

## آزمون همبستگی فضایی خطاهای مدل رگرسیون داده‌های پانلی

سارا ساسانی، محسن محمدزاده\*؛ دانشگاه تربیت مدرس، گروه آمار

پذیرش ۹۵/۲/۱۲

دریافت ۹۴/۷/۳

### چکیده

برای بررسی همبستگی فضایی خطاها در مدل پانلی فرضیه‌ها و آزمون‌های متنوعی عرضه شده است. در این مقاله ضمن معرفی داده‌های پانلی فضایی، وجود همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی از طریق یک آزمون ضریب لاگرانژ توأم، که به‌طور هم‌زمان وجود آن‌ها را آزمون می‌کند، بررسی می‌شود. برای این منظور آماره آزمون توأم ضریب لاگرانژ و توزیع مجانبی آن معرفی می‌شود. یک بررسی شبیه‌سازی به‌منظور بررسی توان و اندازه این آزمون برای فرضیه‌های توأم انجام شده است. سپس نحوه کاربست این مدل در مثالی کاربردی با بررسی همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی موجود در داده‌های صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو نشان داده می‌شود. در انتها نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** آزمون ضریب لاگرانژ، مدل رگرسیون پانلی، داده‌های پانلی فضایی.

### مقدمه

مدل‌های وابسته فضایی (محمدزاده، ۱۳۹۴) شامل اثرات متقابل فضایی (خودهمبستگی فضایی) و ساختار فضایی (عدم تجانس فضایی) عمدتاً به داده‌های متقاطع مربوط می‌شود. عدم تجانس در واحدهای متقاطع معمولاً با یک مدل مؤلفه خطا مدل‌بندی می‌شوند. تلفیق داده‌های سری زمانی و داده‌های مقطعی می‌تواند اطلاعات سودمندی را برای تخمین مدل‌های رگرسیونی فراهم آورد. یک سری زمانی عبارت است از سری داده‌هایی که از مشاهده پدیده‌ای در طول زمان به‌دست آمده‌اند، مانند قیمت سهام در روزهای متوالی. داده‌های مقطعی داده‌هایی هستند که از واحدهای مشخص در یک زمان معین جمع‌آوری شده‌اند، مانند میزان آلودگی هوا در مناطق مختلف کشور در روزی معین. داده‌های پانلی، داده‌هایی هستند که از واحدهای مشخص در زمان‌های متوالی به‌دست آمده‌اند. در حالت خاصی که این واحدها موقعیت‌های فضایی باشند و داده‌ها از واحدی به واحد دیگر در طول زمان مستقل باشند، به آن‌ها داده‌های پانلی فضایی گویند. مانند میزان آلودگی هوا در طول زمان در مناطق مختلف کشور، متوسط درآمد شرکت‌های مختلف طی سال‌های متوالی. با افزایش دسترسی به داده‌های پانلی، تحلیل مدل‌های رگرسیونی داده‌های پانلی فضایی و کاربرد این مدل‌ها در تحقیقات اقتصاد تجربی به‌طور افزاینده‌ای آنسلین و همکاران (۲۰۰۸)، والپ-مارتینکاس (۲۰۱۱) و بالتاجی و همکاران (۲۰۱۳) استفاده کرده‌اند. در این مدل‌ها برای همبستگی‌های فضایی و ناهم‌گونی واحدهای آزمایشی که اثرات تصادفی را منجر می‌شود، آزمون‌های مختلفی ارائه شده است. براچ و پاگان (۱۹۸۰) شرح مؤثری از کاربردهای آزمون ضریب لاگرانژ<sup>۱</sup> (LM) در مدل‌های اقتصادسنجی فضایی را منتشر کردند. آنسلین و همکاران (۱۹۹۶) آزمون‌های LM را با طرح فرضیه‌های توأم، شرطی و حاشیه‌ای برای بررسی همبستگی تأخیر فضایی در مدل

رگرسیون با خطاهای همبسته فضایی ارائه دادند. همچنین بالتاجی و همکاران (۲۰۰۳)، بالتاجی و لویو (۲۰۰۸) و بالتاجی و یانگ (۲۰۱۳) به‌طور گسترده آزمون‌های LM را برای پارامترهای فضایی ارائه دادند. در این مقاله به بررسی وجود همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی مدل‌های رگرسیونی داده‌های پانلی که بالتاجی (۲۰۰۵) ارائه کرده است، با آزمون LM توأم که به‌طور هم‌زمان وجود این دو مؤلفه را آزمون می‌کند، پرداخته می‌شود. در محاسبه این آماره آزمون، فقط به برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی مقید پارامترها نیاز است. در بخش ۲ مدل رگرسیون داده‌های پانلی فضایی و آزمون LM توأم عرضه می‌شوند. در بخش ۳ به بررسی شبیه‌سازی و بررسی هم‌زمان وجود همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی و برازش مدل رگرسیونی مناسب به داده‌های صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو پرداخته می‌شود. در بخش ۴ بحث و نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه می‌شود.

