q} \Delta t_k^{2-\alpha} \max_{0 \leq t \leq t_k} |D_q^2 x(t)|. \quad (51)$$

با جای گذاری رابطه (۵۱) در رابطه (۵۰)، برای  $n \geq 1$  خواهیم داشت:

$$|e_n| \leq \frac{1}{1-L_1} \frac{1}{4} \frac{1}{1-q^2} \frac{(1-q)^\alpha}{q^\alpha - q} t_n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k^{2-\alpha} \max_{0 \leq t \leq t_k} |D_q^2 x(t)|,$$

که در آن  $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k = \Delta t_n$  و  $t_n = \Delta t_n / (1-q)$  لذا اثبات تمام است.

توجه داشته باشید که چون  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = b q^{N-n} (1-q)$ ، لذا از رابطه (۴۷) می توان نتیجه گرفت

$$|x(t_n) - x^n| \leq \frac{1}{1-L_1} \frac{1}{4} \frac{1-q}{q^\alpha - q} b^2 q^{2(N-n)} \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k^{2-\alpha} \max_{0 \leq t \leq t_n} |D_q^2 x(t)|. \quad (52)$$

این نشان می دهد که برای هر نقطه ثابت  $t_n$  متعلق به  $(0, b)$  با شرط  $n \leq (1-\delta)N$  که در آن  $0 < \delta < 1$  می باشد، حل تفاضلی  $x^n \rightarrow x(t_n)$  وقتی  $N \rightarrow 0$  میل می کند، سرعت همگرایی از مرتبه  $O(q^{2\delta N})$  می باشد.

تذکر ۱. چون اندازه گام  $q$ -شبکه<sup>۲۵</sup> به صورت  $\Delta t_1 < \Delta t_2 < \dots < \Delta t_N$  و  $\Delta t_N = (1-q)b$  می باشد، لذا حل تفاضلی  $x^n$  که روی مقیاس زمان  $T_{q,b}$  تعریف می شود، برای همه نقاط  $q$ -شبکه  $\{t_n\}$  صادق است.

## مثال های عددی

در این بخش مثال های عددی که نشان دهنده دقت بالا و مؤثر رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  می باشد، ارائه می کنیم. نتایج عددی به دست آمده توسط نرم افزار متلب ۲۰۱۴<sup>۲۶</sup> محاسبه شده اند.

مثال ۱. ابتدا درستی و دقت رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  را بررسی می کنیم. بدین منظور تابع

$$x(t) = t^2 + 1, \quad (53)$$

$${}^c D_q^\alpha x(t) = \frac{q+1}{\Gamma_q(1-\alpha)} t^{2-\alpha} B_q(1-\alpha, 2) = \frac{q+1}{\Gamma_q(3-\alpha)} t^{2-\alpha},$$

برای  $0 \leq t \leq 1$  را در نظر می گیریم. خطای برش را با

$$E_q^2(t_n) = |\Delta_q^\alpha x(t_n) - D_q^\alpha x(t_n)|$$

نشان می دهیم که در آن  $t_n = q^{N-n}$  و  $1 \leq n \leq N$  جداول ۱ و ۲ نتایج عددی را برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $q$  نشان می دهند. همانطور که دیده می شود دقت رابطه تفاضلی  $L_{1,q}$  بسیار بالاست. بویژه در نقاط آخر  $t_N = 1$  این موضوع کامل مشهود است.

