ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف

محمدجواد نیک‌مهر*، عبدالرضا آزادی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکدۀ ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های آرمنداریز معرفی کرده و ضمن بررسی خواص آن، رابطۀ آن با دیگر ساختارها را نیز بیان می‌کنیم. هم‌چنین با آوردن مثال‌های متعدد و متنوع، رفتار ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف را تحت برخی توسیع‌های حلقه‌ای مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: پوچساز راست، پوچسازپوچ‌توان، حلقۀ آرمنداریز، حلقۀ نیم‌جابه‌جایی.

مقدمه

سرتاسر این مقاله R نشان‌دهندۀ حلقۀ شرکت‌پذیر با عضو همانی است. مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان[۱] حلقۀ R را با نماد $nil(R)$ و حلقۀ چندجمله‌ای‌ها را با $R[X]$ نشان می‌دهند. مجموعه تمام ماتریس‌های بالا مثلثی[۲] $n\times n$ با درایه‌هایی از حلقۀ R را با نماد $T_n(R)$ نشان می‌دهیم.

حلقۀ R را یک حلقۀ کاهشی[۳] گوییم هرگاه فاقد عنصر پوچ‌توان ناصفر باشد، حلقۀ R را یک حلقۀ نیم‌جابه‌جایی[۴] گوییم هرگاه برای هر $a,b\in R$ از این‌که $ab=0$ نتیجه شود $aRb=0$. حلقۀ R را NI-حلقه[۵] می‌نامند درصورتی‌که $nil(R)$ یک ایده‌آل باشد. در [۶]، لیانگ[۶] حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی ضعیف[۷] را به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی معرفی کرد. حلقۀ R را نیم‌جابه‌جایی ضعیف می‌نامند درصورتی‌که برای هر $a,b,r\in R$ اگر $ab=0$ آن‌گاه $arb\in nil(R)$.

رِگه و چاوچاهاریا[۸] [۸] حلقه‌های آرمنداریز[۹] را معرفی کردند. حلقۀ R آرمنداریز نامیده می‌شود هرگاه اگر حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای در $R[X]$ صفر باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب ضرایب آن‌ها صفر باشد. هو[۱۰] و همکارانش [۳] مفهوم π-آرمنداریز را به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز معرفی نمودند. حلقۀ R، π-آرمنداریز نامیده می‌شود هرگاه اگر حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای در $R[X]$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب ضرایب آن‌ها نیز پوچ‌توان باشد. زیرمجموعه A را در حلقۀ R در نظر می‌گیریم. پوچساز راست (چپ)[۱۱] زیرمجموعه‌ی A در حلقۀ R را با $r_R(A)$ ($l_R(A)$) نمایش داده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$r_R(A)=\{b\in R\mid Ab=0\},\ (l_R(A)=\{b\in R\mid bA=0\}).$$

---

*نویسنده مسئول nikmehr@kntu.ac.ir

1. Nilpotent element
2. Upper triangular
3. Reduced
4. Semi-commutative
5. NI-ring
6. Liang
7. Weakly
8. Rege and chhawchharia
9. Armendarize
10. Huh
11. Right(left) annihilator

قلندرزاده [۲]، ایده‌آل‌های آرمنداریز را معرفی و بررسی کرد. ایده‌آل I از حلقهٔ R را آرمنداریز نامیم هرگاه $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x])$ نتیجه بدهد $a_ib_j \in r_R(I)$، که در آن $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ و $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ چندجمله‌ای‌هایی در $R[X]$ هستند. بنابر[۱]، یک ایده‌آل یک‌طرفه از حلقه‌ی R نیم‌جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه $ab \in I$، نتیجه بدهد $aRb \subseteq I$ که در آن a, b عضو حلقه‌ی R هستند.

از [۲]، برای یک ایده‌آل یک‌طرفه I از حلقهٔ R، $r_R(I)$ نیم‌جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه $ab \in r_R(I)$، نتیجه بدهد $aRb \subseteq r_R(I)$ که در آن a,b عضو حلقهٔ R هستند. در [۷]، اویانگ [1] مفهوم پوچ‌سازپوچ‌توان [2] را معرفی کرد و و خواص آن را بررسی کرد.

