

## برخی نکات در مورد ساختار شبکه‌ای فضای توابع باختر انتگرال پذیر شبکه باناخ مقدار

امید ضابطی\*

دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۱۰/۰۷

دریافت ۹۸/۰۷/۱۸

### چکیده

فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی،  $E$  یک شبکه باناخ و  $B(X, E, \mu)$  فضای تمام توابع با خنر انتگرال پذیر  $E$ -مقدار باشد. در این مقاله، نشان می‌دهیم فضای  $B(X, E, \mu)$  یک  $KB$ -فضا یا دارای خاصیت دنباله‌ای فاتو است اگر و تنها اگر  $E$  دارای این خاصیت باشد. در این میان، برخی نکات در مورد همگرایی در فضای  $B(X, E, \mu)$ ، با استفاده از ساختار ترتیبی آن، ارائه شده است.  
واژه‌های کلیدی: انتگرال باختر،  $KB$ -فضا، خاصیت فاتو، شبکه باناخ.

### مقدمه و مفاهیم اولیه

انتگرال باختر یکی از بهترین راه‌ها برای توسیع انتگرال معمولی (انتگرال لبگ یا ریمان) به توابع برداری مقدار است. بنابراین، بررسی جنبه‌های مختلف آن و همچنین تحقیق در مورد چگونگی ارتباط ساختارهای مختلف آن به یک‌دیگر، موضوعی مورد توجه محققان در زمان گذشته و همچنین حال بوده است.

فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی،  $E$  یک شبکه باناخ و  $B(X, E, \mu)$  فضای تمام توابع باختر انتگرال پذیر  $E$ -مقدار باشد. یادآوری می‌کنیم که تابع  $f: X \rightarrow E$  انتگرال پذیر باختر است اگر دنباله  $(S_n)$  از توابع ساده تعریف شده از  $X$  به  $E$  موجود باشد که  $S_n \rightarrow f$  تقریباً همه جا نسبت به اندازه  $\mu$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f - S_n\| d\mu \rightarrow 0$  در این صورت،  $B(X, E, \mu)$  تحت نرم  $\|f\| := \int \|f(w)\| d\mu(w)$  یک شبکه باناخ است. برای توضیحات بیش‌تر به [۶] مراجعه کنید.

در این مقاله، نشان می‌دهیم  $B(X, E, \mu)$  یک  $KB$ -فضا است و یا خاصیت دنباله‌ای فاتو را دارد اگر و تنها اگر  $E$  دارای خاصیت متناظر باشد.

ابتدا اجازه دهید با استفاده از مثال، اهمیت موضوع را بیش‌تر روشن کنیم. مشهور است که در برخی از فضاهای کلاسیک مانند  $l_p(1 \leq p \leq \infty)$  و  $c_0$ ، همگرایی معادل همگرایی نقطه‌وار است. همچنین، در فضای  $L^p(\mu)$ ،  $uO$ -همگرایی دنباله‌ای معادل همگرایی تقریباً همه جا است (برای توضیحات بیش‌تر، به بخش مقدمه منبع [۵] مراجعه کنید). بنابراین،  $uO$ -همگرایی، توسیعی از همگرایی نقطه‌وار به شبکه‌های باناخ است. توجه کنید که برای تورهای کراندار ترتیبی،  $uO$ -همگرایی معادل با همگرایی ترتیبی است. از این‌رو، توسیع دادن برخی قضا یا در فضاهای کلاسیک مانند قضیه همگرایی یکنوا به شبکه‌های باناخ در حالت کلی، با استفاده از  $uO$ -همگرایی، حائز اهمیت زیادی است.

