(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

حل مسئلهٔ نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم انقباضی

محمد اسلامیان

دانشگاه علم و فناوری مازندران، گروه ریاضی، بهشهر

دریافت ۹۷/۰۱/۰۶ پذیرش ۹۷/۱۱/۱۶

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش تندترین کاهش ترکیبی و الگوریتم چسبندگی، الگوریتم جدیدی را برای حل مسئله نامساوی تغییراتی ارائه می‌دهیم. دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ این الگوریتم، همگرای قوی به عضو مشترک از مجموعه نقاط صفر مشترک خانواده‌ای از عملگرهای قویاً یکنوای معکوس و مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم‌انقباضی است. هم‌چنین نشان می‌دهیم دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ این الگوریتم همگرای قوی به یک جواب مسئله نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای متناهی از عملگرهای شبه ناانبساطی و اکید شبه انقباضی در یک فضای هیلبرت است. در پایان کاربردهایی از این نتایج برای حل مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی به‌منظور یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌های اکید شبه انقباضی در یک فضای هیلبرت، چنان‌که تصویر آن تحت یک عملگر خطی وکراندار در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های ناانبساطی قرار گیرد، ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مسئله نامساوی تغییراتی، نگاشت‌های نیم انقباضی، نقطه ثابت، عملگرهای قویاً یکنوای معکوس.

مقدمه

فرض کنید C یک زیر مجموعه محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H باشد.

اگر $F: H\to H$ عملگری دلخواه باشد. مسئله نامساوی تغییراتی عبارت است از یافتن عضوی مانند $x^* \in C$ به‌طوری‌که

$$\langle F\, x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in C.$$

مجموعه جواب‌های این مسئله با VI(F,C) نمایش داده می‌شود.

در سال‌های اخیر مسئله‌های نامساوی تغییراتی به‌منظور بررسی انواع وسیعی از مسایل برگرفته شده از آنالیز، بهینه‌سازی، اقتصاد و علوم مهندسی استفاده شده است (به‌عنوان نمونه مراجع [۱]، [۲]، [۳] را ببینند).

تعریف ۱. عملگر $F: H\to H$ را پیوسته لیپشیتزی گوییم هرگاه ثابتی مانند $L > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \mathrm{L}\|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in H$$

اگر $L = 1$ عملگرF را ناانبساطی و اگر $0 \leq L < 1$، عملگر F را انقباضی گوییم.

عملگر $F: H\to H$ را یکنوا گوییم هرگاه

$$\langle F(x) - F(y),\ x - y \rangle \geq 0, \qquad \forall\, x, y \in H.$$

*نویسنده مسئول mhmdeslamian@gmail.com

عملگر $F: H\to H$ را قویاً یکنوا گوییم هرگاه ثابتی مانند $\beta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\langle F(x) - F(y),\ x - y \rangle \geq \beta||x - y||^2, \qquad \forall x, y \in H.$$

عملگر $F: H\to H$ را قویاً یکنوای معکوس گوییم هرگاه ثابتی مانند $\beta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\langle F(x) - F(y),\ x - y \rangle \geq \beta||F(x) - F(y)||^2, \qquad \forall x, y \in H.$$

توجه داریم هر عملگر قویاً یکنوای معکوس، عملگری یکنوا و پیوسته لیپشیتزی است. هم‌چنین متذکر می‌شویم که عملگرهای قویاً یکنوای معکوسی موجودند به‌طوری‌که قویاً یکنوا نیست [۴].

اگر $T: H\to H$ نگاشتی دلخواه باشد، نقطهٔ x را یک نقطهٔ ثابت T گوییم هرگاه $T(x)=x$. توجه داریم مجموعه C در مسئلهٔ نامساوی تغییراتی می‌تواند به‌عنوان مجموعه نقاط ثابت یک عملگر در نظر گرفته شود. با استفاده از این ایده، یامادا مسئلهٔ $VI(F, Fix(T))$ را در نظر گرفت، که عبارت است از یافتن $x^* \in Fix(T)$ به‌طوری‌که

$$\langle F x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in Fix(T).$$

به‌منظور حل این مسئلهٔ، یامادا [۵]، [۶] این الگوریتم را که به الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی شهرت دارد ارائه کرد:

$$x_{n+1} = (I - \mu\alpha_n F)Tx_n$$

که در آن F یک عملگر لیپشیتزی پیوسته و یکنوای قوی و T عملگر نا انبساطی است. تحت بعضی شرایط مناسب روی $\{\alpha_n\}$، یامادا نشان داد که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به جواب منحصر به‌فرد $VI(F, Fix(T))$ است.

در سال های اخیر الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی به‌منظور حل مسئلهٔ نامساوی‌های تغییراتی به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان زیادی بررسی شده است. (به‌عنوان نمونه [۷]-[۱۱] را ببینند).

در سال ۲۰۱۷، تیان و جیانگ [۴] با استفاده از الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی این الگوریتم را برای حل مسئلهٔ $VI(Fix(T), F)$ ارائه دادند:

$$\begin{cases} y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n\, Tx_n \\ x_{n+1} = (I - \mu\alpha_n F)y_n \end{cases}$$

که در آن T نگاشت ناانبساطی و F عملگر قویاً یکنوای معکوس است. آنها همگرایی ضعیف دنبالهٔ مذکور به جواب مسئلهٔ را اثبات کردند.