برای زیرمجموعهٔ $X \subseteq R$ تعریف می‌کنیم:

$$N_R(X) = \{ a \in R \mid Xa \subseteq nil(R)\},$$

پوچ سازپوچ‌توان X در R است.

در این مقاله مفهوم ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف [3] را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های آرمنداریز معرفی می‌کنیم. این کار به این‌صورت انجام می‌شود که پوچ‌سازپوچ‌توان را به‌جای پوچ‌ساز در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌آل آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه بسیاری از خواص حلقه‌های آرمنداریز و هم‌چنین ایده‌آل‌های آرمنداریز را دارد. هم‌چنین در قسمت آخر این مقاله نیز، ایده‌آل‌های نیم‌جابه‌جایی ضعیف [4] را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های نیم‌جابه‌جایی تعریف کرده و ضمن بررسی خواص اساسی این ایده‌آل‌ها، نتایج قبلی موجود درباره این ایده‌آل‌ها را تعمیم می‌دهیم.

ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف

در این بخش ضمن بررسی ساختاری ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف، شرایط لازم برای این‌که حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف باشد را به‌دست می‌آوریم.

ثابت می‌کنیم برای هر حلقهٔ R، اگر $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف و I ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه حلقهٔ R آرمنداریز ضعیف است.

هم‌چنین رفتار ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف تحت توسیع‌های ماتریسی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از حلقهٔ R باشد. ایده‌آل I آرمنداریز ضعیف نامیده می‌شود هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ و $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ از $R[x]$، از این‌که $f(x)g(x) \in l_{R[x]}(I[x])$ برای هر $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le m$، بتوان نتیجه گرفت که $a_ib_j \in N_R(I)$.

انتظار می‌رود که هر ایده‌آل آرمنداریز، آرمنداریز ضعیف باشد. در حقیقت نیز چنین است، توجه داشته باشید که عکس این مطلب همواره برقرار نیست. مثال ۶ دلیلی بر این ادعا است. پیش از بیان این مثال، به ذکر برخی قضایا و مثال‌های استفاده شده می‌پردازیم.

مثال ۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حوزه اعداد صحیح و $T_3(\mathbb{Z})$ حلقهٔ ماتریس‌های بالا مثلثی 3×3 روی $\mathbb{Z}$ باشد. ایده‌آل

$$I=\left\{\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 0 & 0\\ 0 & 2\mathbb{Z} & 0\\ 0 & 0 & 2\mathbb{Z}\end{pmatrix}\right\},$$

---
1. Ouyang
2. Nilpotent annihilator
3. Weak Armendarize Ideal
4. Weak semi-commutative ideal

از حلقهٔ $T_3(\mathbb{Z})$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که $r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$ و $l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$.
واضح است که $r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = 0$ و

$$N_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

بنابراین $l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$.

اگر R حلقهٔ کاهشی باشد، آن‌گاه $r_R(I) = l_R(I) = N_R(I)$ برای هر ایده‌آل چپ I از حلقهٔ R.

به‌راحتی می‌توان دید که برای هر ایده‌آل چپ ناصفر I از R، $N_R(I)$ یک ایده‌آل از R است زمانی که $nil(R)$ یک ایده‌آل باشد. برای دیدن جزئیات بیش‌تر از پوچ‌سازهای پوچ‌توان، [۷] را ببینید. لم ۳ در ادامه استفاده می‌شود.

لم ۳. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از حلقهٔ R باشد. اگر $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in T_n(\mathrm{I}),$$

برای یک i ثابت داشته باشیم $ra_{ii} = 0$، آن‌گاه $rI = (0)$.

اثبات. فرض کنیم $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in T_n(\mathrm{I}),$$

برای یک i ثابت داشته باشیم $ra_{ii} = 0$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم برای $i = 1$، $ra_{ii} = 0$.