### مدل و آماره آزمون

مدل رگرسیون داده‌های پانلی به‌صورت (۱) را در نظر می‌گیریم:

$$y_{ti} = X'_{ti}\beta + u_{ti} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

(بالتاجی، ۲۰۰۵) که در آن  $y_{ti}$  مشاهده متغیر  $i$ ام و دوره زمانی  $t$ ام،  $X_{ti}$  بردار  $k \times 1$  متغیرهای تبیینی،  $\beta$  بردار پارامترهای رگرسیونی و  $u_{ti}$  عبارت خطا است. آنسلین (۱۹۸۸) صورت برداری (۱) با اثرات تصادفی و خطاهای خود همبسته فضایی را به‌صورت (۲) و (۳) بیان کرد:

$$u_t = \mu + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = \lambda w \varepsilon_t + v_t \quad (3)$$

که در آن  $u'_t = (u_{t1}, \dots, u_{tN})$ ،  $\varepsilon'_t = (\varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tN})$  و  $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  بردار اثرات تصادفی است و فرض می‌شود  $\mu' \sim N(0, \sigma_\mu^2)$  ضریب اتورگرسیون فضایی با قید  $|\lambda| < 1$ ،  $v'_t = (v_{t1}, \dots, v_{tN})$  و دارای توزیع  $v'_t \sim N(0, \sigma_v^2)$  و به‌ازای هر  $t$  و  $i$  درایه  $\{v_{ti}\}$  از درایه  $\{\mu_i\}$  مستقل است.  $W$  ماتریس وزن فضایی  $N \times N$  با درایه‌های قطر اصلی صفر است، به‌طوری‌که ماتریس  $(I_N - \lambda W)$  برای همه  $|\lambda| < 1$  ناکسین<sup>۱</sup> است. مدل (۳) را می‌توان بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$\varepsilon_t = (I_N - \lambda W)^{-1} v_t = B^{-1} v_t \quad (4)$$

که در آن  $B = I_N - \lambda W$  و  $I_N$  ماتریس همانی  $N \times N$  است. فرم ماتریسی مدل (۱) بدین‌صورت است:

$$y = X\beta + u \quad (5)$$

که در آن  $y$  بردار مشاهدات  $NT \times 1$ ،  $X$  ماتریس طرح  $NT \times K$ ،  $\beta$  بردار ضرایب  $k \times 1$  و  $u$  بردار خطای  $NT \times 1$  است. همچنین فرض می‌شود  $X$  ماتریس پرتبه ستونی است و قدرمطلق درایه‌های آن به‌طور مجانبی کراندار هستند. مدل (۲) را نیز می‌توان به‌صورت برداری (۶) نوشت:

$$u = (j_T \otimes I_N) \mu + (I_T \otimes B^{-1}) v \quad (6)$$

که در آن  $v' = (v'_1, \dots, v'_T)$ ،  $j_T$  بردار  $T \times 1$  با درایه‌های یک،  $I_T$  ماتریس همانی  $T \times T$  و  $\otimes$  نماد ضرب کروئکر است. در این صورت ماتریس کوواریانس  $u$  بدین‌صورت می‌شود:

1. Nonsingular

$$\Sigma u = \sigma_u^2 (J_T \otimes I_N) + \sigma_v^2 (I_T \otimes (B'B)^{-1}) \quad (۷)$$

که در آن  $J_T$  ماتریس  $T \times T$  با درایه‌های یک است. این ماتریس را می‌توان به صورت (۸) (وانزیک و کاپتین، ۱۹۸۳) نیز نوشت:

$$\Sigma u = \sigma_v^2 [(\bar{J}_T \otimes T \phi I_N + (B'B)^{-1}) + (E_T \otimes (B'B)^{-1})] = \sigma_v^2 \Sigma u \quad (۸)$$

که در آن

$$\Sigma u = (\bar{J}_T \otimes T \phi I_N + (B'B)^{-1}) + (E_T \otimes (B'B)^{-1})$$

$$|\Sigma u| = |T \phi I_N + (B'B)^{-1}| \cdot |(B'B)^{-1}|^{-1}$$

با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی  $u$ ، لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت (۱۰) ارائه می‌شود:

$$\Sigma u^{-1} = \bar{J}_T \otimes (T \phi I_N + (B'B)^{-1})^{-1} + E_T \otimes (B'B) \quad (۹)$$

با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی  $u$ ، لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت (۱۰) ارائه می‌شود:

$$\ell = \frac{-NT}{2} \ln 2\pi\sigma_v^2 - \frac{1}{2} \ln |T \phi I_N + (B'B)^{-1}| + \frac{T-1}{2} \ln |B'B| - \frac{1}{2\sigma_v^2} u' \Sigma u^{-1} u \quad (۱۰)$$

که در آن  $u = y - X\beta$ . آنسلین (۱۹۸۸) آزمون LM را برای حالت خاص  $\lambda = 0$  در این مدل ارائه کرد. در این مقاله آزمون راکه آنسلین ارائه کرده است با به‌دست آوردن آزمون توأم برای همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی تعمیم داده می‌شود.

#### ۱. آزمون LM توأم

فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0: \lambda = 0 \\ H_1: \lambda \text{ حداقل } \sigma_u^2 \text{ یا مخالف صفر است} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. با قرار دادن  $\theta = (\sigma_v^2, \sigma_u^2, \lambda)'$  آماره آزمون LM توأم به صورت  $LM = \tilde{D}'_{\theta} \tilde{J}_{\theta}^{-1} \tilde{D}_{\theta}$  عرضه می‌شود، که در آن  $\tilde{D}_{\theta} = (\frac{\partial \ell}{\partial \theta})(\tilde{\theta})$  بردار  $3 \times 1$  مشتقات جزئی نسبت به هر یک از پارامترهای  $\theta$  است که با برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی مقید، یعنی  $\tilde{\theta}$  جای‌گذاری شده‌اند. همچنین  $\tilde{J} = E[-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'}](\tilde{\theta})$  ماتریس اطلاع  $\theta$  در نقاط  $\tilde{\theta}$  است. تحت فرضیه صفر، ماتریس کوواریانس  $u$  به  $\sigma_v^2 I_{NT}$  کاهش می‌یابد. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی مقید  $\beta$  است،  $\sigma_v^2 = \frac{\tilde{u}' \tilde{u}}{NT}$  و  $\tilde{u} = y - X'\beta_{OLS}$  مانده‌های OLS هستند. هم‌رل و هارتلی (۱۹۷۳) یک فرمول کلی مفید برای به‌دست آوردن  $\tilde{D}_{\theta}$  بدین‌صورت ارائه دادند:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_r} = -\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma_u^{-1} (\frac{\partial \Sigma_u}{\partial \theta_r})] + \frac{1}{2} [u' \Sigma_u^{-1} (\frac{\partial \Sigma_u}{\partial \theta_r}) \Sigma_u^{-1} u], \quad r = 1, 2, 3$$