در این مرحله، برخی از نکات و پیش زمینه‌ها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید  $E$  یک شبکه باناخ باشد. تور  $(x_\alpha)$  در  $E$  همگرایی ترتیبی به  $x \in E$  گفته می‌شود (به‌طور خلاصه،  $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ) هرگاه تور  $(z_\beta)$  در  $E$  موجود باشد به‌طوری که  $z_\beta \downarrow 0$  و برای هر  $\alpha_0, \beta$  وجود داشته باشد که  $|x_\alpha - x| \leq z_\beta$  برای هر  $\alpha \geq \alpha_0$ . دقت شود که  $z_\beta \downarrow 0$  یعنی تور  $(z_\beta)$  نزولی است و  $\inf z_\beta = 0$ .

هم‌چنین، تور  $(x_\alpha)$  همگرایی ترتیبی غیرکراندار ( $uo$ -همگرا) به  $x \in E$  نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $w \in E_+$  داشته باشیم:  $|x_\alpha - x| \wedge w \xrightarrow{0} 0$ . برای توضیحات بیش‌تر در رابطه با  $uo$ -همگرایی و مطالب مرتبط به [۴] و [۵] رجوع کنید. هم‌چنین، برای مطالب مرتبط با انتگرال باختر و نکات مربوطه، خواننده می‌تواند به [۱] و [۶] مراجعه کند. مجموعه  $A \subseteq E$  را کراندار ترتیبی نامیده می‌شود هرگاه بازه ترتیبی  $[x, y]$  در  $E$  موجود باشد به‌طوری که  $A \subseteq [x, y]$ . شبکه باناخ  $E$  پیوسته ترتیبی نامیده می‌شود هرگاه برای هر تور  $(x_\alpha)$  در  $E$ ،  $x_\alpha \downarrow 0$  نتیجه دهد  $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ . هم‌چنین،  $E$  را  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی می‌نامیم هرگاه  $x_n \downarrow 0$  رابطه  $\|x_n\| \downarrow 0$  را نتیجه دهد.

یادآوری می‌کنیم زیرمجموعه  $A$  از شبکه باناخ  $E$  تقریباً کراندار ترتیبی نامید می‌شود هرگاه برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $u \in E_+$  موجود باشد به‌طوری که  $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_E$  که در آن  $B_E$  معرف گوی بسته واحد در  $E$  است. شبکه باناخ  $E$  یک  $KB$ -فضا نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله صعودی و کراندار در  $E_+$ ، همگرا باشد. هم‌چنین، نرم  $E$  دارای خاصیت دنباله‌ای فاتو است (به بیان معادل،  $E$  خاصیت  $\sigma$ -فاتو دارد) هرگاه برای هر دنباله  $(x_n) \subseteq E_+$ ،  $x_n \uparrow x$  نتیجه دهد  $\|x_n\| \uparrow \|x\|$ .

## نتایج اصلی

**لم ۱.** فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ باشد. در این صورت، یک نشاننده شبکه‌ای و توپولوژیکی از  $E$  به  $B(X, E, \mu)$  وجود دارد. **برهان.** عملگر  $T$  را از  $E$  به  $B(X, E, \mu)$  با ضابطه  $T(x) = f_x$  در نظر بگیرید که در آن  $f_x(w) = x$  یک تابع ساده است از این‌رو، اندازه‌پذیر است. هم‌چنین،

$$\|f_x\| = \int \|f_x(w)\| d\mu(w) = \|x\| \mu(X)$$

بدیهی است که  $T$  یک هم‌سان‌ریختی توپولوژیکی است. از آن‌جا که  $|T(x)| = T(|x|)$ ، حکم ثابت می‌شود.

**لم ۲.** فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ باشند. در این صورت،  $E$  پیوسته ترتیبی است اگر و تنها اگر  $B(X, E, \mu)$  پیوسته ترتیبی باشد.

**برهان.** نتیجه مستقیم در گزاره آخر [۳] ثابت شده است. برای طرف دیگر از لم ۱ استفاده کنید.

اکنون، نسخه دنباله‌ای پیوسته ترتیبی بودن از لم ۲ را ثابت می‌کنیم.

لم ۳. فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ باشند. در این صورت،  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی است اگر و تنها اگر  $B(X, E, \mu)$   $\sigma$ -پیوسته ترتیبی باشد.

