

خوش‌وضعی قوی برای رده‌ای از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی با نگاشت‌های مجموعه‌مقدار

مهناز شمس، مرتضی اویسی‌ها*

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی محض

پذیرش ۹۹/۱۰/۱۵

دریافت ۹۹/۰۳/۰۳

چکیده

در این مقاله گسترشی از خوش‌وضعی را برای سیستمی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی که توابع درگیر نگاشت‌های مجموعه‌مقدار هستند، ارائه داده و مشخص‌سازی متریکی برای آنها به‌دست می‌آوریم. همچنین نشان می‌دهیم که خوش‌وضعی قوی در این حالت معادل با وجود و یکتایی جواب برای این نامساوی‌های تغییراتی چندمقداری دوبخشی است.

واژه‌های کلیدی: دنباله تقریب زننده، خوش‌وضعی، نامساوی تغییراتی، زیردیفرانسیل قائم.

مقدمه

مفهوم خوش‌وضعی برای اولین بار به‌وسیله تیخونوف^۱ [۱۱]، برای یک مسئله کمینه‌سازی معرفی شد و در ادامه در مورد نامساوی‌های تغییراتی، مسائل تعادل، مسائل نقطه ثابت و غیره بررسی شد [۳]، [۶]، [۹]، [۱۲]، [۱۳]. خوش‌وضعی تیخونوف برای یک مسئله بهینه‌سازی درگیر وجود و یکتایی جواب آن مسئله بهینه‌سازی است. همچنین دنباله‌های تقریب زننده باید که به آن جواب یکتا همگرا باشند. بعد از این مفهوم از خوش‌وضعی تعمیم‌های مختلفی از خوش‌وضعی از جمله خوش‌وضعی لوتین-پولیاک^۲، خوش‌وضعی پارامتری و α -خوش‌وضعی ارائه شدند. به‌واسطه ارتباط نزدیک مسائل بهینه‌سازی و نامساوی‌های تغییراتی، لوچتی^۳ و پاترونه^۴ (۱۹۸۱) [۷]، مفهوم خوش‌وضعی را برای نامساوی‌های تغییراتی ارائه دادند. در ادامه تحقیقات انجام شده در این زمینه، شیائو^۵ و همکارانش [۱۳] با در نظر گرفتن نامساوی‌های نیمه تغییراتی دو دسته از شرایط را ارائه دادند که تحت آنها خوش‌وضعی قوی و ضعیف از نامساوی‌های نیمه تغییراتی معادل با وجود و یکتایی جواب برای این‌گونه مسائل است.

نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی اولین بار به‌وسیله سنسور^۶ و همکارانش [۲] معرفی شدند. این نامساوی‌های تغییراتی به‌صورت دو نامساوی تغییراتی هستند که به‌وسیله تابعی به هم وابسته می‌شوند. بنابراین مفاهیم مختلف خوش‌وضعی که در بالا به آن اشاره شد را می‌توان برای این‌گونه از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی به کار برد [۴].

*نویسنده مسئول oveisiha@sci.ikiu.ac.ir

1. Tykhonov
2. Levitin-Polyak
3. Lucchetti
4. Patrone
5. Xiao
6. Censor

[۱۰]. در سال ۲۰۱۹ هو^۱ و همکارانش [۵]، این مفهوم را برای نامساوی‌های تغییراتی-نیمه تغییراتی دوبخشی در فضاهای باناخ انعکاسی به کار بردند و شرایط معادل برای خوش‌وضع قوی و ضعیف از این گونه نامساوی‌ها ارائه دادند. با الهام از نتایج [۵]، [۶]، [۱۰]، در این مقاله مفهوم خوش‌وضع را به یک سیستم از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی گسترش می‌دهیم که توابع درگیر، توابعی مجموعه‌مقدار هستند. هم‌چنین با استفاده از مفهوم زیردیفرانسیل قائم برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار نتایجی معادل برای خوش‌وضع قوی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی ارائه می‌دهیم. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم به طور خلاصه مفاهیم مقدماتی و برخی نتایج که در ادامه به آنها نیاز داریم ارائه می‌شود. در بخش سوم مشخص سازی متریکی از خوش‌وضع قوی برای این نامساوی‌های تغییراتی آورده می‌شود. هم‌چنین شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن خوش‌وضع قوی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی معادل با وجود و یکتایی جواب برای آن باشد.