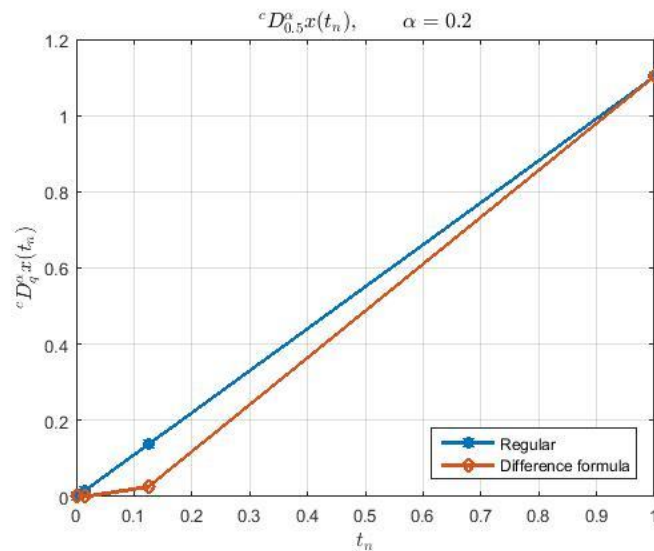
<sup>25</sup>  $q$ -mesh

<sup>26</sup> MATLAB 2014

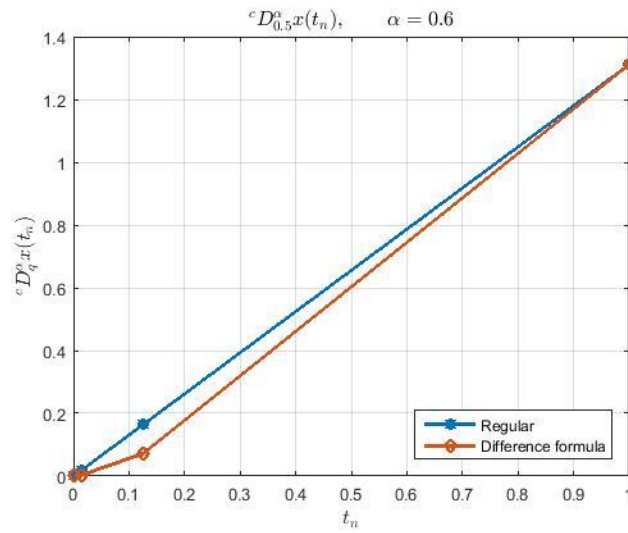
مقادیر محاسبه شده برای  ${}^c D_q^\alpha x(t_n)$  از رابطه (۵۳) با استفاده از روابط (۱) و (۲)، بدون استفاده از رابطه تفاضلی، در حالت عادی، به منظور مقایسه سرعت رابطه تفاضلی معرفی شده، نیز محاسبه شده‌اند که در جداول ۱ و ۲ قابل مشاهده هستند شکل‌های ۱، ۲ و ۳ نتایج جدول ۲ در مقایسه روش عادی و رابطه تفاضلی را نشان می‌دهند.

جدول ۱. نتایج عددی و خطاها به ازای  $q = 2/3$  و  $N = 10$  در مثال ۱.

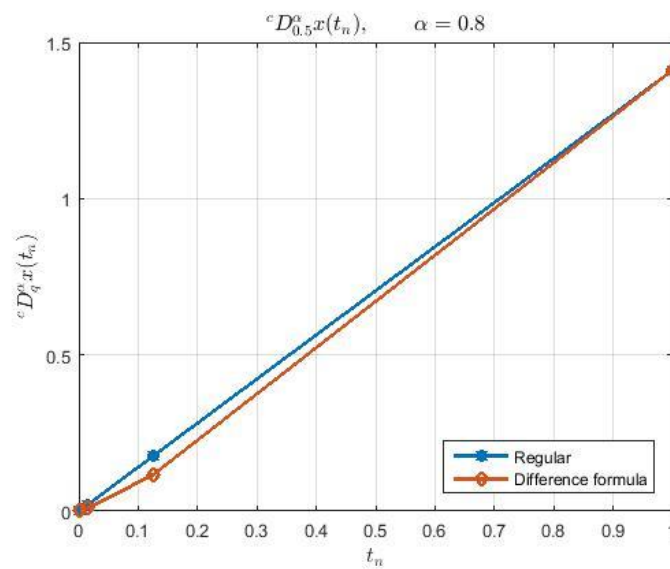
$\alpha$	$t_n$	$\Delta_q^\alpha x(t_n)$	${}^c D_q^\alpha x(t_n)$	$E_q^\alpha(t_n)$	${}^c D_q^\alpha x(t_n)$
		با استفاده از رابطه تفاضلی			در حالت عادی
۰,۲	$t_2$	$3,26319 \times 10^{-3}$	$3,30387 \times 10^{-3}$	$4,06816 \times 10^{-5}$	$3,15752 \times 10^{-2}$
	$t_8$	$2,95000 \times 10^{-2}$	$2,95064 \times 10^{-2}$	$6,37672 \times 10^{-6}$	$1,36055 \times 10^{-1}$
	$t_N$	1,13432	1,13432	$5,02805 \times 10^{-7}$	1,12077
۰,۶	$t_2$	$3,09565 \times 10^{-2}$	$3,15469 \times 10^{-2}$	$3,64605 \times 10^{-4}$	$4,15045 \times 10^{-2}$
	$t_8$	$1,35765 \times 10^{-1}$	$1,35796 \times 10^{-1}$	$2,79151 \times 10^{-5}$	$1,72082 \times 10^{-1}$
	$t_N$	1,54680	1,54680	$9,29393 \times 10^{-7}$	1,69894
۰,۸	$t_2$	$1,46995 \times 10^{-2}$	$1,50641 \times 10^{-2}$	$5,90440 \times 10^{-4}$	$4,68423 \times 10^{-2}$
	$t_8$	$8,26760 \times 10^{-2}$	$8,27039 \times 10^{-2}$	$3,05119 \times 10^{-5}$	$1,89991 \times 10^{-1}$
	$t_N$	1,41307	1,41307	$6,57513 \times 10^{-7}$	1,53303