تعریف ۲. نگاشت $T: H \to H$ را نیم‌انقباضی [۱۲] گوییم، هر گاه ثابتی مانند $\mu \in [0,1)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$||Tx - p||^2 \leq ||x - p||^2 + \mu||Tx - x||^2, \ \ \forall x \in H, \qquad \forall p \in Fix(T)$$

اگر $\mu = 0$، آن‌گاه نگاشت T را شبه ناانبساطی گوییم.

نگاشت $T: H \to H$ را اکید شبه‌انقباضی [۱۳] گوییم، هرگاه ثابتی مانند $\mu \in [0,1)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$||Tx - Ty||^2 \leq ||x - y||^2 + \mu||\,(x - Tx) - (y - Ty)||^2, \ \ \forall x, y \in H,$$

نگاشت‌های نیم‌انقباضی رده وسیعی از نگاشت‌ها مانند نگاشت‌های اکید شبه انقباضی، نگاشت‌های شبه ناانبساطی و نگاشت‌های نا انبساطی را شامل می‌شوند.

در این مقاله با استفاده از روش تندترین کاهش ترکیبی و الگوریتم چسبندگی، الگوریتم جدیدی را برای حل یک خانواده از مسئلهٔ‌های نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم‌انقباضی ارائه

می‌دهیم. هم‌چنین همگرایی قوی دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ این الگوریتم به جواب مسئلهٔ را اثبات می‌کنیم. در پایان کاربردهایی از این نتایج برای حل مسئلهٔ نقطه ثابت مشترک شکافتنی ارائه می‌دهیم.

پیش‌نیازها

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم و لم‌های مقدماتی که در نتایج اصلی این مقاله استفاده می‌شوند، می‌پردازیم.

در سراسر این مقاله H را یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ و نرم $||.||$ در نظر می‌گیریم. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در H و $x \in H$ باشد. همگرایی ضعیف $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی $\{x_n\}$ به x را با $x_n \to x$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از H و $x \in H$ باشد. دراین صورت عضو یکتایی مانند $y \in C$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $z \in C$، $||y-x|| \le ||z-x||$. y را تصویر متریک از x به C می‌نامیم و با $P_C\, x$ نشان می‌دهیم. برای هر $x \in H$ ، $y = P_C x$ اگر و تنها اگر

$$\langle x-y, y-z\rangle \le 0, \qquad \forall\, z \in H.$$

هم‌چنین $P_C: H \to C$ نگاشتی ناانبساطی است و $Fix(P_C) = C$ (برای جزییات [۱۴] را ببینید).

تعریف ۳. اگر $U : H \to H$ نگاشت دلخواه باشد آن‌گاه U-I را نیم‌بسته در صفر گوییم هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در H با شرایط $x_n \rightharpoonup x$ و $\lim_{n\to\infty} ||Ux_n - x_n|| = 0$ داشته باشیم $x = Ux$.

لم ۱. [۱۵]: فرض کنید $U : H \to H$، نگاشتی β- اکید شبه‌انقباضی باشد. در این صورت I-U در صفر نیم‌بسته است.

لم ۲. [۱۶]: اگر $U : H \to H$ نگاشت نیم‌انقباضی باشد. آن‌گاه مجموعه نقاط ثابت U، محدب و بسته است.

لم ۳. [۱۷]: اگر $U : H \to H$ نگاشت μ- نیم انقباضی باشد آنگاه برای هر $x \in H$ و $y \in Fix(U)$

$$\langle x-Ux,\ \ y-Ux\rangle \le \frac{1+\mu}{2}\|x-Ux\|^2 .$$

تعریف ۴. نگاشت $T: H \to H$ را نگاشت میانگینی گوییم، هرگاه ثابتی مانند $\alpha \in (0,1)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$T = (1-\alpha)I + \alpha\, S,$$

که در آن $I: H \to H$ نگاشت همانی و $S: H \to H$ نگاشت ناانبساطی است.

لم ۴. [۱۸]: فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T: H \to H$ نگاشتی دلخواه باشد. در این‌صورت

الف) ناانبساطی است اگر و تنها اگر $I - T$ نگاشت $\frac{1}{2}$- قویاً یکنوای معکوس باشد.

ب) اگر T نگاشت β- قویاً یکنوای معکوس باشد، آن‌گاه برای هر $\alpha>0$ نگاشت αT، $\frac{\beta}{\alpha}$- قویاً یکنوای معکوس است.

ج) برای $\alpha \in (0,1)$، T نگاشت α- میانگینی است اگر و تنها اگر $I - T$ نگاشت $\frac{1}{2\alpha}$- قویاً یکنوای معکوس باشد.

لم ۵. [۱۹]: فرض کنید $\{a_n\}$یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌طوری‌که

$$a_{n+1} \le (1 - \eta_n)\, a_n + \eta_n\, \delta_n \qquad n\ge 0,$$

که در آن $\{\eta_n\}$ یک دنباله در $(0,1)$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \infty$.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n \delta_n| < \infty$ یا $\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n \le 0$.