برهان. فرض کنید  $E$ ،  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی باشد و  $(f_n)$  یک دنباله در  $B(X, E, \mu)$  باشد که  $f_n \downarrow 0$ . این نتیجه می دهد که تقریباً برای همه  $w \in X$ ،  $f_n(w) \downarrow 0$ . بنابراین، با استفاده از فرض، نتیجه می شود که

$$\|f_n(w)\| \rightarrow 0.$$

اکنون از قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می شود:

$$\|f_n\| = \int \|f_n(w)\| d\mu(w) \rightarrow 0.$$

برای طرف دیگر، از لم ۱ استفاده شود.

در این جا گزاره ۲، ۶ از [۶] را یادآوری می کنیم.

گزاره ۱. فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی باشد. هم چنین، فرض کنید  $(f_n)$  دنباله ای از توابع باختر انتگرال پذیر باشد به طوری که تقریباً برای همه  $w \in X$ ،  $f_n(w) \uparrow f(w)$  و  $\sup_{n \in N} \int \|f_n\| < \infty$ . در این صورت،  $f$  نیز باختر انتگرال پذیر است و

$$\sup_{n \in N} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

در گزاره بالا، شرط  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی بودن، ضروری است و نمی تواند حذف شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. فرض کنید  $X = [0, 1]$  با اندازه لبگ و  $E = l_\infty$ . برای هر  $n \in N$ ، تابع  $f_n: X \rightarrow E$  با ضابطه

$$f_n(t) = (t, t, \dots, t, 0, 0, \dots)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $t$ ،  $n$  بار تکرار شده است. به وضوح،  $f_n(t) \uparrow f(t)$  که در آن  $f(t)$  دنباله ثابت  $t$  است. قرار دهید:  $\alpha_n = \int (f_n - f)(t) d\mu$ . حال فرض کنید  $\pi_i$  تصویر خطی مرتبه  $i$ -ام تعریف شده روی  $E$  باشد. از آن جاکه  $\pi_i$  پیوسته است، برای به اندازه کافی بزرگ  $i$  با استفاده از خواص انتگرال باختر داریم:

$$\pi_i(\alpha_n) = \int \pi_i(0, 0, \dots, 0, -t, -t, \dots) d\mu = \int_0^1 -t dt = -\frac{1}{2}$$

بنابراین،  $\alpha_n \not\rightarrow 0$ .

اکنون، گزاره ۱ را تعمیم می دهیم.

قضیه ۱. فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی باشد. هم چنین، فرض کنید  $(f_n)$  یک دنباله تقریباً کراندار ترتیبی از توابع انتگرال پذیر باختر از  $X$  به  $E$  باشد به طوری که  $f_n \xrightarrow{uo} f$ . در این صورت،  $f$  نیز باختر انتگرال پذیر است و داریم:

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

برهان. ابتدا این نکته را متذکر می‌شویم که با توجه به فرض،  $f_n(w) \xrightarrow{uo} f(w)$  تقریباً برای همه  $w \in X$  با استفاده از گزاره ۳،۷ در [۵]، دنباله  $(f_n(w))$  نسبت به نرم به  $f(w)$  همگرا است. بنابراین با استفاده از قضیه ۱،۲۶ [۶]، نتیجه می‌گیریم که  $f$  اندازه‌پذیر است. از آن‌جا برای همه  $w \in X$ ، دنباله  $(f_n(w))$  کراندار است، با استفاده از لم ۳،۶ در [۵] داریم:

$$\|f(w)\| \leq \liminf \|f_n(w)\| < \infty.$$

دقت کنید دنباله  $(f_n)$  کراندار است، بنابراین، بر اساس لم فاتو این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\int \|f(w)\| d\mu \leq \int \liminf \|f_n(w)\| d\mu \leq \liminf \int \|f_n(w)\| d\mu(w) < \infty.$$