مفاهیم اولیه

در این مقاله X را فضایی باناخ در نظر می‌گیریم و منظور از B_X و S_X به ترتیب گوی واحد بسته و کره واحد در X است. نگاشت مجموعه مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ بین دو فضای باناخ را در نظر بگیرید. در این صورت دامنه و نمودار F به ترتیب بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\text{dom} F = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\},$$

$$\text{gr} F = \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}.$$

حال به بیان مفاهیمی از زیردیفرانسیل و هم‌مشتق می‌پردازیم که در بخش بعدی به آن نیاز داریم.

تعریف ۱. [۸]، فرض کنید $\Omega \subset X$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد و $x \in \Omega$ و $\varepsilon \geq 0$. مجموعه ε -قائم به Ω در نقطه x بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\hat{N}_\varepsilon(\bar{x}; \Omega) := \{x^* \in X | \limsup_{\substack{u \rightarrow x \\ u \in \Omega}} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \leq \varepsilon\}.$$

در حالتی که $\varepsilon = 0$ باشد مجموعه بالا را مخروط قائم منظم به Ω در x می‌گوییم و با نماد $\hat{N}(x; \Omega)$ نمایش می‌دهیم. برای $\bar{x} \in \Omega$ ، مخروط قائم اساسی به Ω در $\bar{x}$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$N(\bar{x}; \Omega) := \limsup_{\substack{u \rightarrow \bar{x}, \varepsilon \downarrow 0}} \hat{N}_\varepsilon(x; \Omega).$$

فرض کنید فضای Y به کمک مخروط غیر تهی، محدب و بسته K مرتب جزئی شده باشد. رابطه ترتیب جزئی در Y را با " " نمایش داده و بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_2 - y_1 \in K.$$

حال با استفاده از ترتیب جزئی القاء شده به وسیله مخروط K بر Y بالا نمودار نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\text{epi} F = \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x) + K\}.$$

در ادامه مفاهیم هم‌مشتق و زیردیفرانسیل را برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار بیان می‌کنیم.

تعریف ۲. [۸]، نگاشت مجموعه‌مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ را در نظر گرفته و فرض کنید $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gr} F$. در این صورت هم‌مشتق قائم F در $(\bar{x}, \bar{y})$ را نگاشت مجموعه‌مقدار $D_N^* F(\bar{x}, \bar{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ در نظر می‌گیریم که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$D_N^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \text{gr}F)\}.$$

تعریف ۳. [۸]، نگاشت مجموعه‌مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ را در نظر بگیرید. در این صورت نگاشت زیرنموداری $\mathcal{E}_F: X \rightrightarrows Y$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{E}_F(x) := \{y \in Y | y \in F(x) + K\}.$$

حال با استفاده از نگاشت زیرنموداری تعریف شده در بالا زیردیفرانسیل قائم F در نقطه $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{epi}F$ و در جهت $y^* \in Y^*$ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\partial F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := D_N^*\mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

تعریف ۴. [۸]، نگاشت $F: \Omega \subset X \rightrightarrows Y$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\text{dom}F \neq \emptyset$.

۱. F را در نقطه $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gr}F$ لیپ‌شیتس‌گون گوئیم، اگر همسایگی‌های U از $\bar{x}$ و V از $\bar{y}$ و ثابت $l \geq 0$ موجود باشد به‌قسمی که

$$F(x) \cap V \subset F(u) + l\|x - u\|B_Y, \quad \forall x, u \in \Omega \cap U.$$

۲. F را در نقطه $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gr}F$ زیرلیپ‌شیتس‌گون گوئیم اگر $\mathcal{E}_F$ در این نقطه لیپ‌شیتس‌گون باشد.