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

لم ۶. [۲۰]: اگر $\{s_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{N}$، زیردنباله‌ای مانند $\{n_i\}$ از $\{n\}$ موجود باشد که $S_{n_i} < S_{n_i+1}$. آن‌گاه زیردنباله نا نزولی مانند $\{\tau(n)\} \subset \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $\tau(n) \to \infty$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ (و به اندازهٔ کافی بزرگ)

$$s_{\tau(n)} \leq s_{\tau(n)+1}, \qquad s_n \leq s_{\tau(n)+1}$$

در حقیقت

$$\tau(n) = \max\{k \leq n : s_k < s_{k+1}\}.$$

لم ۷. [۱۴]: اگر H یک فضای هیلبرت باشد. آن‌گاه برای هر $x, y \in H$ و $\alpha \in (0,1)$ داریم

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2.$$

نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از روش تندترین کاهش تقریبی و الگوریتم چسبندگی الگوریتم جدیدی را برای حل مسئلهٔ نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت خانواده ای متناهی از عملگرهای نیم انقباضی ارائه می دهیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$، $F_i : H\to H$ نگاشت‌های k_i - قویاً یکنوای معکوس و $T_i : H\to H$ نگاشت‌های ζ_i –نیم‌انقباضی باشند به‌طوری‌که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. هم‌چنین فرض کنید $\Omega = (\bigcap_{i=1}^m Fix(T_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^m F_i^{-1}(0)) \neq \emptyset$. فرض کنید f یک خود نگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2}(T_i - I)x_n \\ y_{n,1} = \left(I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1\right)z_n, \\ y_{n,2} = \left(I - \mu^{(2)}\beta_n^{(2)}F_2\right)y_{n,1}, \\ \quad \ldots \\ y_{n,m} = \left(I - \mu^{(m)}\beta_n^{(m)}F_m\right)y_{n,m-1} \\ x_{n,1} = \xi_n f(y_{n,m}) + (1-\xi_n)y_{n,m} \qquad \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{۱}$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}, \{\xi_n\}$ و $\{\beta_n^{(i)}\}$ در این شرایط صدق کنند:

الف) $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$, $\{\xi_n\} \subset (0,1)$،

ب) $\{\mu^{(i)}\beta_n^i\} \subset [a_i, b_i] \subset (0, 2k_i)$،

ج) $\lim_{n\to\infty} inf\, a_n^{(i)} > 0$ و $\sum_{i=1}^m a_n^{(i)} = 1$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است. هم‌چنین برای هر $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$، x^* متعلق به $VI(\bigcap_{i=1}^m Fix(T_i), F_j)$ است.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است. توجه داریم که P_Ω (f) یک نگاشت انقباضی از H به H است. بنابر اصل انقباض باناخ (هر خودنگاشت انقباضی روی یک فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت منحصربه فرد است) عضو منحصر به فردی مانند $x^* \in H$ موجود است به‌طوری‌که $x^* = P_\Omega(f)x^*$.

از آن‌جاکه برای هر $i \in \{1, 2,\ldots, m\}$ ، T_i نگاشت‌هایی ζ_i- نیم‌انقباضی هستند، با توجه به محدب بودن تابع $\|.\|^2$ و لم ۳ داریم:

$$\begin{aligned}\|z_n - x^*\|^2 &= \|x_n + \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \tfrac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)\, x_n - x^*\|^2\\
&\le \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \|x_n + \tfrac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)\, x_n - x^*\|^2\\
&= \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \Big(\|x_n - x^*\|^2 + \left(\tfrac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2\\
&\quad +2\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)\langle x_n - x^*, (T_i - I)x_n\rangle\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \Big(\|x_n - x^*\|^2 + \left(\tfrac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2\\
&\quad +2\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)\|(T_i - I)x_n\|^2\Big)\\
&\le \|x_n - x^*\|^2 - \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \left(\tfrac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2. \qquad (۲)\end{aligned}$$

از آن‌جاکه F_1 نگاشتی k_1- قویاً یکنوای معکوس است با توجه به فرض (ب) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\|y_{n,1} - x^*\|^2 &= \|\left(I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1\right)z_n - \left(I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1\right) x^*\|^2\\
&\le \|z_n - x^*\|^2 + (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)})^2 \|F_1 z_n - F_1 x^*\|^2\\
&\quad - 2\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} \langle F_1 z_n - F_1 x^*,\ z_n - x^*\rangle\\
&\le \|z_n - x^*\|^2 + (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)})^2 \|F_1 z_n - F_1 x^*\|^2\\
&\quad - 2\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} k_1\|F_1 z_n - F_1 x^*\|^2\\
&\le \|z_n - x^*\|^2 + \left(\mu^{(1)}\beta_n^{(1)}\right)(\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} - 2k_1) \|F_1 z_n - F_1 x^*\|^2\\
&\le \|z_n - x^*\|^2 .\end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای هر $i \in \{2,3,4,\ldots,m\}$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\|y_{n,i} - x^*\|^2 &\le \|y_{n,i-1} - x^*\|^2 + \mu^{(i)}\beta_n^{(i)} (\mu^{(i)}\beta_n^{(i)} - 2k_i)\|F_i\, y_{n,i-1} - F_i x^*\|^2\\
&\le \|z_n - x^*\|^2 .\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| &= \|\xi_n\left(f(y_{n,m}) - x^*\right) + (1-\xi_n)\left(y_{n,m} - x^*\right)\|\\
&\le \xi_n\|\left(f(y_{n,m}) - x^*\right)\| + (1-\xi_n)\|\left(y_{n,m} - x^*\right)\|\\
&\le \xi_n\|\left(f(y_{n,m}) - f(x^*)\right)\| + \xi_n\|f(x^*) - x^*\|\\
&\quad +(1-\xi_n)\|\left(y_{n,m} - x^*\right)\|\\
&\le \xi_n b\|\left(y_{n,m} - x^*\right)\| + \xi_n\|f(x^*) - x^*\|\\
&\quad +(1-\xi_n)\|\left(y_{n,m} - x^*\right)\|\end{aligned}$$

$$\leq \left(1-\xi_n(1-b)\right)\|(x_n-x^*)\|+\xi_n\left\|f(x^*)-x^*\right\|.$$

با استفاده از استقرا ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\left\|x_n-x^*\right\| \leq \max\left\{\left\|x_0-x^*\right\|, \frac{1}{1-b}\left\|f(x^*)-x^*\right\|\right\},$$