شکل ۱. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  ${}^c D_q^\alpha x(t_n)$  برای  $\alpha = 0,2$  در مثال ۱



شکل ۲. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  ${}^c D_{0.5}^{\alpha} x(t_n)$  برای  $\alpha = 0.6$  در مثال ۱



شکل ۳. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  ${}^c D_{0.5}^{\alpha} x(t_n)$  برای  $\alpha = 0.8$  در مثال ۱

جدول ۲. نتایج عددی و خطاها به ازای  $q = 1/2$  و  $N = 10$  در مثال ۱.

$\alpha$	$t_n$	$\Delta_q^\alpha x(t_n)$	${}^c D_q^\alpha x(t_n)$	$E_q^\alpha(t_n)$	${}^c D_q^\alpha x(t_n)$
		با استفاده از رابطه تفاضلی			در حالت عادی
۰,۲	$t_1$	$1,46467 \times 10^{-5}$	$1,39207 \times 10^{-5}$	$7,25979 \times 10^{-7}$	$1,78346 \times 10^{-3}$
	$t_4$	$6,18445 \times 10^{-4}$	$6,18415 \times 10^{-5}$	$2,96073 \times 10^{-8}$	$1,68463 \times 10^{-2}$
	$t_7$	$2,61134 \times 10^{-2}$	$2,61134 \times 10^{-2}$	$2,30151 \times 10^{-9}$	$1,37444 \times 10^{-1}$
	$t_N$	۱,۱۰۲۶۲	۱,۱۰۲۶۲	$1,88455 \times 10^{-10}$	۱,۱۰۲۲۳
۰,۶	$t_1$	$1,74949 \times 10^{-4}$	$2,11262 \times 10^{-4}$	$3,63180 \times 10^{-5}$	$2,17219 \times 10^{-3}$
	$t_4$	$3,88258 \times 10^{-3}$	$3,88291 \times 10^{-3}$	$3,32206 \times 10^{-7}$	$2,00974 \times 10^{-2}$
	$t_7$	$7,13467 \times 10^{-2}$	$7,13467 \times 10^{-2}$	$1,08623 \times 10^{-8}$	$1,63555 \times 10^{-1}$
	$t_N$	۱,۳۱۱۶۲	۱,۳۱۱۶۲	$3,85586 \times 10^{-10}$	۱,۳۱۱۲۸
۰,۸	$t_1$	$5,95878 \times 10^{-4}$	$7,91374 \times 10^{-4}$	$1,95496 \times 10^{-4}$	$2,37098 \times 10^{-3}$
	$t_4$	$9,59540 \times 10^{-3}$	$9,59599 \times 10^{-3}$	$5,87836 \times 10^{-7}$	$2,16573 \times 10^{-2}$
	$t_7$	$1,16358 \times 10^{-1}$	$1,16358 \times 10^{-1}$	$1,24069 \times 10^{-8}$	$1,75977 \times 10^{-1}$
	$t_N$	۱,۴۱۰۹۳	۱,۴۱۰۹۳	$2,89842 \times 10^{-10}$	۱,۴۱۰۵۴