تعریف ۵. نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ را در نظر بگیرید. نگاشت مجموعه‌مقدار $\partial F: X \times Y \times Y^* \rightrightarrows X^*$ را یکنوای آسوده گوئیم اگر ثابت α موجود باشد به‌قسمی که برای هر $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ و $x_i \in X$ ، عناصر $y_i \in F(x_i)$ به‌قسمی موجود باشند که برای هر $(\xi_i \in \partial F(x_i, y_i)(y^*))$ ، $i = 1, 2$ داشته باشیم

$$\langle \xi_2 - \xi_1, x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2.$$

اگر $T: X \rightarrow X^*$ عملگری تک‌مقداری باشد مفهوم یکنوای آسوده برای T به‌صورت زیر تغییر می‌کند که ثابت α موجود باشد به‌قسمی که برای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$\langle T(x_2) - T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2.$$

ملاحظه ۶: درحالی‌که $\alpha = 0$ ، تعریف مذکور به تعریف عملگرهای یکنوا تقلیل می‌یابد.

تعریف ۷. [۱۴]، نگاشت $T: X \rightarrow X^*$ را نیمه‌پیوسته گوئیم، اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ تابع $t \mapsto \langle T(x_1 + tx_2), x_2 \rangle$ از $[0, 1]$ به $[-\infty, +\infty]$ در ۰ از راست پیوسته باشد.

در ادامه به بیان نامساوی تغییراتی دوبخشی می‌پردازیم. فرض کنید $T: X \rightarrow X$ ، $g_i \in X^*$ ، $A_i: X \rightarrow X^*$ و $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی داده شده باشند. نامساوی تغییراتی دوبخشی وابسته به (A_i, g_i, F_i, T) را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$SVI(A_i, g_i, F_i, T)$ یافتن $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$ به‌قسمی که برای هر $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ و $\xi_i \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ ، موجود باشند که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ \langle A_1\bar{x}_1 - g_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq 0, \\ \langle A_2\bar{x}_2 - g_2 + \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq 0. \end{cases}$$

تعریف ۸. دنباله $\{(x_1^n, x_2^n)\} \subseteq X \times X$ را یک دنباله تقریب زننده برای (SVI) گوئیم، اگر دنباله نامنفی $\{\varepsilon_n\}$ با $\varepsilon_n \downarrow 0$ به‌قسمی موجود باشد که برای هر $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ دنباله‌های $y_i^n \in F_i(x_i^n)$ و $\xi_i^n \in \partial F(x_i^n, y_i^n)(y^*)$ برای $i = 1, 2$ چنان موجود باشند که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon_n, \\ \langle A_1x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_1 - x_1^n\|, \\ \langle A_2x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_2 - x_2^n\|. \end{cases}$$

تعریف ۹. نامساوی تغییراتی دوبخشی $SVI(A_i, g_i, F_i, T)$ را به‌طور قوی خوش‌وضع گوئیم اگر آن دارای جواب یکتا بوده است و هر دنباله تقریب زننده نیز به آن جواب یکتا همگرا باشد.

نتایج اصلی

هدف اصلی این بخش بیان شرایطی است که نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI به‌طور قوی خوش‌وضع باشد. به‌ویژه، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن خوش‌وضع قوی نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI معادل با وجود و یکتایی جواب برای آن باشد.