حال فرض کنیم a یک عضو دلخواه ایده‌آل چپ I باشد. در این صورت واضح است که $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in T_n(\mathrm{I})$

و در نتیجه $ra = 0$، بنابراین $rI = (0)$.

حال یکی از قضایای ساختاری درباره ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف، که منجر به تولید رده‌ای وسیع از ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف می‌شود را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از حلقهٔ R است. ایده‌آل I آرمنداریز ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر n، $T_n(I)$ ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف باشد.

اثبات. اگر $f(x)g(x) \in l_{R[x]}(I[x])$ آن‌گاه $f(x)g(x) \in l_{T_nR[x]}(T_n(I)[x])$. حال اگر فرض کنیم I آرمنداریز ضعیف نباشد، پس i, jای موجود است که $a_ib_jI \not\subseteq nil(\mathrm{R})$. از طرفی چون R زیرحلقهٔ $T_n(R)$ است، واضح است که $nil(\mathrm{R}) \subseteq nil(T_n(R))$. بنابراین $a_ib_jT_n(I) \not\subseteq nil(T_n(R))$ که با آرمنداریز ضعیف بودن $T_n(I)$ تناقض دارد.

بالعکس، ایده‌آل I را آرمنداریز ضعیف در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $T_n(I)$ آرمنداریز ضعیف است. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{p}A_i x^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{q}B_j x^j$ دو چندجمله‌ای در حلقهٔ $T_n(R)[x]$ باشند به‌طوری‌که

$$f(x)g(x)\in l_{\Gamma_n(R)}(T_n(I)[x])$$

قرار می‌دهیم:

$$A_i=\begin{pmatrix} a^i{}_{11} & a^i{}_{12} & \cdots & a^i{}_{1n}\\ 0 & a^i{}_{22} & \cdots & a^i{}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a^i{}_{nn}\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B_j=\begin{pmatrix} b^j{}_{11} & b^j{}_{12} & \cdots & b^j{}_{1n}\\ 0 & b^j{}_{22} & \cdots & b^j{}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b^j{}_{nn}\end{pmatrix}$$

$$D_h=\begin{pmatrix} d^h{}_{11} & d^h{}_{12} & \cdots & d^h{}_{1n}\\ 0 & d^h{}_{22} & \cdots & d^h{}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d^h{}_{nn}\end{pmatrix}.$$

ادعا می‌کنیم که $A_iB_j\in N_{T_n(R)}(T_n(I))$ برای هر i,j.

فرض کنیم

$$A=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{11}x^i & \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{12}x^i & \cdots & \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{1n}x^i\\ 0 & \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{22}x^i & \cdots & \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{2n}x^i\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{P}a^i{}_{nn}x^i\end{pmatrix} \quad \text{و}$$

$$B=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{11}x^j & \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{12}x^j & \cdots & \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{1n}x^j\\ 0 & \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{22}x^j & \cdots & \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{2n}x^j\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{q}b^j{}_{nn}x^j\end{pmatrix}$$

چون $f(x)g(x)T_n(I)[x]=0$ ، به‌ازای هر

$$D=\begin{pmatrix} \sum_{h=0}^{t}d^h{}_{11}x^h & \sum_{h=0}^{t}d\ {}_{12}x^h & \cdots & \sum_{h=0}^{t}d^h{}_{1n}x^h\\ 0 & \sum_{h=0}^{t}d^h{}_{22}x^h & \cdots & \sum_{h=0}^{t}d^h{}_{2n}x^h\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{h=0}^{t}d^h{}_{nn}x^h\end{pmatrix}\in T_n(I[x])$$

داریم $ABD=0$.

با ضرب دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در یک‌دیگر و جمع جمله‌ها با درجه‌های یکسان و ساده کردن عبارت، درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس‌ها به‌صورت چندجمله‌ای خواهند بود که ضرایب آنها در $R[x]$ است. هم‌چنین با توجه به این مطلب که در ماتریس‌های بالامثلثی، اگر درایه‌های روی قطر اصلی صفر شوند آن‌گاه کل ماتریس به‌توان مرتبه آن صفر می‌شود، کافی است بررسی را فقط روی درایه‌های قطر اصلی انجام دهیم.