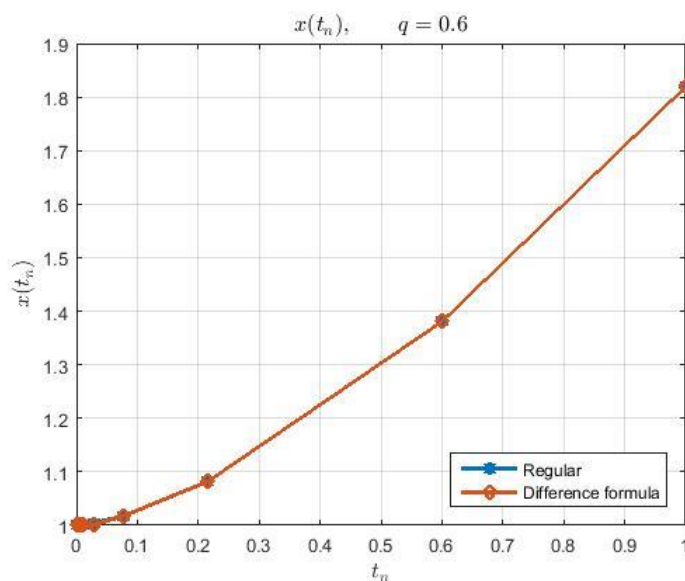
مثال ۲. در این مثال از الگوی متفاوت (۴۲) برای حل معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری خطی

$${}^c D_q^{1/2} x(t) = t, \quad x(0) = 1 \quad (54)$$

برای  $0 < t \leq 1$  استفاده می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب دقیق این معادله عبارت است از

$$x(t) = \frac{t^{3/2}}{\Gamma_q(5/2)} + 1.$$

نتایج عددی این مثال در جدول ۳ ارائه شده‌اند. همان‌طور که از نتایج استخراج می‌شود، روش عددی بسیار دقیق و کارآمد است. شکل ۴ نتایج جدول ۳ در مقایسه روش عادی و رابطه تفاضلی را نشان می‌دهد.



شکل ۴. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  $x(t_n)$  در مثال ۲

جدول ۳. نتایج عددی مسأله (۵۴) در مثال ۲ به ازای  $q = 3/5$  و  $N = 20$

$t_n = q^{N-n}$	$x^n$	$x(t_n)$	$ x(t_n) - x^n $	$x(t_n)$
	با استفاده از رابطه تفاضلی			در حالت عادی
$(3/5)^{19}$	۱,۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰	$۴,۴۴۸۴۹ \times 10^{-8}$	۱,۰۰۰۰۰
$(3/5)^{17}$	۱,۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰	$۲,۲۹۴۷۱ \times 10^{-8}$	۱,۰۰۰۰۰
$(3/5)^{15}$	۱,۰۰۰۰۱	۱,۰۰۰۰۱	$۱,۳۲۱۲۹ \times 10^{-8}$	۱,۰۰۰۰۱
$(3/5)^{13}$	۱,۰۰۰۰۴	۱,۰۰۰۰۴	$۷,۸۱۹۸۲ \times 10^{-9}$	۱,۰۰۰۰۴
$(3/5)^{11}$	۱,۰۰۰۱۸	۱,۰۰۰۱۸	$۴,۶۶۹۳۹ \times 10^{-9}$	۱,۰۰۰۱۸
$(3/5)^9$	۱,۰۰۰۸۳	۱,۰۰۰۸۳	$۲,۷۹۶۸۴ \times 10^{-9}$	۱,۰۰۰۸۳
$(3/5)^7$	۱,۰۰۰۸۴	۱,۰۰۰۸۴	$۱,۶۷۷۰۷ \times 10^{-9}$	۱,۰۰۳۸۳
$(3/5)^5$	۱,۰۱۷۷۶	۱,۰۱۷۷۶	$۱,۰۰۶۰۲ \times 10^{-9}$	۱,۰۱۷۷۵
$(3/5)^3$	۱,۰۸۲۲۲	۱,۰۸۲۲۲	$۶,۰۳۵۶۴ \times 10^{-10}$	۱,۰۸۲۲۱
$(3/5)^1$	۱,۳۸۰۶۳	۱,۳۸۰۶۳	$۳,۶۲۱۲۸ \times 10^{-10}$	۱,۳۸۰۶۲
$(3/5)^0$	۱,۸۱۸۹۸	۱,۸۱۸۹۸	$۲,۸۰۵۰۲ \times 10^{-10}$	۱,۸۱۸۹۷

مقادیر محاسبه شده برای  $x(t_n)$  از رابطه (۵۴) با استفاده از روابط (۱) و (۲)، بدون استفاده از رابطه تفاضلی، در حالت عادی، به منظور مقایسه سرعت رابطه تفاضلی در مثال ۲، نیز محاسبه شده‌اند که در جداول ۳ قابل مشاهده هستند.