قضیه ۱۰. فرض کنید $A_i: X \rightarrow X^*$ عملگری نیمه‌پیوسته و یکنوای آسوده باضریب c_i بوده و $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشتی زبرلیپ‌شیتس‌گون باشد به‌طوری‌که زیردیفرانسیل قائم آن ∂F_i یکنوای آسوده با ضریب α_i باشد که $i = 1, 2$. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

i. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از نامساوی تغییراتی دوبخشی $SVI(A_i, g_i, F_i, T)$ است.

ii. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از نامساوی تغییراتی دوبخشی تعریف شده در زیر است:

$ASVI(A_i, g_i, F_i, T)$: یافتن $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ به‌قسمی که برای هر $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $y_i \in F_i(x_i)$ و $x_i^* \in \partial F_i(x_i, y_i)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ ، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ \langle A_1 x_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq 0, \\ \langle A_2 x_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq 0. \end{cases}$$

در این صورت $(i) \Leftarrow (ii)$ و اگر $c_i + \alpha_i \geq 0$ برای $i = 1, 2$ آن‌گاه $(i) \Leftarrow (ii)$.

اثبات. $(i) \Leftarrow (ii)$: فرض کنید $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI باشد. بنابراین برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ و $\bar{x}_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ ، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ \langle A_1 x_1 - g_1 + \bar{x}_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq 0, \\ \langle A_2 x_2 - g_2 + \bar{x}_2^*, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq 0. \end{cases} \quad (۱)$$

با استفاده از یکنوایی آسوده ∂F_i ، برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $y_i \in F_i(x_i)$ موجود است به‌قسمی که برای هر $x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ داریم:

$$\begin{cases} \langle x_1^* - \bar{x}_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq \alpha_1 \|x_1 - \bar{x}_1\|^2, \\ \langle x_2^* - \bar{x}_2^*, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq \alpha_2 \|x_2 - \bar{x}_2\|^2. \end{cases} \quad (۲)$$

حال با استفاده از یکنوایی آسوده عملگر A_i و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \langle A_1 x_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle &\geq \langle A_1 x_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle - \langle A_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \\ &= \langle A_1 x_1 - A_1 \bar{x}_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle + \langle x_1^* - \bar{x}_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \\ &\geq (c_1 + \alpha_1) \|x_1 - \bar{x}_1\|^2, \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$\langle A_2 x_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq (c_2 + \alpha_2) \|x_2 - \bar{x}_2\|^2,$$

که نشان می‌دهد $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از $ASVI$ است.

$(ii) \Leftarrow (i)$: برعکس اگر $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از $ASVI$ باشد، برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر

عناصر $y_i \in F_i(x_i)$ و $x_i^* \in \partial F_i(x_i, y_i)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ ، موجودند به‌قسمی که

$$\langle A_i x_i - g_i + x_i^*, x_i - \bar{x}_i \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (۳)$$

برای هر $z = (z_1, z_2) \in X \times X$ و $t \in [0, 1]$ قرار دهید

$$x_1(t) = \bar{x}_1 + t(z_1 - \bar{x}_1), \quad x_2(t) = \bar{x}_2 + t(z_2 - \bar{x}_2).$$

با قرار دادن $x_i(t)$ در رابطه (۳) به جای x_i داریم

$$\langle A_i(\bar{x}_i + t(z_i - \bar{x}_i)) - g_i + x_{t_i}^*, z_i - \bar{x}_i \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

که $x_{t_i}^* \in \partial F_i(x_i(t), y_i(t))(y^*)$ و $y_i(t) \in F_i(x_i(t))$ برای $i = 1, 2$ حال چون F_i نگاشتی زیرلیپ‌شیتس‌گون بوده و $x_i(t) \rightarrow \bar{x}_i$ و $y_i(t) \rightarrow \bar{y}_i$ هنگامی که $t \rightarrow 0$ بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $x_{t_i}^* \rightarrow x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ با $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ برای $i = 1, 2$ حال از نیمه‌پیوستگی عملگر A_i بر داریم که

$$\langle A_i \bar{x}_i - g_i + x_i^*, z_i - \bar{x}_i \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

بنابراین دلخواه بودن $z = (z_1, z_2) \in X \times X$ نتیجه می‌دهد که $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI می‌باشد.