با توجه به این‌که  $\frac{\partial (B'B)^{-1}}{\partial \lambda} = (B'B)^{-1} (W'B + B'W) (B'B)^{-1}$  می‌توان نشان داد

$$\frac{\partial \Sigma_u}{\partial \sigma_v^2} = I_T \otimes (B'B)^{-1}, \quad \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \sigma_u^2} = J_T \otimes I_N, \quad \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \lambda} = \sigma_v^2 [I_T \otimes (B'B)^{-1} (W'B + B'W) (B'B)^{-1}],$$

تحت فرضیه صفر  $H_0^a$  داریم:

$$\Sigma u^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} I_T \otimes I_N, \quad \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \sigma_v^2} = I_T \otimes I_N, \quad \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \sigma_u^2} = J_T \otimes I_N, \quad \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \lambda} = \sigma_v^2 I_T \otimes (W' + W).$$

بعلاوه چون تحت فرضیه صفر  $B = I_N$  داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_v^2} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1}{\tilde{\sigma}_v^2} I_{NT} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\tilde{u}' \tilde{u}}{\tilde{\sigma}_v^4} \right] = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\mu^2} &= D(\tilde{\sigma}_\mu^2) = \frac{NT}{2\tilde{\sigma}_v^2} \left( \frac{\tilde{u}'(J_T \otimes I_N) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}} - 1 \right), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= D(\tilde{\lambda}) = NT \frac{\tilde{u}'(I_T \otimes W) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\tilde{D}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{D}(\sigma_\mu^2) \\ \tilde{D}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{NT}{2\tilde{\sigma}_v^2} \left( \frac{\tilde{u}'(J_T \otimes I_N) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}} - 1 \right) \\ NT \frac{\tilde{u}'(I_T \otimes W) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}} \end{pmatrix}$$

هارویل (۱۹۷۷)، ماتریس اطلاع را به صورت (۱۱) ارائه کرد:

$$J_{rs} = E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_u^{-1} \left( \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \theta_r} \right) \Sigma_u^{-1} \left( \frac{\partial \Sigma_u}{\partial \theta_s} \right) \right], \quad r, s = 1, 2, 3 \quad (11)$$

با استفاده از (۱۱) درایه‌های ماتریس عبارتند از:

$$\begin{aligned}J_{11} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\sigma_v^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_v^2} (I_T \otimes I_N) \right)^2 \right] = \frac{NT}{2\sigma_v^4} \\ J_{22} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\sigma_\mu^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_v^4} (J_T \otimes I_N) \right)^2 \right] = \frac{NT^2}{2\sigma_v^4} \\ J_{33} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} [I_T \otimes (W + W')^2] = Tb \\ J_{12} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma_v^2 \partial \sigma_\mu^2} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1}{\sigma_v^2} (I_T \otimes I_N) \frac{1}{\sigma_v^2} (J_T \otimes I_N) \right] = \frac{NT}{2\sigma_v^4} \\ J_{13} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma_v^2 \partial \lambda} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1}{\sigma_v^2} (I_T \otimes I_N) (I_T \otimes (W + W')) \right] = 0 \\ J_{23} &= E \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma_\mu^2 \partial \lambda} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1}{\sigma_v^2} (J_T \otimes I_N) (I_T \otimes (W + W')) \right] = 0\end{aligned}$$

که در آن  $b = \text{tr}(W^2 + W'W)$ ،  $\text{tr}(w^2) = \text{tr}(w'^2)$  چون درایه‌های ماتریس قطری  $W$  صفر هستند، در

نتیجه  $J_{13} = J_{23} = 0$  بنابراین ماتریس اطلاع تحت فرضیه صفر عبارتست از:

$$\tilde{J}_\theta = \frac{NT}{2\tilde{\sigma}_v^4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2b\tilde{\sigma}_v^4}{N} \end{pmatrix}$$

و در پی آن آماره آزمون توأم برای فرضیه  $H_0 = \lambda = \sigma_\mu^2 = 0$  عبارت است از:

$$LM_J = \frac{NT}{2(T-1)} G^2 + \frac{N^2 T}{b} H^2 \quad (12)$$

که در آن  $H = \frac{\tilde{u}'(I_T \otimes W) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}}$ ،  $G = \frac{\tilde{u}'(J_T \otimes I_N) \tilde{u}}{\tilde{u}' \tilde{u}} - 1$  و  $b = \text{tr}(W^2 + W'W)$  برآورد کم‌ترین توان دوم

مانده‌ها به روش معمولی (OLS) است. هندا (۱۹۸۵) آماره آزمون LM برای فرضیه‌های یک‌طرفه

$$\begin{cases} H_0: \lambda = \sigma_\mu^2 = 0 \\ H_1: \lambda \text{ یا } \sigma_\mu^2 \text{ بزرگتر از صفر است} \end{cases}$$