مثال ۳. در این مثال مجدداً از الگوی تفاضلی (۴۲) برای حل معادله دیفرانسیل  $q$ -کسری غیر خطی

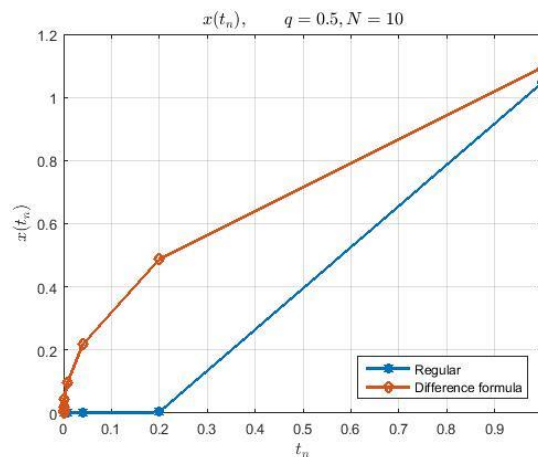
$${}^c D_q^{1/3} x(t) = t^{-3/2} x^2(t), \quad x(0) = 0.0001 \quad (55)$$

برای  $0 < t \leq 1$  استفاده می‌کنیم. جواب دقیق معادله عبارت است از

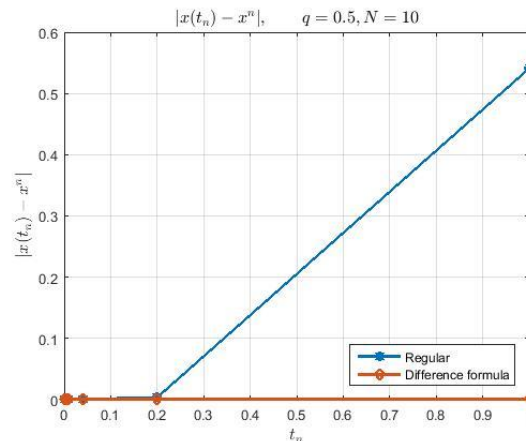
$$x(t) = \frac{\Gamma_q(13/6)t^{7/6}}{\Gamma_q(11/6)} + 0.0001.$$

نتایج عددی این معادله در جدول ۴ قابل مشاهده است. به منظور مقایسه بهتر، نتایج جواب تکراری  $\hat{x}^n$  نیز در جدول ۴ ارائه شده‌اند. یادآوری می‌شود که این جواب تکراری با استفاده از روش تکراری روی معادله انتگرالی که هم ارز معادله (۵۵) است به دست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود جواب تفاضل خیلی بهتر از جواب تکراری، به ویژه در نقاط نزدیک به  $t_N$  است.

جدول شماره ۵ مقادیر محاسبه شده در مثال ۳ برای معادله (۵۵) ارائه شده است. مقادیر محاسبه شده بدون استفاده از رابطه تفاضلی و با استفاده از  $\Gamma_q(\alpha)$  از روابط (۱) و (۲)، در حالت عادی، به منظور مقایسه سرعت رابطه تفاضلی در این مثال قابل مشاهده هستند. شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نتایج جداول ۴ و ۵ در مقایسه روش عادی و رابطه تفاضلی را نشان می‌دهند.



شکل ۵. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  $x(t_n)$  در مثال ۳



شکل ۶. مقایسه محاسبات عادی و رابطه تفاضلی برای  $|x(t_n) - x^n|$  در مثال ۳



جدول ۴. نتایج عددی مسأله (۵۵) در مثال ۴ به ازای  $q = 1/2$  و  $N = 10$ . با استفاده از رابطه تفاضلی

