مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

مهدی رشیدی کوچی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کهنوج، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۵/۰۱۱ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

در این مقاله مفهوم مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده با شبکه یکنواخت تعریف شده است. این تعریف تعمیمی از مجموعه‌های موجک در فضای اقلیدسی است. سپس با استفاده از تبدیل فوریه و تجزیهٔ چند ریزه‌ساز این مجموعه‌ها مشخص شده‌اند. در ادامه مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و بررسی شده‌اند و ارتباط بین مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته و مجموعه‌های موجک بیان شده است. در پایان با تعریف تابع بعد موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته مشخص شده و رابطهٔ آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: موجک، گروه آبلی موضعاً فشرده، مجموعه موجک، تجزیهٔ چند ریزه‌ساز، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته.

مقدمه

یکی از مفاهیم اساسی در نظریه موجک، مجموعه موجک است. مفهوم مجموعه موجک به‌وسیلهٔ دای و لارسون [۷] ارائه شد. تقریباً هم‌زمان فنگ و ونگ [۹] مفهوم موجک فرکانسی با محمل مینیمال را معرفی کردند. مجموعه‌های موجک منبعی از مثال‌ها و به‌ویژه مثال‌های نقض در نظریه موجک است. یکی از این مثال‌ها مجموعهٔ موجک یورن است که برای اولین بار نشان داد موجک‌هایی موجودند که ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز ندارند. چنین نتیجه‌ای نقش بسیار پراهمیتی در گسترش نظریه موجک داشته است. برای برای بررسی بیش‌تر در مورد موجک‌ها می‌توان به مرجع ارزشمند [۶] مراجعه کرد.

نظریه موجک در حالت گروه‌ها به‌طور وسیعی بررسی شده است برخی از منابع عبارتند از [۱]-[۳]، [۱۳] و [۱۴]. در این جا مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و بررسی شده است. در ادامه با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز و تبدیل فوریه، مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده مشخص شده‌اند. سپس مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و رابطهٔ آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده تعمیمی از نتایج [۴]، [۵]، [۷] و [۹] برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده است.

این مقاله بدین‌صورت بخش‌بندی شده است: در بخش ۲، ابتدا گروه‌های آبلی موضعاً فشرده بررسی و مورد مطالعه قرار گرفته است. سپس مجموعه‌های موجک روی گروهای آبلی موضعاً فشرده تعریف شده‌اند. در بخش ۳، ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده بررسی شده و با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز و تبدیل فوریه مشخص شده‌اند. در بخش ۴، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و با استفاده از مفهوم تابع بعد موجک رابطهٔ آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است.

*نویسنده مسئول rashidimehdi20@gmail.com

پیش نیازها و مفاهیم اولیه

در این بخش ابتدا گروه‌های آبلی موضعاً فشرده و به‌ویژه گروه‌هایی که دارای شبکه یکنواخت هستند، بررسی و مطالعه شده است. سپس نظریه موجک و مجموعه‌های موجک روی گروهای آبلی موضعاً فشرده تعریف شده‌اند. برای مشاهده جزئیات بیش‌تر می‌توان از منابع [۸]، [۱۳] و [۱۵] استفاده کرد.

فرض کنید G گروه آبلی موضعاً فشرده هاسدورف و $\widehat{G}$ گروه دوگان متناظر با آن باشد. یعنی

$$\widehat{G}=\{\xi : G\to \mathbb{C}\}$$

که ξ کاراکتر پیوسته‌ای از G است با این خواص:

۱. $|\xi(x)|=1$ برای هر $x\in G$؛

۲. $\xi(x+y)=\xi(x)\xi(y)$ برای هر $x,y\in G$.

در اینجا از نماد (x,ξ) برای عدد مختلط $\xi(x)$ استفاده می‌شود.

دو گروه G و G' را به‌طور توپولوژیکی ایزومورف گویند و به‌صورت $G\cong G'$ نمایش می‌دهند هرگاه یک ایزومورفیسم جبری که همئومورفیسم نیز هست از G به روی G' وجود داشته باشد.

فرض کنید $H\subseteq G$ زیرگروه بسته‌ای از گروه آبلی و موضعاً فشرده G است. زیر گروه $H^{\perp}$ از $\hat{G}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنند:

$$H^{\perp}=\{\xi\in\hat{G}:(h,\xi)=1,\forall h\in H\}.$$

گروه پوچ ساز H با دوگان گروه خارج قسمتی G/H و دوگان H با گروه خارج قسمتی $\widehat{G}/H^{\perp}$ به‌طور توپولوژیکی ایزومورف است، یعنی به‌ترتیب $H^{\perp}\cong (G/H)^{\wedge}$ و $\widehat{H}\cong\widehat{G}/H^{\perp}$[۱۵].