را به صورت (۱۳) ارائه کرد:

$$LM^H = \frac{(LM_1 + LM_2)}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

که در آن  $LM_1 = \sqrt{\frac{NT}{2(T-1)}} G$  و  $LM_2 = \sqrt{\frac{N^2 T}{b}} H$  این آماره تحت فرضیه صفر دارای توزیع مجانبی  $N(0,1)$  است. به علاوه  $LM_1$  در (۱۳) می‌تواند مقداری منفی باشد به‌ویژه هنگامی که مقدار واقعی پارامتر  $\sigma_\mu^2$  کوچک و نزدیک به صفر باشد. همچنین  $LM_2$  در (۱۳) می‌تواند مقداری منفی باشد به‌ویژه هنگامی که مقدار واقعی پارامتر  $\lambda$  کوچک و نزدیک به صفر باشد. گوریراکس و همکاران (۱۹۸۲) آماره  $GHM^1$  را بدین صورت ارائه کرده‌اند:

$$\chi_m^2 = \begin{cases} LM_1^2 + LM_2^2 & LM_1 > 0, LM_2 > 0, \\ LM_1^2 & LM_1 > 0, LM_2 \leq 0, \\ LM_2^2 & LM_1 \leq 0, LM_2 > 0, \\ 0 & LM_1 \leq 0, LM_2 \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

که تحت فرضیه صفر دارای توزیع آمیخته کای اسکور به صورت (۱۵) است:

$$\chi_m^2 \sim \frac{1}{4} \chi^2(0) + \frac{1}{2} \chi^2(1) + \frac{1}{4} \chi^2(2) \quad (15)$$

که در آن  $\chi^2(0)$  با احتمال یک مساوی صفر است. وزن‌های  $1/4$ ،  $1/2$  و  $1/4$  با توجه به استقلال مجانبی  $LM_1$  و  $LM_2$  انتخاب شده‌اند. گوریراکس و همکاران (۱۹۸۲) مقادیر بحرانی  $\chi_m^2$  آمیخته را برای  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$  به ترتیب برابر با  $7/289$ ،  $4/321$  و  $2/952$  تعیین کردند.

### بررسی شبیه‌سازی و مثال کاربردی

مدل رگرسیونی پانلی با خطاهای همبسته فضایی بدین صورت در نظر گرفته شده است:

$$y = \alpha j_{NT} + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (16)$$

$$u = (j_T \otimes I_N) \mu + (I_T \otimes (I_N - \lambda W)^{-1}) v \quad (17)$$

که در آن  $j_{NT}$  بردار  $NT$  تایی با درایه‌های یک،  $\alpha = 4$ ،  $\beta_1 = 1$ ،  $\beta_2 = -0.5$ ،  $x_1$ ،  $x_2$  بردارهای  $NT$  تایی متغیرهای مستقل هستند که به ترتیب از توزیع‌های  $x_1 \sim u(-0.5, 0.5)$  و  $x_2 \sim N(0, 1)$  تولید شده‌اند.  $j_T$  بردار  $T$  تایی با درایه‌های یک،  $I_N$  ماتریس همانی  $N$  بعدی،  $I_T$  ماتریس همانی  $T$  بعدی و  $\otimes$  نماد ضرب کرونکر است.  $\mu$  بردار اثرات تصادفی  $N$  تایی است که از توزیع  $\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$  و  $v$  بردار  $NT$  تایی خطاها است که از توزیع  $N(0, 1)$  تولید شده است. ماتریس وزن  $W$  از روش مجاورت استاندارد شده برای هر دو معیار راک و کوئین حاصل شده است. روش مجاورت راک<sup>۲</sup> برای موقعیت‌هایی که مرز مشترک راست، چپ، بالا و پایین با موقعیت تحت بررسی را دارند، تعریف می‌شود (آنسلین و ری، ۱۹۹۱). روش مجاورت کوئین<sup>۳</sup> مشتمل بر هشت موقعیت مجاور به موقعیت تحت بررسی است. در این روش علاوه بر چهار موقعیت مذکور از روش راک، موقعیت‌هایی که دارای رأس مشترک هستند

1. Gouriéroux, Holly and Monfort

2. Rook Contiguity

3. Queen Contiguity

نیز همسایه محسوب می‌شوند (آنسلین و ری، ۱۹۹۱). برای  $\lambda$  ضریب هم‌بستگی خطافضایی دنباله مقادیر ۰ تا ۰/۹ با قدر نسبت ۰/۱ و برای  $\sigma_\mu^2$  واریانس اثرات تصادفی، مقادیر ۰، ۱، ۴، ۹ و ۱۶ در نظر گرفته شده است. همچنین دو مقدار ۲۵ و ۴۹ برای  $N$ ، موقعیت‌های فضایی و ۳ و ۷ برای  $T$  دوره زمانی اختیار شده است. سپس برای هر یک از ۴۰۰ حالت موجود، آزمون‌های LM توأم برای بررسی هم‌بستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی متناظر با فرضیه‌ها، ارائه و به‌منظور بررسی و مقایسه توان و اندازه آزمون‌ها، فراوانی رد فرضیه صفر برای هردو آزمون در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ با ۲۰۰۰ تکرار محاسبه می‌شود.