$t_n = q^{N-n}$	$x(t_n)$	$\hat{x}^n$	$x^n$	$ x(t_n) - \hat{x}^n $	$ x(t_n) - x^n $
$(1/2)^9$	$8.55896 \times 10^{-4}$	$1.07045 \times 10^{-4}$	$6.20246 \times 10^{-4}$	$7.48751 \times 10^{-4}$	$2.35550 \times 10^{-4}$
$(1/2)^8$	$1.79670 \times 10^{-3}$	$1.02899 \times 10^{-4}$	$1.64993 \times 10^{-3}$	$1.69380 \times 10^{-3}$	$1.46778 \times 10^{-4}$
$(1/2)^7$	$3.90897 \times 10^{-3}$	$1.01251 \times 10^{-4}$	$3.74731 \times 10^{-3}$	$3.80772 \times 10^{-3}$	$1.61662 \times 10^{-4}$
$(1/2)^6$	$8.65085 \times 10^{-3}$	$1.00549 \times 10^{-4}$	$8.49387 \times 10^{-3}$	$8.55030 \times 10^{-3}$	$1.56980 \times 10^{-4}$
$(1/2)^5$	$1.92960 \times 10^{-2}$	$1.00243 \times 10^{-4}$	$1.91388 \times 10^{-2}$	$1.19196 \times 10^{-2}$	$1.57196 \times 10^{-4}$
$(1/2)^4$	$4.31936 \times 10^{-2}$	$1.00108 \times 10^{-4}$	$4.30367 \times 10^{-2}$	$4.30935 \times 10^{-2}$	$1.56873 \times 10^{-4}$
$(1/2)^3$	$9.68418 \times 10^{-2}$	$1.00048 \times 10^{-4}$	$9.66850 \times 10^{-2}$	$9.67418 \times 10^{-2}$	$1.56815 \times 10^{-4}$
$(1/2)^2$	$2.17278 \times 10^{-1}$	$1.00021 \times 10^{-4}$	$2.17121 \times 10^{-1}$	$2.17178 \times 10^{-1}$	$1.56776 \times 10^{-4}$
$(1/2)^1$	$4.87648 \times 10^{-1}$	$1.00010 \times 10^{-4}$	$4.87492 \times 10^{-1}$	$4.87548 \times 10^{-1}$	$1.55986 \times 10^{-4}$
$(1/2)^0$	$1.09461$	$1.00004 \times 10^{-4}$	$1.09445$	$1.09451$	$1.57029 \times 10^{-4}$

جدول ۵. نتایج عددی مسأله (۵۵) در مثال ۴ به ازای  $q = 1/2$  و  $N = 10$ . در حالت عادی

$t_n = q^{N-n}$	$x(t_n)$	$x^n$	$ x(t_n) - x^n $
$(1/2)^9$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$0.00000$
$(1/2)^8$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$1.00000 \times 10^{-10}$	$9.99990 \times 10^{-6}$
$(1/2)^7$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$1.00000 \times 10^{-15}$	$1.00000 \times 10^{-5}$
$(1/2)^6$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$1.00000 \times 10^{-20}$	$1.00000 \times 10^{-5}$
$(1/2)^5$	$1.00000 \times 10^{-5}$	$1.00000 \times 10^{-25}$	$1.00000 \times 10^{-5}$
$(1/2)^4$	$1.00002 \times 10^{-5}$	$1.00010 \times 10^{-30}$	$1.00002 \times 10^{-5}$
$(1/2)^3$	$1.00480 \times 10^{-5}$	$1.03406 \times 10^{-35}$	$1.00480 \times 10^{-5}$
$(1/2)^2$	$2.34060 \times 10^{-5}$	$9.00775 \times 10^{-38}$	$2.34060 \times 10^{-5}$
$(1/2)^1$	$3.75709 \times 10^{-3}$	$1.49164 \times 10^{-22}$	$3.75709 \times 10^{-3}$
$(1/2)^0$	$1.04735$	$1.58829$	$5.40942 \times 10^{-1}$

### نتیجه گیری

همان طور که در مقدمه اشاره شد معادلات دیفرانسیل  $q$ -کسری و کاربردهای آنها یکی از موضوعات مورد علاقه و قابل توجه در شاخه های مختلف علوم و تکنولوژی می باشد. لذا یافتن راه حل مناسب و یا تقریب مد نظر خواهد بود. از این رو روش های عددی که دقت بیشتر داشته و در تعداد مراحل کمتری پاسخ مطلوب یا تقریبی را ارائه می دهند مفید خواهند بود. در این پژوهش ما سعی کرده ایم روشی که نسبت به  $q$ -حسابان کسری عادی سریعتر می باشد را در یک معادله تفاضلی بیان کنیم. این موضوع در مثال ها و نتایج حاصل در جداول با مقایسه آنها، قابل مشاهده است.