چون $ABD=0$،

$$(1).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{11}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{11}x^j)(\sum_{h=0}^{t}d^h{}_{11}x^h)=0,$$

$$(2).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{22}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{22}x^j)(\sum_{h=0}^{t}d^h{}_{22}x^h)=0,$$

$$\vdots$$

$$(n).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{11}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{11}x^j)(\sum_{h=0}^{t}d^h{}_{11}x^h)=0.$$

ازاین‌رو، از لم ۳ و تساوی‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که

$$(1).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{11}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{11}x^j)I[x]=0,$$

$$(2).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{22}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{22}x^j)I[x]=0,$$

$$\vdots$$

$$(n).\ (\sum_{i=1}^{P}a^i{}_{11}x^i)(\sum_{j=1}^{q}b^j{}_{11}x^j)I[x]=0.$$

حال چون I آرمنداریز ضعیف است، بنابراین برای هر i,j و هر $1\leq k\leq n$، داریم: $a^i{}_{kk}b^j{}_{kk}\in N_R(I)$.
بنابراین برای هر $d^h{}_{kk}\in I$ و هر h,i,j,k، $M^k{}_{ijh}\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $(a^i{}_{kk}b^j{}_{kk}d^h{}_{kk})^{M^k{}_{ijh}}=0$.
قرار می‌دهیم

$$M=Max\{M^k{}_{ijh}\,|1\leq k\leq n\},$$

از این‌رو، $[(A_iB_jD_h)^m]^n=0$. بنابراین $A_iB_jT_n(I)\subseteq nil(T_n(R))$ و لذا $T_n(I)$ آرمنداریز ضعیف است.

حلقهٔ R را آبلی[1] می‌خوانند هرگاه هر خودتوان[2] آن مرکزی باشد. بنابر [۲]، ایده‌آل چپ I از حلقهٔ R را آبلی گوییم هرگاه به‌ازای هر خودتوان $e\in R$ و هر $r\in R$، $er-re\in r_R(I)$.

لم ۵. [[۲]، نتیجهٔ ۵.۲] هر ایده‌آل آرمنداریز، آبلی است.

حلقهٔ R و (R,R)-دو مدول[2] ${}_RM_R$ را در نظر می‌گیریم. $R\oplus M$ را توسیع بدیهی R به‌وسیلهٔ M نامیم و با نماد $T(R,M)=R\oplus M$ نمایش می‌دهیم و دو عمل جمع و ضرب آن‌ها را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(r_1,m_1)+(r_2,m_2)=(r_1+r_2,m_1+m_2)$$

1. Abelian
2. Idempotent
2. Bi-module

و

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2).$$

با توجه به تعریف مذکور، توسیع بدیهی R به‌وسیله M با حلقهٔ همه ماتریس‌های $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ که $r \in R$ و $m \in M$ یک‌ریخت است.

در این قسمت با یک مثال نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌آل حلقهٔ R آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه ممکن است آرمنداریز نباشد.

مثال ۶. فرض کنیم $R = T(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ و $I = Ra$ که در آن $a = \begin{pmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. بنا به [[۲]، مثال ۷.۲]، I ایده‌آل آرمنداریز است. این همراه با قضیهٔ ۴ نتیجه می‌دهد $T_5(I)$ آرمنداریز ضعیف است. اینک ادعا می‌کنیم که $T_5(I)$ آرمنداریز نیست. با توجه به این‌که هر ایده‌آل چپ آرمنداریز آبلی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که $T_5(I)$ آبلی نیست. فرض کنیم

$$E = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T_5(\mathrm{R}).$$

در این صورت $E^2 = E$ و $Ek - kE = k$. زیرا

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&\bar{2}\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0,$$

پس $(Ek - kE)T_5(I) \neq 0$. بنابراین $T_5(I)$ ایده‌آل چپ آبلی نیست و در نتیجه $T_5(I)$ ایده‌آل چپ آرمنداریز نیست.