### ۱۰۳ آزمون‌های LM توأم برای وجود اثرات تصادفی یا هم‌بستگی فضایی خطاها

جداول ۱ و ۲ فراوانی نسبی رد فرضیه  $H_0 = \lambda = \sigma_\mu^2 = 0$  در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ را برای آماره آزمون یک‌طرفه  $LM^H$  در (۱۳) و  $GHM$  در (۱۴) ارائه می‌دهند. نتایج برای  $N = 25, 49$  و  $T = 3, 7$  برای هر دو ماتریس راک و کوئین به‌ازای مقادیر مختلف  $\lambda$  از ۰ تا ۰/۹ با قدر نسبت ۰/۱ و  $\sigma_\mu^2 = 0, 1, 4, 9, 16$  با ۲۰۰۰ تکرار گزارش شده است. جداول نشان می‌دهند که بین اندازه آزمون‌های دو آماره  $LM^H$  و  $GHM$  برای همه مقادیر  $N$  و  $T$  برای هر دو ماتریس وزن راک و کوئین تفاوت قابل ملاحظه‌ای وجود ندارد و همه مقادیر اندازه آزمون‌ها در سطح ۰/۰۵ معنی‌دارند. توان هر دو آزمون برای یک مقدار ثابت  $\lambda$  یا  $\sigma_\mu^2$  با افزایش  $N$  و  $T$  افزایش می‌یابند. به‌عنوان مثال وقتی  $\lambda = 0.3$  و  $\sigma_\mu^2 = 0$  به‌ازای  $N = 25$  و  $T = 3$  با ماتریس وزن کوئین، توان آماره آزمون‌های  $LM^H$  و  $GHM$  به‌ترتیب برابر با ۰/۲۸۰ و ۰/۵۸۹ هستند، در حالی که به‌ازای همان مقادیر  $\lambda$  و  $\sigma_\mu^2$  وقتی  $N = 49$  و  $T = 7$ ، توان این دو آماره به‌ترتیب برابر با ۰/۹۴۳ و ۰/۹۹۷ هستند. برای مقادیر ثابت  $N$  و  $T$  نیز با افزایش  $\lambda$  و  $\sigma_\mu^2$  توان رو به افزایش است. به‌عنوان مثال وقتی  $N = 49$  و  $T = 3$ ، به‌ازای  $\lambda = 0.1$  و  $\sigma_\mu^2 = 1$  با ماتریس وزن راک، توان آماره آزمون‌های  $LM^H$  و  $GHM$  به‌ترتیب ۰/۲۷۱ و ۰/۲۳۹ هستند، در حالی که به‌ازای همان مقادیر  $N$  و  $T$ ، وقتی  $\lambda = 0.5$  و  $\sigma_\mu^2 = 4$ ، توان این دو آماره به‌ترتیب ۰/۸۷۵ و ۰/۹۹۵ هستند. در واقع توان هر دو آزمون برای  $\sigma_\mu^2 \geq 4$  و  $\lambda \geq 0.6$  به‌ویژه هنگامی که  $N$  و  $T$  مقادیر بزرگی دارند، تقریباً یک است. در مقایسه‌ای بین دو آزمون نیز آماره  $GHM$  در حالت کلی، دارای توان بیش‌تری نسبت به آماره  $LM^H$  است. در قیاس بین دو ماتریس وزن، آماره آزمون‌ها با ماتریس وزن کوئین دارای توان بیش‌تری هستند. در حالت کلی نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که آماره آزمون‌های LM متناظر با فرضیه‌های توأم دارای توان بزرگ و اندازه آزمون کوچکی هستند.

### ۲. بررسی عوامل مؤثر بر صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو

به‌منظور پیدا کردن شواهد آماری در تعیین عوامل مؤثر بر صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو داده‌هایی طی ۱۷ سال متوالی از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۸ برای هر یک از کشورهای عضو اکو شامل افغانستان، جمهوری اذربایجان، ایران، قزاقستان، قرقیزستان، پاکستان، تاجیکستان، ترکیه، ترکمنستان و ازبکستان با متغیرهای پاسخ  $Y$  صادرات محصولات کشاورزی،  $X_1$  تولید ناخالص داخلی،  $X_2$  میزان ارز و  $X_3$  جمعیت از سایت بانک جهانی جمع‌آوری شده‌اند. در این زیربخش هم‌بستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی با آزمون‌های LM توأم انجام شده است. مقدار آماره آزمون  $LM^H = 22.009$  با  $p$ -مقدار کمتر از ۰/۰۰۰۱ و مقدار آماره آزمون  $GHM = 1044.069$  با  $p$ -مقدار کمتر از ۰/۰۰۰۱ حاصل شده است. پس فرضیه وجود اثر تصادفی و هم‌بستگی فضایی خطاها معنی‌دار است.