بنابراین $\{x_n\}$ کراندار است. علاوه براین $\{z_n\}$, $\{y_{n,i}\}$ و $\{f(y_{n,m})\}$ نیز کراندار است. از آن‌جاکه F_1 یک نگاشت k_1- قویاً یکنوای معکوس است با توجه به لم ۴ می‌توان $y_{n,1}$ را به‌صورت

$$y_{n,1}= \left(1-\gamma_n^{(1)}\right)z_n+\gamma_n^{(1)}V_n^{(1)}z_n$$

نوشت که در آن $\gamma_n^{(1)}=\frac{\mu^{(1)}\beta_n^{(1)}}{2k_1}$ و $V_n^{(1)}$ نگاشتی ناانبساطی از H به H است. با استفاده از لم ۷ داریم:

$$\begin{aligned}\left\|y_{n,1}-x^*\right\|^2 &= \left\|\left(1-\gamma_n^1\right)z_n+\gamma_n^1V_n^{(1)}z_n-x^*\right\|^2\\ &\leq \left(1-\gamma_n^1\right)\|z_n-x^*\|^2+\gamma_n^1\|V_n^1z_n-x^*\|^2\\ &\quad -\gamma_n^1(1-\gamma_n^1)\left\|V_n^{(1)}z_n-z_n\right\|^2\\ &\leq \|z_n-x^*\|^2-\gamma_n^1(1-\gamma_n^1)\left\|V_n^{(1)}z_n-z_n\right\|^2. \end{aligned} \tag{۳}$$

با روند مشابه برای $i=2,3,\ldots,m$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left\|y_{n,i}-x^*\right\|^2 \leq \left\|y_{n,i-1}-x^*\right\|^2-\gamma_n^i\left(1-\gamma_n^i\right)\left\|V_n^{(i)}y_{n,i-1}-y_{n,i-1}\right\|^2 \tag{۴}$$

که در آن $\gamma_n^{(i)}=\frac{\mu^{(i)}\beta_n^{(i)}}{2k_i}$ و $V_n^{(i)}$ها نگاشت‌هایی ناانبساطی از H به H هستند.

با استفاده از نامساوی‌های (۲)، (۳)، (۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}||x_{n+1}-x^*||^2 &= \left|\left|\xi_n\left(f\left(y_{n,m}\right)-x^*\right)+(1-\xi_n)(y_{n,m}-x^*)\right|\right|^2\\ &\leq {\xi_n}^2||(f(y_{n,m})-x^*)||^2+(1-\xi_n)^2||y_{n,m}-x^*||^2\\ &\quad +2\xi_n(1-\xi_n)||f(y_{n,m})-x^*)||\ \ ||y_{n,m}-x^*||\\ &\leq {\xi_n}^2||(f(y_{n,m})-x^*)||^2+2\xi_n(1-\xi_n)||f(y_{n,m})-x^*)||\ \ ||y_{n,m}-x^*||\\ &\quad +(1-\xi_n)^2||x_n-x^*||^2-(1-\xi_n)^2\gamma_n^1(1-\gamma_n^1)||V_n^1z_n-z_n||^2\\ &\quad -\cdots-(1-\xi_n)^2\gamma_n^m(1-\gamma_n^m)||V_n^my_{n,m-1}-y_{n,m-1}||^2\\ &\quad -(1-\xi_n)^2\sum_{i=1}^m a_n^i\frac{(1-\zeta_i)^2}{4}||(T_i-I)x_n||^2. \end{aligned} \tag{۵}$$

بنابراین برای هر $i\in\{1,2,\ldots m\}$, داریم:

$$\begin{aligned}(1-\xi_n)^2\sum_{i=1}^m a_n^i\frac{(1-\zeta_i)^2}{4}||(T_i-I)x_n||^2 &\leq ||x_n-x^*||^2-||x_{n+1}-x^*||^2\\ &\quad +2\xi_n(1-\xi_n)||f(y_{n,m})-x^*)||\,||x_n-x^*||^2+\xi_n^2||f(y_{n,m})-x^*)||^2. \end{aligned} \tag{۶}$$

حال نشان می دهیم $x_n \to x^*$. برای اثبات دوحالت را درنظر می‌گیریم:

۱. فرض کنید $\{||x_n - x^*||\}$ دنباله یکنوا باشد. زیرا $\{||x_n - x^*||\}$ کراندار است بنابراین همگراست. از آن‌جاکه $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ و با توجه به کراندار بودن $\{f(y_{n,m})\}$ و $\{x_n\}$ از نامساوی (۶) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\xi_n)^2a_n^i\frac{(1-\zeta_i)^2}{4}||(T_i-I)x_n||^2=0.$$

با توجه به این فرض که $\lim_n\inf\, a_n^{(i)}>0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|T_i x_n - x_n\right|\right| = 0\,, \qquad i \in \{1,2,\ldots m\}. \tag{۷}$$