اینک برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه $\Omega(\varepsilon)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(\varepsilon) := \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X^2 \mid \|\bar{x}_2 - T\bar{x}_1\| \leq \varepsilon, \forall x_i \in X, y^* \in K^+ \cap S_{Y^*} \exists \bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i), x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$$

$$s.t. \langle A_i \bar{x}_i - g_i + x_i^*, x_i - \bar{x}_i \rangle \geq -\varepsilon \|x_i - \bar{x}_i\|, i = 1, 2\}$$

لم ۱۱. فرض کنید $A_i: X \rightarrow X^*$ ، $i = 1, 2$ ، توابعی نیمه‌پیوسته باشند. اگر $T: X \rightarrow X$ عملگری پیوسته باشد،

آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه‌ای بسته قوی است.

اثبات: فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\} \subset \Omega(\varepsilon)$ دنباله‌ای همگرا به $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ باشد. بنابراین برای هر $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $x_i^n \in X$ و $y_i^n \in F_i(x_i^n)$ و $x_i^n \in \partial F_i(x_i^n, y_i^n)(y^*)$ ، $i = 1, 2$ ، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon, \\ \langle A_1 x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n \rangle \geq -\varepsilon \|x_1 - x_1^n\|, \\ \langle A_2 x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n \rangle \geq -\varepsilon \|x_2 - x_2^n\|. \end{cases} \quad (۴)$$

حال چون F_1 و F_2 توابعی زیرلیپ‌شیتس‌گون هستند، زیردنباله‌هایی از ξ_1^n و ξ_2^n موجودند که در توپولوژی ضعیف ستاره به عناصری چون $\bar{\xi}_1$ و $\bar{\xi}_2$ به‌ترتیب در $\partial F(\bar{x}_1, \bar{y}_1)(y^*)$ و $\partial F(\bar{x}_2, \bar{y}_2)(y^*)$ همگرایند که $\bar{y}_1 \in F(\bar{x}_1)$ و $\bar{y}_2 \in F(\bar{x}_2)$.

با در نظر گرفتن (۴) با این زیردنباله‌های همگرا و اعمال حد بر دو طرف روابط و دانستن این موضوع که A_i ها

نگاشت‌هایی نیمه‌پیوسته‌اند، داریم

$$\begin{cases} \|\bar{x}_2 - T\bar{x}_1\| \leq \varepsilon, \\ \langle A_1 \bar{x}_1 - g_1 + \bar{\xi}_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq -\varepsilon \|x_1 - \bar{x}_1\|, \\ \langle A_2 \bar{x}_2 - g_2 + \bar{\xi}_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq -\varepsilon \|x_2 - \bar{x}_2\|, \end{cases}$$

یعنی $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega(\varepsilon)$. بنابراین $\Omega(\varepsilon)$ مجموعه‌ای بسته است.

قضیه ۱۲. فرض کنید T عملگری پیوسته، $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی زیرلیپ‌شیتس‌گون و $A_i: X \rightarrow X^*$ ، $i = 1, 2$ ،

توابعی نیمه‌پیوسته و یکنوا باشند. در این صورت SVI به‌طور قوی خوش‌وضع است اگر و تنها اگر

$$\Omega(\varepsilon) \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{diam}(\Omega(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ هنگامی که } \varepsilon \rightarrow 0.$$

اثبات: لزوم: واضح است که اگر SVI دارای جواب یکتا باشد آن‌گاه این جواب برای هر $\varepsilon > 0$ به مجموعه $\Omega(\varepsilon)$

متعلق است. حال با استفاده از برهان خلف فرض کنید، هنگامی که ε به صفر میل کند $\Omega(\varepsilon)$ به صفر همگرا نباشد.