نتیجهٔ ۷. فرض کنیم $R = T(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$. در این صورت حلقهٔ $T_5(R)$ آرمنداریز نیست.

اثبات. بنابر[[۲]، گزاره ۶.۲]، هر ایده‌آل چپ I از حلقهٔ آرمنداریز R، آرمنداریز است. هم‌چنین بنابر مثال ۶، $T_5(R)$ ایده‌آل چپ آرمندایز نیست، از این‌رو، $T_5(R)$ حلقه‌ای آرمنداریز نیست.

توجه کنیم که نتیجهٔ ۷ و مثال ۶، نشان می‌دهند که یک ایده‌آل چپ آرمندایز ضعیف وجود دارد که حلقه‌اش آرمندایز نیست. با روش مشابه برای مثال ۶ می‌توان مثال ۸ را اثبات کرد.

مثال ۸. برای هر ایده‌آل چپ آرمندایز $I \neq 0$ از حلقهٔ R، $T_n(\mathrm{I})$ ایده‌آل چپ آرمندایز ضعیف است که آرمندایز نیست.

بنا بر [[۲]، گزارهٔ ۶.۲]، هر ایده‌آل چپ از یک حلقهٔ آرمندایز، آرمندایز است. در گزارهٔ ۹، نشان می‌دهیم ایده‌آل چپ یک حلقه‌ی π-آرمندایز، آرمندایز ضعیف است.

گزارهٔ ۹. اگر R یک حلقهٔ π-آرمندایز باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل چپ از آن آرمندایز ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقهٔ π-آرمندایز و I یک ایده‌آل چپ از R باشد. فرض کنیم $f(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ در $R[x]$ باشند. به‌گونه‌ای که $f(x)g(x) \in l_{R[x]}(I[x])$. پس $f(x)g(x)h(x) = 0 \in nil(\mathrm{R[x]})$ که $h(x) = \mathrm{c}_0 + \mathrm{c}_1 x + \cdots + \mathrm{c}_p x^p \in I[x]$. حال زیرا R، π-آرمندایز است، داریم $a_i b_j c_k \in nil(R)$ برای هر i, j, k و از این‌رو، $a_i b_j I \subseteq nil(R)$. ازاین‌رو $a_i b_j \in N_R(\mathrm{I})$ و لذا نتیجه حاصل است.

در مثال ۱۰ نشان می‌دهیم که $T_5(\mathbb{Z})$، دارای ایده‌آل چپ آرمندایز ضعیف است که آرمندایز نیست.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حوزه اعداد صحیح باشد. حلقهٔ ماتریس‌های بالا مثلثی 5×5 روی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. چون $\mathbb{Z}$ حلقه‌ای کاهشی است بنابراین $\mathbb{Z}$ آرمندایز است در نتیجه π-آرمندایز است. از این‌رو، [[۳]، قضیهٔ ۴.۲]، نتیجه می‌دهد که $T_5(\mathbb{Z})$، π-آرمندایز است. حال قرار می‌دهیم:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

چون M یک ایده‌آل چپ از حلقهٔ $T_5(\mathbb{Z})$ است، پس گزارهٔ ۹ نتیجه می‌دهد که M یک ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف است. اینک نشان می‌دهیم که M آرمنداریز نیست. به‌وضوح می‌توان دید که ماتریس

$$e=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

خود توان است و این در حالی است که برای ماتریس

$$f=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

داریم $ef-fe=f$ و $fM\neq 0$. پس ثابت شد که ایده‌آل M آبلی نیست و درنتیجه آرمنداریز نیست.

بنا بر [[۲]، گزارهٔ ۳.۲]، اگر M ایده‌آل چپ آرمنداریز باشد، آن‌گاه $I[x]$ نیز ایده‌آل چپ آرمنداریز است.