تعریف ۱ نقش کلیدی در این مقاله دارد.

تعریف ۱. [۱۱]، فرض کنید G گروه آبلی موضعاً فشرده و H زیر گروه گسسته‌ای از G باشد. در این صورت H را شبکه یکنواخت در G گویند هرگاه گروه خارج قسمتی G/H فشرده باشد.

فرض کنید H یک شبکه یکنواخت برای گروه آبلی و موضعاً فشرده G باشد. در این صورت H در G بسته و هم‌چنین $H^{\perp}$ در $\hat{G}$ بسته و گسسته است. به‌علاوه $\hat{G}/H^{\perp}$ فشرده است. در نتیجه می‌توان گفت $H^{\perp}$ شبکه یکنواخت در $\hat{G}$ است.

روی هر گروه آبلی موضعاً فشرده یک اندازۀ هار موجود است. یعنی اندازۀ برل منظم و غیر منفی m_G که برابر صفر نبوده و انتقال پایا است. این اندازه در حد مقادیر ثابت یکتا است.

فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده، H زیر گروه بسته‌ای از G و $f\in L^1(G)$ باشد. در این صورت بنا به فرمول وایل [۱۵] اندازه‌های هار m_G، m_H و $m_{G/H}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که

$$\int_G f(x)dm_G(x)=\int_{G/H}\int_H f(x+h)dm_H(h)dm_{G/H}([x]).$$

[x] نشان‌دهندۀ هم دسته‌های x در مجموعه خارج قسمت G/H است.

برای تابع $f\in L^1(G)$ تبدیل فوریه f برای هر ξ در $\hat{G}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(\xi)=\int_G f(x)(x,-\xi)dm_G(x).$$

تبدیل فوریه یک عملگر خطی از $L^1(G)$ به توی $C_0(\hat{G})$است. جایی که $C_0(\hat{G})$ مجموعه‌ای از توابع پیوسته است که در بینهایت صفر می‌شوند. یعنی برای هر $\in>0$ مجموعهٔ فشرده $K\subseteq G$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x\in K^c$ داشته باشیم $|f(x)|<\in$.

اندازهٔ هار گروه دوگان $\hat{G}$ از G می‌تواند طوری نرمال شود که برای کلاس خاصی از توابع، فرمول فوریه معکوس برقرار باشد

$$f(x)=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\xi)(x,\xi)dm_{\hat{G}}(\xi),x\in G.$$

در این حالت می‌توان تبدیل فوریه روی $L^1(G)\bigcap L^2(G)$ را به یک عملگر یکه از $L^2(G)$ به روی $L^2(\hat{G})$ توسیع داد. این تبدیل را تبدیل پلانشرل گویند و تساوی پارسوال برقرار است. یعنی برای هر f, g در $L^2(G)$ داریم:

$$\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle.$$

اگر G یک گروه آبلی فشرده باشد، آن‌گاه $\hat{G}$ پایه متعامد برای $L^2(G)$ است.

در ادامه این بخش اصطلاحات بنیادی از نظریه موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده را بیان می‌شود. فرض می‌کنیم که G یک گروه آبلی موضعاً فشرده با اندازهٔ هار m_G و شبکه یکنواخت H است. عملگر انتقال یکه T_hروی $L^2(G)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$T_hf(x)=f(x+h),h\in H.$$

فرض کنید A خودریختی روی گروه آبلی و موضعاً فشرده G باشد که تحدید آن به H پایا است. عملگر اتساع یکه D_A برای هر x متعلق به $L^2(G)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$D_Af(x)=\sqrt{|A|}f(Ax).$$

برای هر مجموعه اندازه پذیر $K\subseteq G$ داریم $m_G(A(K))=|A|m_G(K)$ و $|A|\neq 1$ ([۱۳]).

تعریف ۲. مجموعهٔ $\{\psi_i\in L^2(G):i=1,...,L\}$موجک چندگانه برای $L^2(G)$ گفته می‌شود، هرگاه مجموعه

$$\{D_A^jT_h\psi_i:1\leq i\leq L,h\in H,j\in Z\}$$

تشکیل پایه متعامد برای $L^2(G)$ دهد.

در این صورت، مشابه حالت اقلیدسی، آنالیز چند ریزه‌ساز روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف می‌شود.