16		9		4		1		.				
G	L	G	L	G	L	G	L	G	L	i	T	N
0.235	0.249	0.233	0.240	0.141	0.154	0.136	0.141	0.037	0.046	.		
0.378	0.375	0.288	0.241	0.179	0.153	0.180	0.150	0.081	0.041	0.1		
0.314	0.379	0.310	0.288	0.429	0.285	0.205	0.186	0.223	0.086	0.2		
0.429	0.360	0.433	0.272	0.429	0.285	0.454	0.168	0.437	0.183	0.3		
0.701	0.389	0.714	0.319	0.703	0.306	0.689	0.304	0.708	0.298	0.4	3	25
0.891	0.466	0.894	0.475	0.891	0.446	0.875	0.460	0.891	0.456	0.5		
0.974	0.651	0.975	0.645	0.979	0.663	0.976	0.642	0.978	0.631	0.6		
0.996	0.824	0.988	0.841	0.997	0.841	0.986	0.826	0.997	0.819	0.7		
0.998	0.952	0.998	0.948	0.999	0.948	0.995	0.950	0.998	0.962	0.8		
0.999	0.995	0.999	0.990	0.999	0.990	0.998	0.995	0.999	0.993	0.9		
0.425	0.421	0.340	0.302	0.254	0.221	0.202	0.101	0.028	0.024	.		
0.666	0.472	0.366	0.374	0.285	0.274	0.148	0.182	0.159	0.072	0.1		
0.530	0.481	0.530	0.429	0.493	0.333	0.504	0.241	0.534	0.277	0.2		
0.855	0.579	0.855	0.470	0.853	0.482	0.843	0.477	0.865	0.476	0.3		
0.983	0.941	0.999	0.763	0.979	0.765	0.993	0.724	0.985	0.761	0.4		
0.999	0.995	0.999	0.938	0.999	0.943	0.999	0.950	0.995	0.954	0.5	7	25
0.999	0.999	0.999	0.995	0.999	0.996	0.999	0.997	0.995	0.993	0.6		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.7		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.8		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.9		
0.615	0.554	0.443	0.448	0.348	0.339	0.242	0.246	0.039	0.053	.		
0.650	0.569	0.490	0.480	0.343	0.379	0.239	0.271	0.133	0.075	0.1		
0.690	0.576	0.510	0.479	0.512	0.397	0.394	0.276	0.404	0.206	0.2		
0.753	0.619	0.756	0.590	0.756	0.499	0.754	0.421	0.762	0.410	0.3		
0.955	0.662	0.959	0.651	0.955	0.672	0.953	0.650	0.947	0.667	0.4		
0.989	0.890	0.968	0.869	0.995	0.875	0.995	0.868	0.994	0.873	0.5	3	49
0.999	0.968	0.999	0.963	0.999	0.963	0.999	0.970	0.999	0.968	0.6		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.989	0.999	0.996	0.996	0.999	0.7		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.8		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.9		
0.647	0.631	0.580	0.525	0.465	0.438	0.470	0.429	0.040	0.044	.		
0.696	0.672	0.596	0.544	0.481	0.453	0.482	0.495	0.272	0.135	0.1		
0.792	0.754	0.793	0.652	0.776	0.464	0.801	0.449	0.77	0.45	0.2		
0.987	0.805	0.826	0.990	0.821	0.988	0.988	0.819	0.997	0.943	0.3		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.4		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.5	7	49
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.6		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.7		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.8		
0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.9		

جدول ۲. فراوانی نسبی رد فرضیه  $H_0 = \lambda = \sigma_\mu^2 = 0$  در ۲۰۰۰ تکرار با ماتریس وزن کوئین