بنابراین $\delta > 0$ و دنباله‌های $\varepsilon_k \downarrow 0^+$ ، $x^k = (x_1^k, x_2^k) \in \Omega(\varepsilon_k)$ و $z^k = (z_1^k, z_2^k) \in \Omega(\varepsilon_k)$ موجودند به‌قسمی که

$$\|x^k - z^k\| = \|(x_1^k, x_2^k) - (z_1^k, z_2^k)\| \geq \delta, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

حال چون $(x_1^k, x_2^k), (z_1^k, z_2^k)$ هر دو برای هر k به مجموعه $\Omega(\varepsilon_k)$ متعلق هستند، پس هر دو دنباله تقریب زنده‌ای از SVI هستند و با توجه به خوش‌وضع بودن قوی SVI، پس هر دو به جواب یکتای آن همگرا هستند که در تناقض با (5) است. بنابراین اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ در این صورت $\text{diam}(\Omega(\varepsilon)) \rightarrow 0$.

کفایت: فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای تقریب زنده برای SVI باشد. بنابراین اعداد حقیقی مثبت $\varepsilon_n \rightarrow 0$ موجود است به‌قسمی که برای هر $(x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ دنباله‌های $(y_1^n, y_2^n) \in F(x_1^n) \times F(x_2^n)$ و $(\xi_1^n, \xi_2^n) \in \partial F_1(x_1^n, y_1^n)(y^*) \times \partial F_2(x_2^n, y_2^n)(y^*)$ موجودند که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon, \\ \langle A_1 x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_1 - x_1^n\|, \\ \langle A_2 x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_2 - x_2^n\|. \end{cases} \quad (6)$$

بنابراین از بالا نتیجه می‌گیریم که $x^n = (x_1^n, x_2^n) \in \Omega(\varepsilon_n)$ حال چون $\text{diam}(\Omega(\varepsilon)) \rightarrow 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای کوشی است که به نقطه‌ای چون $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$ همگرا است. چون $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ را ثابت در نظر بگیرید. چون F_1 و F_2 نگاشت‌هایی زبرلیپ‌شیتس‌گون هستند، زبردنباله‌هایی از ξ_1^n و ξ_2^n همگرا به عناصری مانند $\xi_1 \in \partial F(\bar{x}_1, \bar{y}_1)(y^*)$ و $\xi_2 \in \partial F(\bar{x}_2, \bar{y}_2)(y^*)$ در توپولوژی ضعیف‌ستاره موجودند که $y_1 \in F(x_1)$ و $y_2 \in F(x_2)$ با اعمال حد بر دو طرف رابطه (6) و در نظر گرفتن این واقعیت که A_1 و A_2 عملگرهایی یکنوا هستند، داریم

$$\begin{aligned} \langle A_1 x_1 - g_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle A_1 x_1^{n_i} - g_1 + \xi_1^{n_i}, x_1 - x_1^{n_i} \rangle \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \langle A_1 x_1^{n_i} - g_1 + \xi_1^{n_i}, x_1 - x_1^{n_i} \rangle \geq \lim_{i \rightarrow \infty} -\varepsilon_{n_i} \|x_1 - x_1^{n_i}\| = 0. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت که

$$\langle A_2 x_2 - g_2 + \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq 0.$$

از طرفی با استفاده از پیوستگی عملگر T داریم $T(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$ حال با استفاده از قضیه ۱ نتیجه می‌گیریم که $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI است و چون $\text{diam}(\Omega(\varepsilon)) \rightarrow 0$ هنگامی که $\varepsilon \rightarrow 0$ می‌توان نتیجه گرفت که جواب SVI یکتا است. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

حال شرایطی را بیان می‌کنیم که وجود و یکتایی جواب از SVI معادل خوش‌وضع قوی آن باشد. بدین منظور ابتدا حکم زیر را بیان می‌کنیم.