از این‌رو، با توجه به قضیه ۱،۲۹ [۶]،  $f$  نیز باختر انتگرال‌پذیر است. توجه کنید با استفاده از لم ۳،  $B(X, E, \mu)$  نیز  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی است. استفاده مجدد از گزاره ۳،۷ در [۵]، حکم زیر را تضمین می‌کند.

$$\|f_n - f\| = \int \|(f_n - f)(w)\| d\mu(w) \rightarrow 0$$

علاوه بر این، اگر در قضیه ۱،  $uo$ -همگرایی را با همگرایی ترتیبی جای‌گزین کنیم، می‌توان شرط تقریباً کراندار ترتیبی بودن را از مفروضات نادیده گرفت.

**نتیجه ۱.** فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و  $E$  یک شبکه باناخ  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی باشد. همچنین، فرض کنید  $(f_n)$  دنباله‌ای کراندار از توابع انتگرال‌پذیر باختر از  $X$  به  $E$  باشد به‌طوری‌که  $f_n \xrightarrow{o} f$  در این صورت،  $f$  نیز باختر انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

**برهان.** ابتدا از فرض نتیجه می‌شود که  $f_n(w) \xrightarrow{o} f(w)$  برای تقریباً همه  $w \in X$  با استفاده از فرض  $\sigma$ -پیوسته ترتیبی بودن  $E$ ، نتیجه می‌گیریم که  $\|f_n(w)\| \rightarrow \|f(w)\|$  برای تقریباً همه  $w \in X$ . چون همگرایی ترتیبی،  $uo$ -همگرایی را نتیجه می‌دهد، با برهانی مشابه با برهان قضیه ۱ حکم ثابت می‌شود.

دقت کنید که شرط تقریباً کراندار ترتیبی بودن در قضیه ۱ ضروری است و نمی‌توان آن را حذف کرد. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال.** فرض کنید  $X = [0, 1]$  با اندازه لبگ و  $E = L^1[0, 1]$  دنباله  $(f_n)$  را از  $X$  به  $E$  به صورت  $f_n(w) = \delta_n$  در نظر بگیرید که در آن  $\delta_n$  بدین‌صورت تعریف می‌شود:  $n$  روی بازه  $[0, \frac{1}{n}]$  و صفر در بقیه جاها. به‌وضوح،  $\|\delta_n\| = 1$ .

مشاهده کنید که  $\delta_n \wedge 1 \downarrow 0$  که در آن تابع ثابت یک، یک‌ضعیف برای  $E$  است، از این‌رو، طبق نتیجه ۳،۵ در [۴]،  $\delta_n \xrightarrow{uo} 0$  اما  $\int f_n d\mu = \int \delta_n d\mu = 1$ . توجه کنید چون دنباله  $(f_n)$  به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر نیست، تقریباً کراندار ترتیبی نیست. یادآوری می‌کنیم که برای فضای اندازه  $(X, \Sigma, \mu)$ ، یک مجموعه  $A \subseteq L_1(\mu)$  به‌طور یکنواخت

انتگرال پذیر نامیده می شود هرگاه برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  موجود باشد به طوری که  $\int_E |f(w)| d\mu(w) < \varepsilon$  زمانی که  $f \in A$  و  $\mu(E) < \infty$  برای توضیحات بیش تر به قضیه ۵,۲,۹ در [۱] مراجعه شود.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و یک مشبکه باناخ باشد. در این صورت،  $E$  یک KB-فضا است اگر و تنها اگر  $B(X, E, \mu)$ ، KB-فضا باشد.