۱۶		۹		۴		۱		۰		$\lambda$	$T$	$\hat{\lambda}$
$G$	$L$	$G$	$L$	$G$	$L$	$G$	$L$	$G$	$L$			
۰,۲۳۵	۰,۲۴۹	۰,۲۳۳	۰,۲۴۰	۰,۱۴۱	۰,۱۵۴	۰,۱۳۶	۰,۱۴۱	۰,۰۴۷	۰,۰۳۷	۰		
۰,۳۷۸	۰,۳۷۵	۰,۲۸۸	۰,۲۴۱	۰,۱۷۹	۰,۱۵۳	۰,۱۸۰	۰,۱۵۰	۰,۰۸۱	۰,۰۴۱	۰,۱		
۰,۳۱۴	۰,۳۷۹	۰,۳۱۰	۰,۲۸۸	۰,۴۲۹	۰,۲۸۵	۰,۲۰۵	۰,۱۸۶	۰,۲۲۳	۰,۰۸۶	۰,۲		
۰,۴۲۹	۰,۳۶۰	۰,۴۳۳	۰,۲۷۲	۰,۴۲۹	۰,۲۸۵	۰,۴۵۴	۰,۱۶۸	۰,۵۸۹	۰,۲۸۰	۰,۳	۲۵	
۰,۷۰۱	۰,۳۸۹	۰,۷۱۴	۰,۳۱۹	۰,۷۰۳	۰,۳۰۶	۰,۶۸۹	۰,۳۰۴	۰,۷۰۸	۰,۲۹۸	۰,۴	۳	
۰,۸۹۱	۰,۴۶۶	۰,۸۹۴	۰,۴۷۵	۰,۸۹۱	۰,۴۴۶	۰,۸۷۵	۰,۴۶۰	۰,۸۹۱	۰,۴۵۶	۰,۵		
۰,۹۷۴	۰,۶۵۱	۰,۹۷۵	۰,۶۴۵	۰,۹۷۹	۰,۶۶۳	۰,۹۷۶	۰,۶۴۲	۰,۹۷۸	۰,۶۳۱	۰,۶		
۰,۹۹۶	۰,۸۲۴	۰,۹۸۸	۰,۸۴۱	۰,۹۹۷	۰,۸۴۱	۰,۹۸۶	۰,۸۲۶	۰,۹۹۷	۰,۸۱۹	۰,۷		
۰,۹۹۸	۰,۹۵۲	۰,۹۹۸	۰,۹۴۸	۰,۹۹۹	۰,۹۴۸	۰,۹۹۵	۰,۹۵۰	۰,۹۹۸	۰,۹۶۲	۰,۸		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۵	۰,۹۹۹	۰,۹۹۰	۰,۹۹۹	۰,۹۹۰	۰,۹۹۸	۰,۹۹۵	۰,۹۹۹	۰,۹۹۳	۰,۹		
۰,۴۲۵	۰,۴۲۱	۰,۳۴۰	۰,۳۰۲	۰,۲۵۴	۰,۲۲۱	۰,۲۰۲	۰,۱۰۱	۰,۰۲۸	۰,۰۲۶	۰		
۰,۴۶۶	۰,۴۷۳	۰,۳۶۶	۰,۳۷۴	۰,۲۸۵	۰,۲۷۴	۰,۱۴۸	۰,۱۸۲	۰,۱۵۹	۰,۰۷۳	۰,۱		
۰,۵۳۰	۰,۴۸۱	۰,۵۳۰	۰,۴۲۹	۰,۴۸۳	۰,۳۳۳	۰,۵۰۴	۰,۲۴۱	۰,۵۳۴	۰,۲۷۷	۰,۲		
۰,۸۵۵	۰,۵۷۹	۰,۸۵۵	۰,۴۷۰	۰,۸۵۳	۰,۴۸۲	۰,۸۴۳	۰,۴۷۷	۰,۸۶۵	۰,۴۷۶	۰,۳		
۰,۹۸۳	۰,۹۴۱	۰,۹۹۹	۰,۷۶۳	۰,۹۷۹	۰,۷۶۵	۰,۹۹۳	۰,۷۲۴	۰,۹۸۵	۰,۷۶۱	۰,۴		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۵	۰,۹۹۹	۰,۹۳۸	۰,۹۹۹	۰,۹۴۳	۰,۹۹۹	۰,۹۵۰	۰,۹۹۵	۰,۹۵۴	۰,۵	۲۵	
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۵	۰,۹۹۹	۰,۹۹۶	۰,۹۹۹	۰,۹۹۷	۰,۹۹۵	۰,۹۹۳	۰,۶	۷	
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۷		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۸		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹		
۰,۶۱۵	۰,۵۵۴	۰,۴۴۳	۰,۴۴۸	۰,۳۴۸	۰,۳۳۹	۰,۲۴۲	۰,۲۴۶	۰,۰۳۹	۰,۰۵۳	۰		
۰,۶۵۰	۰,۵۶۹	۰,۴۹۰	۰,۴۸۰	۰,۳۴۳	۰,۳۷۹	۰,۲۳۹	۰,۲۷۱	۰,۱۳۳	۰,۰۷۵	۰,۱		
۰,۶۹۰	۰,۵۷۶	۰,۵۱۰	۰,۴۷۹	۰,۵۱۲	۰,۳۹۷	۰,۳۹۴	۰,۲۷۶	۰,۴۰۴	۰,۲۰۶	۰,۲		
۰,۷۵۳	۰,۶۱۹	۰,۷۵۶	۰,۵۹۰	۰,۷۵۶	۰,۴۹۹	۰,۷۵۴	۰,۴۲۱	۰,۷۶۲	۰,۴۵۰	۰,۳	۴۹	
۰,۹۵۵	۰,۶۶۳	۰,۹۵۹	۰,۶۵۱	۰,۹۵۵	۰,۶۷۳	۰,۹۵۳	۰,۶۵۰	۰,۹۴۷	۰,۶۶۷	۰,۴	۳	
۰,۹۸۹	۰,۸۹۰	۰,۹۶۸	۰,۸۶۹	۰,۹۹۵	۰,۸۷۵	۰,۹۹۵	۰,۸۶۸	۰,۹۹۴	۰,۸۵۳	۰,۵		
۰,۹۹۹	۰,۹۶۸	۰,۹۹۹	۰,۹۶۳	۰,۹۹۹	۰,۹۶۳	۰,۹۹۹	۰,۹۷۰	۰,۹۹۹	۰,۹۶۸	۰,۶		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۸۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۶	۰,۹۹۶	۰,۹۹۹	۰,۷		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۸		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹		
۰,۶۴۷	۰,۶۳۱	۰,۵۸۰	۰,۵۲۵	۰,۴۹۵	۰,۴۶۸	۰,۴۸۵	۰,۴۳۹	۰,۰۴۰	۰,۱۲۴	۰		
۰,۶۹۶	۰,۶۷۲	۰,۵۹۶	۰,۵۴۴	۰,۴۸۱	۰,۴۵۳	۰,۴۸۲	۰,۴۹۵	۰,۲۷۲	۰,۱۳۵	۰,۱		
۰,۷۹۲	۰,۷۵۴	۰,۷۹۳	۰,۶۵۲	۰,۷۷۶	۰,۴۶۴	۰,۸۰۱	۰,۴۴۹	۰,۷۷۶	۰,۴۵۸	۰,۲		
۰,۹۸۷	۰,۸۰۵	۰,۸۲۶	۰,۹۹۰	۰,۸۲۱	۰,۹۸۸	۰,۹۸۸	۰,۸۱۹	۰,۹۸۶	۰,۸۲۶	۰,۳	۴۹	
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۴	۷	
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۵		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۶		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۷		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۸		
۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹۹۹	۰,۹		

بنابراین مدل دارای اثر تصادفی است و خطاها به‌طور چشم‌گیری هم‌بستگی فضایی دارند و برای تحلیل آن‌ها باید



همبسته بودن خطاها مد نظر قرار گیرند. برای این منظور مدل (۱۶) با عبارت خطای ارائه داده شده در رابطه (۱۷) به داده‌ها برازنده شده است. چنان‌که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود، همه متغیرها به‌جز میزان ارز، بر صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو به‌شدت تأثیر گذارند.  $\lambda$  ضریب همبستگی فضایی خطاها با برآورد ۴۷۹/۰ به میزان چشم‌گیری معنی‌دار است. هم‌چنین  $\phi$  نسبت واریانس اثرات تصادفی به واریانس خطاها، با برآورد ۱۲/۲۱۱ در سطح  $\alpha = 0.05$  معنی‌دار است.