با استفاده از بحث مشابه، از نامساوی (۵) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|V_n^1 z_n - z_n\right|\right| = 0, \tag{۸}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|V_n^i y_{n,i-1} - y_{n,i-1}\right|\right| = 0, \quad 2 \le i \le m\,. \tag{۹}$$

با استفاده از رابطهٔ (۷) و (۸) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|y_{n,1} - z_n\right|\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left|z_n - x_n\right|\right| = 0. \tag{۱۰}$$

هم چنین از (۹) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|y_{n,i} - y_{n,i-1}\right|\right| = 0 \quad 2 \le i \le m. \tag{۱۱}$$

بنابراین با توجه به الگوریتم (۱) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|x_{n+1} - x_n\right|\right| = 0. \tag{۱۲}$$

حال نشان می‌دهیم:

$$\limsup_{n\to\infty}\langle (I-f)x^*, x^* - x_n\rangle \le 0.$$

برای اثبات، زیردنباله$\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم‌که:

$$\lim_{i\to\infty}\left\langle (I-f)x^*, x^* - x_{n_i}\right\rangle = \limsup_{n\to\infty}\langle (I-f)x^*, x^* - x_n\rangle.$$

زیرا$\{x_{n_i}\}$کراندار است زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_{i_j}}\}$ از $\{x_{n_i}\}$ موجود است که همگرای ضعیف به $\hat{x}$ است. بدون این که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد$\{x_{n_i}\}$همگرای ضعیف به $\hat{x}$ است. با توجه به این‌که $\lim_{n\to\infty}\left|\left|x_n - z_n\right|\right| = 0$ داریم$\{z_{n_i}\}$ همگرای ضعیف به $\hat{x}$ است. از آن‌جاکه $\{\beta_{n_i}\}$ کراندار است زیردنباله‌ای مانند$\{\beta_{n_{i_j}}\}$ موجود است به‌طوری‌که همگرا به β^1 است و $\mu^1\beta^1 \subset [a_1, b_1]$. چون F_1 قویاً یکنوای معکوس و $\{z_{n_{i_j}}\}$کراندار است نتیجه می‌شود که $\{F_1 z_{n_{i_j}}\}$ کراندار است. از این رو،

$$||(I - \mu^{(1)}\beta_{n_{i_j}}^{(1)}F_1)z_{n_{i_j}} - \left(I - \mu^{(1)}\beta^{(1)}F_1\right)z_{n_{i_j}}||$$

زیرا $\lim_{n\to\infty}\left|\left|y_{n,1} - z_n\right|\right| = 0$ داریم:

$$\left\|\left(I - \mu^{(1)}\beta_{n_{i_j}}^{(1)}F_1\right)z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\right\| \to 0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\left\|(I - \mu^{(1)}\beta^{(1)}F_1)z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\right\| &\le \left\|\left(I - \mu^{(1)}\beta_{n_{i_j}}^{(1)}F_1\right)z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\right\| \\ &+ \left\|(I - \mu^{(1)}\beta_{n_{i_j}}^{(1)}F_1)z_{n_{i_j}} - (I - \mu^{(1)}\beta^{(1)}F_1)z_{n_{i_j}}\right\| \to 0.\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱ و لم ۴ نتیجه می‌شود:

$$\hat{x} \in Fix(I - \mu^1\beta^1F_1) = F_1^{-1}(0)\,.$$

با بحث مشابهی داریم:

$$\hat{x} \in F_i^{-1}(0), \quad \forall i \in \{2,3,\dots,m\}.$$

از رابطۀ (۷) و با توجه به نیم‌بسته بودن $T_i - I$ داریم $\hat{x} \epsilon \bigcap_{i=1}^{m} Fix\ (T_i)$ بنابراین $\hat{x} \epsilon \Omega$. از آن‌جاکه $\hat{x} \in \Omega$ و $x^* = P_\Omega(f)x^*$ نتیجه می‌شود:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_n\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_{n_i}\rangle$$

با استفاده از رابطۀ

$$||x + y||^2 \le ||x||^2 + 2\langle y, x+y\rangle \quad \forall x, y \in H,$$

داریم:

$$||x_{n+1} - x^*||^2 \le ||(1-\xi_n)(y_{n,m} - x^*)||^2 + 2\xi_n \langle f(y_{n,m}) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle$$

$$\begin{aligned}
&\le (1-\xi_n)^2 ||(y_{n,m} - x^*)||^2 + 2\xi_n \langle f(y_{n,m}) - f(x^*),\ x_{n+1} - x^*\rangle \\
&\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle \\
&\le (1-\xi_n)^2 ||(y_{n,m} - x^*)||^2 + 2b\xi_n \|x_n - x^*\| \|x_{n+1} - x^*\| \\
&\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle \\
&\le (1-\xi_n)^2 ||(y_{n,m} - x^*)||^2 + b\xi_n (||\ x_n - x^*\ ||^2 + ||\ x_{n+1} - x^*||^{\ 2}) \\
&\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle \\
&\le ((1-\xi_n)^2 + b\xi_n)\ ||(x_n - x^*)||^2 + b\xi_n (||\ x_{n+1} - x^*||^{\ 2}) \\
&\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle.
\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند

$$\left|\left|x_{n+1} - x^*\right|\right|^2 \le \frac{1 - 2\xi_n + (\xi_n)^2 + b\xi_n}{1 - b\xi_n} ||x_n - x^*||^2$$
$$+ \frac{2\xi_n}{1 - b\xi_n} \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle$$

$$= \left(1 - \frac{2(1-b)\xi_n}{1 - \xi_n b}\right) ||x_n - x^*||^2 + \frac{(\xi_n)^2}{1 - \xi_n b} ||x_n - x^*||^2$$

$$+ \frac{2\xi_n}{1 - \xi_n b} \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^*\rangle$$

$$\le \left(1 - \frac{2(1-b)\xi_n}{1 - \xi_n b}\right) ||x_n - x^*||^2$$

$$+(\frac{2(1-b)\xi_n}{1-\xi_n b})(\frac{(\xi_n)M}{2(1-b)}+\left(\frac{1}{1-b}\langle f(x^*)-x^*,\ \ x_{n+1}-x^*\rangle\right)\right)$$

$$=(1-\sigma_n)||x_n-x^*||^2+\sigma_n\eta_n,$$

که در آن $\sigma_n=\frac{2(1-b)\xi_n}{1-\xi_n b}$ و $M=\sup||x_n-x^*||^2 : n\geq 0\}$ و

$$\eta_n=\frac{(\xi_n)M}{2(1-b)}+\frac{1}{1-b}\langle f(x^*)-x^*,\ \ x_{n+1}-x^*\rangle.$$

مشاهده می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n=\infty$ و $\sigma_n\ \to 0$ همچنین $\limsup_{n\to\infty}\eta_n\leq 0$. بنابر لم ۶ دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به x^* است.

۲. فرض کنید $\{||x_n - x^*||\}$ دنبالهٔ یکنوا نباشد. دنبالهٔ $\{\tau(\text{n})\}$ از اعداد صحیح را برای هر $n\geq n_0$ (برای یک n_0 به اندازهٔ کافی بزرگ) بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau(\text{n})=\max\{\,k\in\mathbb{N}\,;k\leq n:||x_k\ -\ x^*||\ <||x_{k+1}\ -\ x^*||\,\}.$$

پس $\tau(\text{n})$ دنباله‌ای نانزولی و $\tau(\text{n})\to\infty$ هنگامی که $n\to\infty$. برای هر $n\geq n_0$ داریم:

$$||x_{\tau(\text{n})}\ -\ x^*||\ <||x_{\tau(\text{n})+1}\ -\ x^*||\,.$$

حال از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود:

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2-\ \ \|x_n-x^*\|^2\ \leq\ \ (\xi_n)^2\ \ \left\|f(y_{n,m})-x^*\right\|^2$$
$$+((\xi_n)^2-2\xi_n)||x_n-x^*||^2\qquad+\ \ 2\xi_n(1-\xi_n)\left\|f(y_{n,m})-x^*\right\|||x_n-x^*||\,.$$

از آن‌جاکه $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ و با توجه به کرانداری $\{\text{f}(y_{n,m})\}$ و $\{x_n\}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}(||x_{\tau(\text{n})+1}-x^*||^2-||x_{\tau(\text{n})}-x^*||^2)=0.$$

با بحث مشابه آن‌چه در حالت ۱ بیان شد داریم:

$$||x_{\tau(\text{n})+1}-x^*||^2\leq(1-\sigma_{\tau(\text{n})})||x_{\tau(\text{n})}-x^*||^2+\sigma_{\tau(\text{n})}\eta_{\tau(\text{n})}\,,$$

که در آن $\limsup_{n\to\infty}\ \eta_{\tau(\text{n})}\leq 0$. از آن‌جاکه $||x_{\tau(\text{n})}-x^*||\leq||x_{\tau(\text{n})+1}-x^*||$ داریم:

$$\sigma_{\tau(\text{n})}||x_{\tau(\text{n})}-x^*||^2\leq\ \sigma_{\tau(\text{n})}\eta_{\tau(\text{n})}$$

با توجه به این که $\sigma_{\tau(\text{n})}>0$ نتیجه می‌گیریم که

$$||x_{\tau(\text{n})}-x^*||^2\leq\eta_{\tau(\text{n})}$$

از $\lim\ \sup_{n\to\infty}\ \eta_{\tau(\text{n})}\leq 0$ داریم $\lim_{n\to\infty}||x_{\tau(\text{n})}\ -\ x^*||=0$. حال با استفاده از لم ۶ داریم:

$$0\leq||x_\text{n}\ -\ x^*||\ \leq\ \max\{||x_{\tau(\text{n})}\ -\ x^*||\,,||\,x_n-x^*\,||\}\leq||x_{\tau(\text{n})+1}\ -\ x^*||\,.$$

بنابراین $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^*=P_\Omega(f)\,x^*$ است.

نتیجهٔ ۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت، $F:H\to H$ یک نگاشت k- قویاً یکنوای معکوس و

$$T_i:H\to H \text{ برای } i\in\{1,2,\ldots,m\},$$

نگاشت‌های ζ_i - اکید شبه انقباضی باشند. همچنین فرض کنید:

$$\Omega=\bigcap_{i=1}^{m}Fix\,(T_i)\cap\ F^{-1}(0)\neq\emptyset..$$

فرض کنید f یک خودنگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_n) + (1-\xi_n)y_n \qquad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$, $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$ در این شرایط صدق کنند:

الف) $\{\xi_n\} \subset (0,1)$,$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$.