برای هر حلقهٔ R ، حلقهٔ $T(R,n)$ برای $n\geq 2$ زیرحلقه‌ای از حلقهٔ ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(R)$ است، بدین‌صورت تعریف می‌شود.

$$T(R,n)=\left\{\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\0&a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}\\0&0&a_0&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&a_1\\0&0&\cdots&0&a_0\end{pmatrix}\middle| a_i\in R\right\}.$$

برای راحتی کار می‌توان عناصر $T(R,n)$ را به‌صورت $(a_0,\dots,a_{n-1})$ نمایش داده آن‌گاه $T(R,n)$ با جمع نقطه‌به‌نقطه[1] و ضرب

$$(a_0,\dots,a_{n-1})(b_0,\dots,b_{n-1})=(\mathrm{a}_0\mathrm{b}_0,\mathrm{a}_0\mathrm{b}_1+\mathrm{a}_1\mathrm{b}_0,\dots,\mathrm{a}_0\mathrm{b}_{n-1}+\cdots+\mathrm{a}_{n-1}\mathrm{b}_0)$$

یک حلقه است. از طرف دیگر نگاشت

$$\varphi:\frac{R[\mathrm{x}]}{<x^n>}\to T(R,n)$$

طوری‌که $\varphi(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})=(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ برای $a_i\in R$ و $1\leq i\leq n-1$، یک‌ریختی حلقه‌ای است. از این‌رو، $T(R,n)\cong\frac{R[\mathrm{x}]}{<x^n>}$، جایی که $<x^n>$ ایده‌آل تولید شده به‌وسیلهٔ x^n در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R[x]$ است. نتیجه ۱۱ در ادامه مورد نیاز است.

لم ۱۱. [[۹]، لم ۱.۲]، حلقهٔ R و عدد صحیح و مثبت n را که $n\geq 2$ است، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $I_0,\dots,I_{n-1}$ ایده‌آل‌هایی در R باشند به‌طوری‌که $I_i\subseteq I_{i+1}$، برای هر i که $0\leq i\leq n-2$. در این صورت

1. Pointwise

$$J=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \middle| a_i\in I_i, i=0,\dots,n-1\right\}$$

یک ایده‌آل از $\frac{R[\mathrm{x}]}{<x^n>}$ است.

با روشی مشابه روش استفاده شده در اثبات قضیهٔ ۴، می‌توان مثال ۱۲ را نیز اثبات کرد.

مثال ۱۲. اگر I_0 یک ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه J نیز آرمنداریز ضعیف است.

به‌وضوح، یک حلقهٔ R را آرمنداریز ضعیف گوییم هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(\mathrm{x})=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ در حلقهٔ $R[x]$ به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$ ، نتیجه شود $a_ib_j\in N_R(\mathrm{R})$، برای هر i, j، در [[۴]، قضیهٔ ۱۱] ثابت شده که اگر R دلخواه و برای ایده‌آل کاهشی I و $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای آرمنداریز است.

در [[۵]، مثال ۱۴]، مثالی از یک حلقهٔ غیرآرمنداریز R به‌طوری‌که I، $\frac{R}{I}$ آرمنداریز هستند ارائه شده است، که I به‌عنوان یک حلقهٔ آرمنداریز بدون همانی در نظر گرفته شد.

حال این نتیجه را برای حالت آرمنداریز ضعیف داریم:

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم R حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. اگر I ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف و $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم $f(\mathrm{x})=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ اعضای $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$ ، توجه کنید در $\left(\frac{R}{I}\right)[x]$ داریم :

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\bar{a}_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\bar{b}_jx^j\right)=0$$

بنابراین از این‌که $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف است، برای هر $r\in R$، $n_{ijr}\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\left(a_ib_jr\right)^{n_{ijr}}\in I$. چون I ایده‌آلی از R است، از این‌رو، $r\left(a_ib_jr\right)^{n_{ij}}\in I$. از طرفی چون I آرمنداریز ضعیف است پس $a_ib_j\in N_R(I)$ به‌ویژه $\left(a_ib_jr\right)^{n_{ij}+1}=\left(a_ib_jr\right)\left(a_ib_jr\right)^{n_{ij}}\in nil(R)$، پس $a_ib_j\in nil(R)$ برای هر i, j و هر $r\in R$. یعنی $a_ib_j\in N_R(R)$ و از این‌رو، R آرمنداریز ضعیف است.