جدول ۳. برآورد پارامترهای مدل رگرسیونی برای صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار $t$	مقدار $p$
$\beta_0$	۷,۶۹۱	۲,۵۴۴	۱,۵۱۸	۰,۱۲۸۰
$\beta_1$	۰,۸۰۶	۰,۱۲۴	۶,۵۲۴	۰,۰۰۰۱
$\beta_2$	-۰,۰۳۷	۰,۰۱۹	-۱,۹۱۴	۰,۰۵۵۰
$\beta_3$	-۰,۰۸۲	۰,۳۶۷	-۲,۲۲۵	۰,۰۲۶۰
$\phi$	۱۲,۲۱۱	۵,۷۳۲	۲,۱۳۰	۰,۰۳۳۰
$\lambda$	۰,۴۷۹	۰,۱۰۰	۴,۷۸۳	۰,۰۰۰۱

### بحث و نتیجه‌گیری

در هر مدل رگرسیونی آزمون استقلال یا وابستگی خطاها اهمیت ویژه‌ای دارد. از جمله مسائل مهم در مدل‌بندی داده‌های پانلی فضایی، وجود همبستگی فضایی مشاهدات در هر نقطه از زمان و تغییرپذیری بین واحدهای آزمایشی است که باید به‌نحوی در مدل لحاظ شوند. مدل‌های رگرسیونی متنوعی برای مدل‌بندی این داده‌ها ارائه داده شده است. از جمله این مدل‌ها مدل خطافضایی با اثرات تصادفی است که در این مقاله به آن اشاره شد. برای بررسی همبستگی فضایی خطاها و اثرات تصادفی این مدل، آزمون ضریب لاگرانژ توأم معرفی و ارائه داده شد. در بررسی شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی در خصوص داده‌های صادرات محصولات کشاورزی کشورهای عضو اکو نحوه کاربست این آزمون نشان داده شد. لازم به ذکر است که در این مقاله توزیع مجانبی آماره آزمون صریحاً ارائه نشد. اما تحت فرضیاتی که کلجین و پراچا (۲۰۰۱) ارائه کردند، به‌طور گسترده بررسی شده است. به‌علاوه آزمون برای بررسی همبستگی تأخیر فضایی و اثرات تصادفی در یک پانل مورد توجه قرار نگرفته است که به‌عنوان موضوعی در تحقیقات آینده پیشنهاد می‌شود.

### تقدیر و تشکر

از داوران محترم مجله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد قدردانی می‌کنیم.

### منابع

۱. محمدزاده م.، *آمار فضایی و کاربردهای آن*، چاپ دوم، مرکز نشر آثار علمی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، (۱۳۹۴).
2. Anselin L., "Spatial Econometrics", Methods and Models, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1988).
3. Anselin L., Rey S., "Properties of Tests for Spatial Dependence in Linear Regression Models Geographical Analysis", 23 (1991) 112-131.
4. Anselin L., Bera A. K., Florax R., Yoon M. J., "Simple Diagnostic Tests for Spatial

- Dependence", *Regional Science and Urban Economics*, 26 (1996) 77-104.
5. Anselin L., Gallo J. L., Jayet H., "Spatial Econometrics In: Matyas, L. and Sevestre, P. (eds.), *The Econometrics of Panel Data*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008) 625-660.
  6. Baltagi B. H., "Econometrics Analysis of Panel Data", New York, Wiley (2005).
  7. Baltagi B. H., Egger, Pand Pfaffermayr M., "A Generalized Spatial Panel Data Model with Random Effect", Working Paper (2013).
  8. Baltagi B. H., Liu L., "Testing for Random Effects and Spatial Lag Dependence in Panel Data Models", *Statistics and Probability Letters*, 78 (2008) 3290-3306.
  9. Baltagi B. H., Song S. H., Koh W., "Testing Panel Data Regression Models with Spatial Error Correlation", *Journal of Econometrics*, 117 (2003) 123-150.
  10. Baltagi B. H., Yang Z., "Standardized LM Tests for Spatial Error Dependence in Linear or Panel Regressions", *Econometrics Journal*, 16 (2013) 103-134.
  11. Breusch T. S., Pagan A. R., "The Lagrange Multiplier Test and its Application in Econometrics", *Review of Economic Studies*, 47 (1980) 239-254.
  12. Goureroux C., Holly A., Monfort A., "Likelihood Ratio Test, Wald Test, and Kuhn-Tucker Test in Linear Models with Inequality Constraints on the Regression Parameters", *Econometrica*, 50 (1982) 63-80.
  13. Harville D. A., "Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems", *Journal of the American Statistical Association*, 72 (1977) 320-338.
  14. Hemmerle W. J., Hartley H. O., "Computing Maximum Likelihood Estimates for the Mixed A. O. V. Model Using the W-Transformation, *Technometrics*", 15 (1973) 819-831.
  15. Honda Y., "Testing the Error Components Model with Non-Normal Disturbances", *Review of Economics Studies*, 52 (1985) 681-690.
  16. Kelejian H. H., Prucha I. R. "On the Asymptotic Distribution of the Moran I Test with Applications", *Journal of Econometrics*, 104 (2001) 219-257.
  17. Volpe-Martincus V. C., "Spatial Effects of Trade Policy": Evidence from Brazil, *Journal of Regional Science*, 50(2011) 541-569.
  18. Wansbeek T. J., Kapteyn A., "A Note on Spectral Decomposition and Maximum Likelihood Estimation of ANOVA Models with Balanced Data", *Statistics and Probability Letters*, 1 (1983) 213-215.