ب) $\{\mu\beta_n\} \subset [a,b] \subset (0,2k)$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \inf a_n^{(i)} > 0$ و $\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} = 1$.

آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است. هم‌چنین x^* متعلق به $VI(\bigcap_{i=1}^m Fix\,(T_i), F)$ است.

برهان: توجه داریم که هر نگاشت اکید شبه‌انقباضی، نیم‌انقباضی است. هم‌چنین بااستفاده از لم ۱ داریم $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. حال با استفاده از قضیهٔ ۱، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید..

نتیجهٔ ۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت، $F : H\to H$ یک نگاشت k- قویاً یکنوای معکوس و $T_i : H\to H$ برای $i \in \{1, 2,\dots,m\}$، نگاشت‌های شبه ناانبساطی باشند به‌طوری‌که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. هم‌چنین فرض کنید:

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m Fix\,(T_i) \cap F^{-1}(0) \neq \emptyset..$$

فرض کنید $\{x_n\}$ دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $x_0, \zeta \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} (T_i - I)x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n \\ x_{n+1} = \xi_n \zeta + (1-\xi_n)y_n \qquad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$, $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$ در این شرایط صدق کنند:

الف) $\{\xi_n\} \subset (0,1)$,$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$.

ب) $\{\mu\beta_n\} \subset [a,b] \subset (0,2k)$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \inf a_n^{(i)} > 0$ و $\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} = 1$.

آن‌گاه دنباله$\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است .هم‌چنین x^* متعلق به $VI(\bigcap_{i=1}^m Fix\,(T_i), F)$ است.

برهان: توجه داریم که هر نگاشت شبه ناانیساطی، نگاشتی $0-$نیم انقباضی است. حال با قراردادن $f(x) = \zeta$ در قضیهٔ ۱، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

مثال عددی: فضای هیلبرت $H=R$ با متریک معمولی را درنظر می‌گیریم. توابع $F : R\to R$، $T_i : R\to R$ ($i=1,2$) و $f : R\to R$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \frac{x}{2}, \quad T_1(x) = \frac{-5x}{3}, \quad T_2(x) = \frac{2x}{3} \quad f(x) = \frac{x}{3}$$

در این صورت F نگاشت ۲-یکنوای قویاً معکوس، T_1 نگاشتی $\frac{1}{4}$ - اکید شبه انقباضی، T_2 نگاشتی غیرانبساطی و f یک نگاشت انقباضی با ثابت $\frac{1}{3}$ است. توجه داریم که

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} Fix\,(T_i) \cap F^{-1}(0) = \{0\}..$$

قرار می‌دهیم:

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = \frac{1}{2} \quad . \quad \mu\beta_n = 2\left(\frac{2n+1}{4n+4}\right), \quad \xi_n = \frac{1}{n+3}$$

در این‌صورت $\{a_n^{(i)}\}$, $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$در شرایط قضیۀ ۱ صدق می‌کنند. در نتیجه

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2}(T_i - I)x_n = x_n - \frac{1}{2}\, x_n - \frac{1}{12}\, x_n = \frac{5}{12}\, x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n = \left(\frac{2n+3}{4n+4}\right) z_n \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_n) + (1-\xi_n)y_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+3}\right)y_n + \left(\frac{n+2}{n+3}\right)y_n = \left(\frac{3n+7}{3n+9}\right)y_n \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

بنابراین

$$x_{n+1} = \left(\frac{3n+7}{3n+9}\right)\left(\frac{2n+3}{4n+4}\right)\left(\frac{5}{12}\right) x_n, \quad \forall n \geq 0$$

مشاهده می‌کنیم که دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به 0 است.

مسئلۀ نقطه ثابت مشترک شکافتنی

در این بخش کاربردی از قضیۀ اصلی را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید H وK فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. اگر $\{C_i\}_{i=1}^{s}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای H و $\{Q_i\}_{i=1}^{r}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای K باشند. مسئلۀ امکان‌پذیری شکافتنی چندمجموعه‌ای عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{j=1}^{s} C_i$ به‌طوری‌که برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$، $A_i(x^*) \in Q_i$.

مسئلۀ امکان‌پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای، به‌وسیلۀ سنسور و همکارانش [۲۱]، [۲۲] معرفی شد. این مسایل کاربردهای زیادی درحل مسایل بهینه‌سازی و پردازش تصاویر وغیره دارند [۲۳]. در سال‌های اخیر این مسئلۀ به‌وسیلۀ ریاضی‌دانان زیادی بررسی شده است (به‌عنوان نمونه [۲۴] و [۲۵]).

در سال ۲۰۰۹ سنسور و سگال [۲۶] مسئلۀ نقطه ثابت مشترک شکافتنی را به‌عنوان تعمیمی از مسئلۀ امکان‌پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای بررسی کردند.

فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. اگر $T_i: H \to H$ و $S_i: K \to K$ نگاشت‌های غیرخطی باشند. مسئلۀ نقطه ثابت مشترک شکافتنی عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{j=1}^{r} Fix(T_j)$ به‌طوری‌که برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$، $A_i(x^*) \in Fix(S_i)$.