## References

۱. احمدخانلو، ا.، وجود و یگانگی جوابهای مثبت نوعی از مسأله مقدار مرزی شامل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری، پژوهش‌های ریاضی، جلد ۳، (۱۳۹۶) شماره ۱، ۱-۱۰.
۲. میرزایی، ف.، حدادیان‌نژاد یوسفی، ا.، استفاده از ماتریسهای عملیاتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری، پژوهش‌های ریاضی، جلد ۲، (۱۳۹۵) شماره ۲، ۶۵-۸۰.
3. Abdeljawad, T., Baleanu, D., "Caputo  $q$ -fractional initial value problems and a  $q$ -analogue Mittag-Leffler function", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (2011) 4682-4688.
4. Adams, C.R., "The general theory of a class of linear partial  $q$ -difference equations", Trans. Amer. Math. Soc., 26 (1924) 283-312.
5. Agawal, R.P., "Certain fractional  $q$ -integrals and  $q$ -derivatives", Proc. Camb. Phil. Soc. 66 (1969) 365-370.
6. Ahmad, B., Etemad, S., Etefagh, M., Rezapour, Sh., "On the existence of solutions for fractional  $q$ -difference inclusions with  $q$ -antiperiodic boundary conditions", Bulletin mathematiques de la Societe des sciences mathematiques de Roumanie, 59(107) (2016) no. 2, 119-134.
7. Ahmad, B., Nieto, J.J., Alsaedi, A., Al-Hutami, H., "Existence of solutions for nonlinear fractional  $q$ -difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions", Journal of the Franklin Institute, 351 (2014) 2890-2909.
8. Ahmad, B., Ntouyas, S.K., "Existence of solutions for nonlinear fractional  $q$ -difference inclusions with nonlocal Robin (Separated) Conditions", Mediterranean Journal of Mathematics, 10 (2013) 133-151.
9. Ahmad, B., Ntouyas, S.K., Purnaras, I.K., "Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional  $q$ -difference equations", Adv. Diff. Eq. 140 (2012) 140-154.
10. Aktuglu, H., Ozarslan, M.A., "On the solvability of Caputo  $q$ -fractional boundary value problem involving  $p$ -Laplacian operator", Abstr. Appl. Anal. 2013 (2013) 1-8.
11. Al-Salam, W.A., "Some fractional  $q$ -integrals and  $q$ -derivatives", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 15 (1966) 135-140.

12. Almeida, R., Martins, N., "Existence results for fractional  $q$ -difference equations of order  $\alpha \in (2,3)$  with three-point boundary conditions", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 19 (2014) 1675-1685.
13. Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., "Special Functions", Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
14. Annaby, M.H., Mansour, Z.S., " $q$ -fractional Calculuse and Equations", Springer Heidelberg, New York, 2012.
15. Askey, R., "The  $q$ -gamma and  $q$ -beta functions", *Appl. Anal.* 8 (1978) 125-141.
16. Atici, F.M., Eloe, P.W., "Fractional  $q$ -calculus on a time scale", *J. Math. Phys.* 14 (2007) 341-352.
17. Balkani, N., Rezapour, Sh., Haghi, R.H., "Approximate solutions for a fractional  $q$ -integro-differential equation", *Journal of Mathematical Extention*, 13 (2019), no. 3, 109-119.
18. Chen, H.Q., Kang, S.G., Kong, L.L., "Existence of three positive solutions for a class of boundary value problems of Caputo fractional  $q$ -difference equation", *Discr. Dyn. Nat. Soc.* 2 (2018) 1-9.
19. Etemad, S., Etefagh, M., Rezapour, Sh., "On the existence of solutions for nonlinear fractional  $q$ -difference equations with  $q$ -integral boundary conditions", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 8, (2015) no. 2, 265-285.
20. Gauchman, H., "Integral Inequalities in  $q$ -Calculus", *Computers & Mathematics with Applications*, 47, (2004) no. 2, 281-300.
21. Goodrich, C., Peterson, A. C., "Discrete Fractional Calculus", Springer International Publishing, Switzerland (2015).
22. Hedayati, V., Samei, M. E., "Positive solutions of fractional differential equation with two pieces in chain interval and simultaneous Dirichlet boundary conditions", *Boundary Value Problems*, 2019 (2019) 141.
23. Jackson, F.H., "On  $q$ -functions and a certain difference operator", *Trans. Roy. Soc. Edinb.* 46 (1908) 64-72.
24. Jackson, F.H., "On  $q$ -definite integrals", *Quart. J. Pure Appl. Math.* 41 (1910) 193-203.