در این‌جا مثالی را ارائه می‌دهیم که پایه و اساس ساختن مثال‌هایی است که نشان می‌دهند هر حلقهٔ آرمنداریز ضعیف لزوماً آرمنداریز نیست.

مثال ۱۴. اگر R حلقه‌ای آرمنداریز باشد، آن‌گاه بنا بر [[۵]، مثال ۱] حلقهٔ $T_n(R)$ آرمنداریز نیست ولی با توجه به قضیهٔ ۴، واضح است که حلقهٔ $T_n(R)$ آرمنداریز ضعیف است.

ایده‌آل نیم‌جابه‌جایی ضعیف

تعریف ۱۵. ایده‌آل I از حلقهٔ R را نیم‌جابه‌جایی می‌نامند درصورتی‌که برای هر $a,b\in R$، اگر $a,b\in I$، آن‌گاه $aRb\subseteq I$. بنابر [۲]، $r_R(\mathrm{I})$ را نیم‌جابه‌جایی می‌نامند درصورتی‌که برای هر $a,b\in R$، اگر $a,b\in r_R(\mathrm{I})$ آن‌گاه $aRb\subseteq r_R(\mathrm{I})$.

تعریف ۱۶. ایده‌آل I از حلقهٔ R را نیم‌جابه‌جایی ضعیف می‌نامیم درصورتی‌که برای هر $a,b\in R$، اگر $ab\in r_R(\mathrm{I})$، آن‌گاه $aRb\subseteq N_R(I)$.

به‌روشنی، اگر R حلقهٔ کاهشی و I نیم‌جابه‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه $r_R(\mathrm{I})$ نیم‌جابه‌جایی است. هم‌چنین اگر $r_R(\mathrm{I})$ نیم‌جابه‌جایی باشد، آن‌گاه I نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

حال ممکن است این سؤال پیش آید که اگر Iایده‌آل نیم‌جابه‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه $r_R(\mathrm{I})$ نیم‌جابه‌جایی هستند. اما مثال بعدی نشان می‌دهد که این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱۷. فرض کنیم

$$J=\left\{\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{Z}\right\}$$

یک ایده‌آل از حلقهٔ $T_5(\mathbb{Z})$ باشد. بنا بر [[۶]، مثال ۱.۲]، $T_5(\mathbb{Z})$ نیم‌جابه‌جایی ضعیف است و درنتیجه واضح است که J نیم‌جابه‌جایی ضعیف است. حال نشان می‌دهیم $r_{T_n(R)}(\mathrm{J})$ نیم‌جابه‌جایی نیست. واضح است

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0\in r_{T_n(R)}(\mathrm{J})$$

و این در حالی است که

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

و هم‌چنین

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0.$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin r_{T_5(\mathbb{Z})}(J),$$

و این نتیجه می‌دهد که $r_{T_n(R)}(\mathrm{J})$ نیم‌جابه‌جایی نیست.

در قضیهٔ ۱۸، I_0 و J همان ایده‌آل‌های ذکرشده در لم ۱۱.۲ هستند.

قضیهٔ ۱۸. اگر I_0 نیم‌جابه‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه J نیز نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \in T(\mathrm{R},\mathrm{n})$$

به‌طوری‌که $AB \in r_{T(R,n)}(J)$. در این صورت $ABJ=0$ و در نتیجه $a_0b_0I_0=0$. چون I_0 نیم‌جابه‌جایی ضعیف است، پس $a_0cb_0 \in N_R(\mathrm{I}_0)$ برای هر $c \in \mathrm{R}$.