قضیهٔ ۲. فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. فرض کنید $T_i: H \to H$ نگاشت‌های ζ_i- اکید شبه انقباضی و $S_i: K \to K$ نگاشت‌های ناانبساطی باشند. هم‌چنین

$$\Omega = \left\{ x^* \in \bigcap_{j=1}^{m} Fix(T_i): \quad A_i(x^*) \in Fix(S_i), \quad i = 1,2,\dots,m \right\} \neq \emptyset.$$

فرض کنید f یک خودنگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2} \ (T_i - I)\, x_n \\ y_{n,1} = \left(I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)} (A_1{}^* (I - S_1) A_1)\right) z_n, \\ y_{n,2} = \left(I - \mu^{(2)}\beta_n^{(2)} \ (A_2{}^* (I - S_2) A_2)\ \right) y_{n,1}, \\ \qquad \dots \\ y_{n,m} = \left(I - \mu^{(m)}\beta_n^{(m)} (A_m{}^* (I - S_m) A_m)\right) y_{n,m-1} \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_{n,m}) + (1 - \xi_n) y_{n,m} \qquad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

باشد که در آن $A_i{}^*$ عملگر الحاق A_i است. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$، $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n^{(i)}\}$ در این شرایط صدق کنند:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$ ، $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$، $\{\xi_n\} \subset (0,1)$.

ب) $\{\mu^{(i)}\beta_n^i\} \subset [a_i, b_i] \subset \left(0, \ \frac{1}{\|A_i\|^2}\right)$.

ج) $\lim_{n\to\infty} inf\, a_n^{(i)} > 0$ و $\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} = 1$.

آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است

برهان: توجه داریم که هر نگاشت اکید شبه‌انقباضی، نیم‌انقباضی است. هم‌چنین بااستفاده از لم ۱ می‌دانیم که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. قرار می دهیم $F_i = A_i{}^* (I - S_i) A_i$ پس عملگر F_i، $\frac{1}{2\|A_i\|^2}$ - قویاً یکنوای معکوس است (برای جزییات [۲۴] را ببینید). هم‌چنین $A_i(z) \in Fix(S_i)$ اگر وتنها اگر $z \in F_i^{-1}(0)$. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۱، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

منابع

1. Kinderlehrer D., Stampacchia G., "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications", Academic Press, New York (1980).
2. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications", Springer, NewYork (1985).

3. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J., Lovisek J., "Solution of Variational Inequalities in Mechanics", Springer, New York (1988).
4. Tian M., Jiang B. N., "Weak convergence theorem for zero points of inverse strongly monotone mapping and fixed points of nonexpansive mapping in Hilbert space", Optimization. 66 (2017) 1689-1698.
5. I. Yamada I., "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problems over the intersection of fixed points sets of nonexpansive mapping", In: D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich (eds). Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Application", pp. 473-504, North-Holland, Amsterdam (2001).
6. Yamada I., Ogura N., "Hybrid steepest descent method for variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings", Numer. Funct. Anal. Optim., 25 (2004) 619-655.
7. Ceng L.C., Ansari Q. H., Yao J. C., "Mann- type steepest-descent and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces", Numer. Funct. Anal. Optim., 29 (2008) 987-1033.
8. Zhou H. Y., Wang P. A., "A simpler explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces", J. Optim. Theory Appl., 161 (2014) 716-727.
9. Cegielski A., "Application of quasi-nonexpansive operators to an iterative method for variational inequality", SIAM J. OPTIM., 25 (2015) 2165-2181.
10. Eslamian M., "Common solutions to a system of variational inequalities over the set of common fixed points of demi-contractive operators", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 355 (2017) 1168-1177.
11. Gibali A., Reich S., Zalas R., "Outer approximation methods for solving variational inequalities in Hilbert space", Optimization. 66, (2017) 417-437.
12. Hicks T. L., Kubicek J. R., "On the Mann iterative process in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 59 (1977) 498-504.
13. Browder F. E., PetryshynV.W., "Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 20 (1967) 197-228.
14. Takahashi W., "Introduction to Nonlinear and Convex Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama (2009).
15. Marino G., Xu H.K., "Weak and strong convergence theorems for strictly pseudo-contractions in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) 336-349.
16. Chidume C. E., Maruster, "Iterative methods for the computation of fixed points of demicontractive mappings", J. Comput. Appl. Math., 234 (2010) 861-882.

17. Moudafi A., "The split common fixed point problem for demicontractive mappings", Inverse Problem, 26, 055007 (2010).
18. Ceng L. C., Ansari Q. H., Yao J. C., "Some iterative method for finding fixed points and solving constrained convex minimization problems", Numer. Algebra Control Optim. 1 (2011) 341-359.
19. Xu H.K., "Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings", Bull. Austral. Math. Soc., 65 (2002) 109-113.
20. Mainge P. E., "Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization", Set-Valued Anal., 16 (2008) 899-912.
21. Censor Y., Elfving T., "A multiprojection algorithms using Bragman projection in a product space", Numer. Algorithm, 8 (1994) 221-239.
22. Censor Y., Elfving T., Kopf N., Bortfeld T., "The multiple-sets split feasibility problem and its applications", Inverse Problems, 21 (2005) 2071-2084.
23. Byrne C., "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction", Inverse Problems, 20 (2004) 103-120.
24. Takahashi W., Xu H. K., Yao J. C., "Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces", Set-Valued Var. Anal., 23 (2015) 205-221.
25. Eslamian M., "Split common fixed point and common null point problem", Math. Meth. Appl Sci., 40 (2017) 7410-7424.
26. Censor Y., Segal A., "The split common fixed point problem for directed operators", J. Convex Anal., 16 (2009) 587-600.