25. Jarad, F., Abdeljawad, T., Baleanu, D., "Stability of  $q$ -fractional non-autonomous systems", *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 14 (2013) 780-784.
26. Kac, V., and Cheung, P., "Quantum Calculus", Springer Verlag, New York, 2002.
27. Kalvandi, V., Samei, M.E., "New stability results for a sum-type fractional  $q$ -integro-differential equation", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 12, (2019) no.2, 201-209.
28. Ntouyas, S.K., Samei, M.E., "Existence and uniqueness of solutions for multi-term fractional  $q$ -integro-differential equations via quantum calculus", *Advances in Difference Equations*, 2019 (2019) 475.
29. Rahimkhani, P., Ordokhani, Y., Babolian, E., "Application of fractional-order Bernoulli functions for solving fractional Riccati differential equation", *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* 8 (2017) No. 2, 277-292. doi: 10.22075/ijnaa.2017.1476.1379
30. Rahimkhani, P., Ordokhani, Y., Babolian, E., "Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications", *Applied Mathematical Modelling* 40 (2016) No. 17, 8087-8107. doi: 10.1016/j.apm.2016.06.026
31. Rajkovic, Predrag M., Marinkovic, Sladhana D., Stankovic, Miomir S., "Fractional integrals and derivatives in  $q$ -calculus", *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1 (2007) no. 1, 311-323.
32. Rajkovic, P.M., Marinkovic, S.D., Stankovic, M. S., "On  $q$ -analogues of Caputo derivative and Mittag-Leffler function", *Fract. Calc. Appl. Anal.* 10 (2007) 359-373.
33. Rajkovic, P.M., Stankovic, M.S., Marinkovic, S.D., "Mean value theorems in  $q$ -calculus", *Matematicki Vesnik* 54 (2002) 171-178.
34. Sabermahani, S., Ordokhani, Y., Yousefi, S.A., "Fractional-order general Lagrange scaling functions and their applications ", *BIT Numerical Mathematics* 60 (2020) 101-128. doi: 10.1007/s10543-019-00769-0
35. Sabermahani, S., Ordokhani, Y., Yousefi, S.A., "Numerical approach based on fractional-order Lagrange polynomials for solving class of fractional differential equations", *Comp. Appl. Math.* 37 (2018) 3846-3868. doi: 10.1007/s40314-017-0547-5
36. Salahshour, S., Ahmadian, A., Chan, C.S., "Successive approximation method for Caputo  $q$ -fractional IVPs", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 24 (2015) 153-158.

37. Samei, M.E., Hedayati, V., Rezapour, Sh., "Existence results for a fraction hybrid differential inclusion with Caputo-Hadamard type fractional derivative", *Advances in Difference Equations*, 2019 (2019) 163.
38. Samei, M.E., Khalilzadeh Ranjbar, G., "Some theorems of existence of solutions for fractional hybrid  $q$ -difference inclusion", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 12 (2019) no.1, 63-76.
39. Samei, M.E., Khalilzadeh Ranbarm Gh., "Existence of solutions for a class of Caputo fractional  $q$ -difference inclusion on multifunctions by computational results", *Kragujevac Journal of Mathematics*, 45 (2021) no. 4, 543-570.
40. Samei, M.E., Khalilzadeh Ranbarm Gh., Hedayati, V., "Existence of solutions for equations and inclusions of multi-term fractional  $q$ -integro-differential with non-separated and initial boundary conditions", *Journal of Inequalities and Applications*, 2019 (2019) 273.
41. Tang, Y.C., Zhang, T., "A remark on the  $q$ -fractional differential equations", *Appl. Math. Comput.* 350 (2019) 198-208.
42. Wang, G.T, Sudsutad, W., Zhang, L.H., "Monotone iterative technique for a nonlinear fractional  $q$ -difference equation of Caputo type", *Adv. Differ. Eq.* 1 (2016) 211-222.
43. Wu, G.C., Baleanu, D., "New applications of the variational iteration method from differential equations to  $q$ -fractional difference equations", *Adv. Differ. Eq.* 1 (2013) 21-37.
44. Zhang, T., Tang, Y.C., "A difference method for solving the  $q$ -fractional differential equations", *Appl. Math. Letters*, 98 (2019) 292-299.