اینک فرض کنیم

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

یک عضو دلخواه در $T(\mathrm{R},\mathrm{n})$ باشد. در این صورت

$$ACBJ=\left\{\begin{matrix} a_0c_0b_0I_0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_0c_0b_0I_0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_0c_0b_0I_0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0c_0b_0I_0 \end{matrix}\right\}$$

و در نتیجه $ACBJ \subseteq nil(T(R,n))$ بنابراین J نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

بنا بر [[۱]، گزاره ۱.۳]، اگر $r_R(\mathrm{I})$ نیم‌جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $r_{\Delta^{-1}R}(\Delta^{-1}\mathrm{I})$ نیم‌جابه‌جایی است.

گزارهٔ ۱۹. فرض کنیم I یک ایده‌آل یک‌طرفه از حلقهٔ R و Δ زیرمجموعه بسته ضربی[۱]، متشکل از عناصر منظم مرکزی[۲] حلقهٔ R باشد. اگر I نیم‌جابه‌جایی باشد، در این صورت $\Delta^{-1}\mathrm{I}$ به‌عنوان ایده‌آل چپی از حلقهٔ $\Delta^{-1}R$ نیز نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha=u^{-1}a$ و $\beta=v^{-1}b$ که $u,v\in\Delta$ و $a,\mathrm{b}\in R$ دو عضو در حلقهٔ $\Delta^{-1}R$ باشند به‌طوری‌که $\alpha.\beta \in r_{\Delta^{-1}R}(\Delta^{-1}\mathrm{I})$. این همراه با این واقعیت که اعضای Δ مرکزی است، نتیجه می‌دهد:

---

1. Multiplicatively closed subset
2. Central regular elements

$$\alpha\beta\Delta^{-1}I = u^{-1}av^{-1}b\,\Delta^{-1}I = (uv)^{-1}ab\,\Delta^{-1}I = 0$$

و بنابراین داریم $ab\,I = 0$. از طرفی چون I نیم‌جابه‌جایی ضعیف است، پس $arb \in N_R(\mathrm{I})$ برای هر $r \in R$. در نتیجه برای هر $i \in I$، عدد صحیح و مثبتی مانند $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\left(iarb\right)^m = 0$. حال فرض کنیم $\gamma = w^{-1}r$ که $w \in \Delta$ و $r \in R$. چون Δ مشمول مرکز R است، پس

$$\left(\delta^{-1}i\alpha\gamma\beta\right)^m = \left(iarb\right)^m\left(\delta^{-1}(wuv)^{-1}\right)^m = 0$$

که در آن $i \in I$ و $\delta^{-1} \in \Delta$. بنابراین $\Delta^{-1}I\alpha\gamma\beta \subseteq nil(R)$ و از این‌رو، $\Delta^{-1}I$ نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

منابع

1. Bell H. E., "Near-rings in which each element is a power of itself. Bull", Aust. Math. Soc., 2 (3) (1970) 363-368.
2. Ghalandarzadeh Sh., Seyyed Javadi H., Khoramdel M., shamsaddini Fard M., "On Armendariz ideals. Bull", Korean Math. Soc., 47 (5) (2010) 883-888.
3. Huh C., Lee C. I., Park K. S., Ryu S. J., "On II-Armendariz rings", Bull. Korean Math. Soc.,. 44 (4) (2007) 641-649.
4. Huh C., Lee Y., Smoktunowicz A., "Armendariz rings and semicommutative rings", Comm. Algebra, 30 (2) (2002) 751-761.
5. Kim N. K., Lee Y., "Extensions of reversible rings", J. pure Appl. Algebra, 185 (1-3) (2003) 207-223.
6. Liang L., Wang L., Liu Z., "On a generalization of semicommutative rings", Taiwan. J. Math., 11 (5) (2007)1359-1368.
7. Ouyang L., "Extensions of nilpotent PP rings", Bull. Iranian Math. Soc., 36 (2011)169-184.
8. Rege M. B., Chhawchharia S., "Armendariz rings. Proc", Japan Acad., Series A, Math. Sci., 73 (1) (1997) 14-17.
9. Tavallaee H. A., Nikmeher M. J., Pazoki M., "Weak a-skew Armendariz ideals", Ukrainian Math. J., (2012)1-10.