حکم ۱۳. [۶]، فرض کنید $C^* \subset X^*$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی، محدب، بسته و کراندار و $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی نیم‌پیوسته پایینی، محدب و سره باشد و $y \in X$ دل‌خواه. فرض کنید برای هر $x \in X$ ، $x^*(x) \in C^*$ موجود باشد به‌قسمی که

$$\langle x^*(x), x - y \rangle \geq \varphi(y) - \varphi(x).$$

در این صورت $y^* \in C^*$ موجود است به‌قسمی که

$$\langle y^*, x - y \rangle \geq \varphi(y) - \varphi(x), \quad \forall x \in X.$$

قضیه ۱۴. فرض کنید $A_i: X \rightarrow X^*$ توابعی یکنوای آسوده با ثابت c_i ، $i = 1, 2$ و $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی زبرلیپ‌شیتس‌گون باشند که زیردیفرانسیل قائم آنها یکنوای آسوده با ثابت α_i ، $i = 1, 2$ هستند. اگر برای $i = 1, 2$ ، $\alpha_i + c_i > 0$ ، در این صورت SVI به‌طور قوی خوش‌وضع است اگر و تنها اگر آن دارای جواب یکتا باشد.

اثبات: لزوم حکم به‌راحتی از تعریف خوش‌وضعی قوی نتیجه می‌شود. برای کفایت فرض کنید نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI دارای جواب یکتای $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ باشد. در این صورت برای هر (x_1, x_2) و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$

$$\text{عناصر } \bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i) \text{ و } x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*) \text{ } i = 1, 2 \text{ موجودند به‌قسمی که}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ \langle A_1\bar{x}_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \geq 0, \\ \langle A_2\bar{x}_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

حال فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای تقریب زنده برای نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI باشد. در نتیجه دنباله $\varepsilon_n \downarrow 0$ موجود است که برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $y_i^n \in F_i(x_i^n)$ و $i = 1, 2$ موجودند که

$$\begin{cases} \|Tx_1^n - x_2^n\| \leq \varepsilon_n, \\ \langle A_1x_1^n - g_1 + \xi_1^n(x_1, y^*), x_1 - x_1^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_1 - x_1^n\|, \\ \langle A_2x_2^n - g_2 + \xi_2^n(x_2, y^*), x_2 - x_2^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_2 - x_2^n\|. \end{cases}$$

حال مجموعه‌های کراندار، محدب و غیرتهی

$$\begin{aligned} & \text{co}\{A_i x_i^n - g_i + \xi_i^n(x_i, y^*) | y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}, y_i^n \in F_i(x_i^n), \xi_i^n(x_i, y^*) \\ & \in \partial F_i(x_i^n, y_i^n)(y^*)\}, i = 1, 2, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت با استفاده از حکم بالا با توابع $\varphi_i(x) = \varepsilon_n \|x_i - x_i^n\|$ عناصر ξ_i^n که مستقل از x_i و y^* هستند موجودند به‌قسمی که

$$\langle A_i x_i^n - g_i + \xi_i^n, x_i - x_i^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_i - x_i^n\|, \quad \forall x_i \in X, \quad i = 1, 2.$$

توجه کنید که عناصر ξ_i^n را می‌توان به‌صورت $\xi_i^n = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \xi_{ij}^n$ انتخاب کرد که $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} = 1$ ، $m_i \in \mathbb{N}$ و $\xi_{ij}^n \in \partial F_i(x_i^n, y_{ij}^n)(y_j^*)$ که $i = 1, 2$. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \langle A_i x_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, x_i - x_i^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|x_i - x_i^n\|, \quad \forall x_i \in X, \quad i = 1, 2.$$

حال با قراردادن $x_i = \bar{x}_i$ در نامساوی بالا داریم

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \langle A_i x_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n \rangle \geq -\varepsilon_n \|\bar{x}_i - x_i^n\|.$$

از یکنوایی آسوده عملگرهای A_i و ∂F_i ، $i = 1, 2$ در نامساوی بالا داریم

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n \|\bar{x}_i - x_i^n\| & \leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \langle A_i x_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n \rangle \\ & \leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} [\langle A_i x_i^n + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n \rangle - \langle A_i \bar{x}_i + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n \rangle] \\ & = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} [\langle A_i x_i^n - A_i \bar{x}_i + \xi_{ij}^n - \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n \rangle] \leq -(c_i + \alpha_i) \|\bar{x}_i - x_i^n\|, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2,$$

که $\bar{y}_i \in F(\bar{x}_i)$ و $\xi_{ij}^n \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y_j^*)$ از رابطه (7) با قرار دادن $x_i = x_i^n$ ، $i = 1, 2$ به‌دست می‌آیند.