**برهان.** فرض کنید  $E$  یک KB-فضا است و  $(f_n)$  یک دنباله صعودی مثبت و کراندار در  $B(X, E, \mu)$  باشد. نتیجه می گیریم که برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $\int \|f_n(w)\| d\mu \leq M$  برای یک  $M \in \mathbb{R}_+$  توجه داشته باشید که دنباله  $(\int \|f_n(w)\| d\mu)$  نیز صعودی و کراندار در  $\mathbb{R}$  است از این رو، با توجه به قضیه لوی، به یک  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  همگرا است، بنابراین،  $\int (\|f_n(w)\| - \frac{\alpha}{\mu(X)}) d\mu \rightarrow 0$ . این نتیجه می دهد که دنباله  $(\|f_n\|) \subseteq L^1(\mu)$  نرم همگرا است. اما چون این دنباله، صعودی است، بنابراین،  $\|f_n(w)\| \uparrow \frac{\alpha}{\mu(X)}$  برای تقریباً همه  $w \in X$ . این به نوبه خود، نتیجه می دهد که این دنباله، تقریباً همه جا همگرا است از این رو، تقریباً همه جا کراندار است. از این رو، دنباله  $(f_n(w))$  کراندار و صعودی است و بنا به فرض به یک  $\alpha_w$  همگراست. تابع  $f: X \rightarrow E$  را با ضابطه  $f(w) = \alpha_w$  در نظر بگیرید. از آن جاکه  $f$  حد نقطه وار دنباله  $(f_n)$  است، با استفاده از قضیه ۱,۲۶ در [۶]، اندازه پذیر است. علاوه بر آن،  $f_n(w) \uparrow f(w)$  و لذا با توجه به گزاره ۱،  $f$  باختر انتگرال پذیر نیز است. اکنون از قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می شود که

$$\|f_n - f\| = \int \|f_n - f\|(w) d\mu(w) \rightarrow 0.$$

برای جهت عکس، از لم ۱ استفاده شود.

**قضیه ۳.** فرض کنید  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی و یک مشبکه باناخ باشد. در این صورت، نرم  $E$  به طور دنباله ای فاتو است اگر و تنها اگر نرم  $B(X, E, \mu)$  خاصیت مشابه را داشته باشد.

**برهان.** فرض کنید  $E$  دارای خاصیت دنباله ای فاتو باشد و  $(f_n)$  یک دنباله مثبت در  $B(X, E, \mu)$  باشد به طوری که  $f \uparrow f_n$  برای تقریباً همه  $w \in X$ . در این صورت، برای تقریباً همه  $w \in X$ ،  $f_n(w) \uparrow f(w)$  با توجه به فرض، نتیجه می گیریم که  $\|f_n(w)\| \uparrow \|f(w)\|$  از طرفی، دنباله  $(\|f_n(w)\|)$  نیز در اعداد حقیقی صعودی و کراندار است از این رو، برای تقریباً همه  $w \in X$ ،  $\|f_n(w)\| \rightarrow \|f(w)\|$ ، به بیان دیگر،

$$\|f(w)\| = \sup\{\|f_n(w)\|\} = \lim \|f_n(w)\|.$$

بنابراین، با استفاده از قضیه همگرایی یکنوا،

$$\int \|f_n(w)\| d\mu \rightarrow \int \|f(w)\| d\mu.$$

از این رو، می توان عبارت زیر را نتیجه گرفت:

$$\int \|f(w)\| d\mu = \int \sup \|f_n(w)\| d\mu = \sup \int \|f_n(w)\| d\mu.$$

یعنی

$$\|f\| = \sup \{\|f_n\|\}.$$

برای طرف دیگر، از لم ۱ استفاده شود.

### منابع

1. Albiac F., Kalton N. J., "Topics in Banach space theory", Graduate texts in Mathematics, 233, Springer, New York (2006).
2. Aliprantis C. D., Burkinshaw O., "Positive operators", (Springer 2006).
3. Cartwright D. I., "The order completeness of some spaces of vector-valued functions", Bull. Austral. Math. Soc, 11(1974) 57-61.
4. Gao N., Troitsky V. G., Xanthos F., "Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices", Israel J. Math., 220 (2017) 649-689.
5. Gao N., Xanthos F., "Unbounded order convergence and application to martingales without probability", J. Math. Anal. Appl., 415 (2014) 931-947.
6. Van Zuijlen W., "Integration of functions with values in a Riesz space", Radboud universiteit Nijmegen, Master thesis (July 2012).