حال چون $c_i + \alpha_i > 0$ برای $i = 1, 2$ داریم

$$\|\bar{x}_i - x_i^n\| \leq \frac{\varepsilon_n}{c_i + \alpha_i}, \quad i = 1, 2,$$

که با گرفتن حد از دو طرف رابطه بالا نتیجه می‌شود که x_i^n به $\bar{x}_i$ برای $i = 1, 2$ همگراست.

ملاحظه ۱۵. قضیه ۱۴، قضیه ۱۳ [۱۳] را از نامساوی‌های نیمه‌تغییراتی و قضیه ۲.۴ [۵] را از نامساوی‌های تغییراتی-نیمه‌تغییراتی دوبخشی تعریف شده به‌وسیله زیردیفرانسیل کلارک که همواره محدب است، به نامساوی‌های تغییراتی چندمقداری دوبخشی که توابع درگیر نگاشت‌های مجموعه مقدار هستند، با استفاده زیردیفرانسیل قائم که لزوماً محدب نیست، تعمیم و گسترش می‌دهد.

منابع

1. Bao T. Q., Mordukhovich B. S., "Variational principles for set-valued mappings with applications to multiobjective optimization", Control Cyber, 36 (2007) 531-562.
2. Censor Y., Gibali A., Reich S., "Algorithms for the split variational inequality problem", Numer. Algorithms. 59 (2012) 301-323.
3. Fang Y. P., Hu R., "Parametric well-posedness for variational inequalities defined by bifunctions", Comput. Math. Appl, 53 (2007) 1306-1316.
4. Hu R., Fang Y. P., "Characterization of Levitin-Polyak well-posedness by perturbation for the split variational inequality problem", Optimization, 65 (2016) 1717-1732.
5. Hu H., Xiao Y. B., Huang N. J., Wang X., "Equivalence results of well-posedness for split variational-hemivariational inequalities", J. Nonlinear Convex Anal., 20 (2019) 447-459.
6. Khakrah E., Razani A., Mirzaei R., Oveisih M., "Some metric characterizations of well-posedness for hemivariational-like inequalities", J. Nonlinear Funct. Anal., (2017) Article ID 44.
7. Lucchetti R., Patrone F., "A characterization of Tykhonov well-posedness for minimum problems with applications to variational inequalities", Numr. Funct. Anal. Optim, 3 (1981) 461-476.
8. Mordukhovich B. S., "Variational Analysis and Generalized Differential I", Basic theory, 1st ed., ser. Grundlehren. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, Vol. 330 (2006).
9. Reich S., Zaslavski A. J., "Generic well-posedness of fixed point problems", Vietnam J. Math., 46 (2017) 1-9.
10. Shu Q., Hu Y. R., Xiao Y. B., "Metric characterizations for well-posedness of split hemivariational inequalities", J. Ineq. Appl., 190 (2018) 1-17.
11. Tykhonov A. N., "On the stability of the functional optimization problem", USSR Comput. Math. Math. Phys., 6 (1966) 28-33.
12. Xiao Y., Huang N., "Well-posedness for a class of variational-hemivariational inequalities with perturbations", J. Optim. Theory Appl., 151 (2011) 33-51.
13. Xiao Y. B., Yang X., Huang N. J., "Some equivalence results for well-posedness of hemivariational inequalities", J. Global Optim., 61 (2015) 789-802.
14. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and its Applications", Springer, Berlin Heidelberg, Vol. II (1990).