تعریف ۳. فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده با شبکه یکنواخت H است. دنبالهٔ $\{V_j\}_{j\in Z}$ از زیرفضاهای $L^2(G)$ که در شرایط زیر صدق کند را آنالیز چند ریزه‌ساز گویند:

۱. $V_j\subseteq V_{j+1}, j\in Z$؛

۲. $D_A(V_j)=V_{j+1}, j\in Z$؛

۳. مجموعهٔ $\bigcup_{j\in Z}V_j$ چگال در $L^2(G)$ است و $\bigcap_{j\in Z}V_j=0$؛

۴. تابع مقیاس $\varphi\in L^2(G)$ موجود است به‌طوری‌که مجموعه$\{T_h\varphi:h\in H\}$ تشکیل پایه متعامد برای V_0 دهد.

اگر شرط ۴ را با شرط ضعیف‌تر زیر جای‌گزین کنیم، آن‌گاه دنباله $\{V_j\}_{j\in Z}$ را آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته گویند [۴].

'۴. مجموعه V_0 تحت عمل انتقال پایا است.

یک موجک را موجک آنالیز چند ریزه‌ساز گوییم هرگاه از یک آنالیز چند ریزه‌ساز به‌دست آمده باشد.

مجموعهٔ W_jرا متمم متعامد V_j در V_{j+1} تعریف می‌کنیم. یعنی $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$. در این صورت $L^2(G)$ را می‌توان بدین‌صورت جمع مستقیم تجزیه کرد:

$$L^2(G)=V_0\oplus\oplus_{j=0}^{\infty}W_j=\oplus_{j\in Z}W_j.$$

هر تابع موجک تشکیل آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته می‌دهد. بدین‌صورت که فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده با شبکه یکنواخت Hو ψ متعلق به $L^2(G)$ یک تابع موجک باشد. زیرفضاهای $V_j:=\overline{span}\{D_A^nT_h\psi:h\in H,n\in Z,n<j\}$ از $L^2(G)$ را در نظر بگیرید. به‌راحتی دیده می‌شود که این زیرفضاها تشکیل آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته می‌دهند و $W_0=\{T_h\psi:h\in H\}$.

به‌راحتی می توان نشان داد

$$(T_hf\,\hat{})(\xi)=<\xi,h>\hat{f}(\xi).$$

مثال ۴. فرض کنید

$$G=\{(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}:x_j\in\{0,1\},x_j=0\forall j>n,n\in\mathbb{Z}\}.$$

برای هر $(x_j),(y_j)\in G$، عمل جمع روی G جمع مختصات به هنگ ۲ است یعنی

$$(z_j)=(x_j)\oplus(y_j)\Leftrightarrow z_j\overset{2}{\equiv}x_j+y_j.$$

در این صورت G یک گروه آبلی موضعاً فشرده با توپولوژی حاصل‌ضربی است. این گروه را گروه دوتایی کانتور گویند [۱۰]، [۱۴].

فرض کنید

$$D=\{x\in G:x_j=0,j\geq 0\}. \text{ و } H=\{x\in G:x_j=0,j<0\}$$

در این صورت H شبکه یکنواخت، D فشرده و $G/H=D$.

برای $\ell\in\mathbb{Z}$ مجموعه‌های $D_\ell=\{(x_j)\in G:x_j=0,j\geq\ell\}$ تشکیل همسایگی‌هایی از صفر می‌دهند که در این‌شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $\bigcup D_\ell=G,\bigcap D_\ell=\{0\},D_\ell\subset D_{\ell+1}$؛

۲. هر D_ℓ زیرگروه باز و فشرده‌ای از G است.

عملگر اتساع $A:G\to G$ برای هر $(x_j)\in G$ به‌صورت $A(x_j)=x_{j-1}$ و نگاشت معکوس به فرم $A^{-1}(x_j)=x_{j+1}$ است.

مثال ۵. روی گروه دوتایی کانتور، موجک هار را می‌توان بدین‌صورت تعریف کرد:

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in D_{-1}\\ -1, & x\in D\backslash D_{-1}\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در پایان این بخش به یادآوری لم ۶ از مرجع [۱۲] می‌پردازیم که در قسمت‌های بعد استفاده می‌شود.

لم ۶. فرض کنید G گروه آبلی موضعاً فشرده با شبکهٔ یکنواخت H است. مجموعه $\{T_h f\ : h \in H\}$ برای $f\ \in L^2(G)$ متعامد است اگر وتنها اگر $\sum_{\eta\in H^{\perp}} |\hat{f}\ (\xi+\eta)|^2 = 1$ برای تقریباً همه جا $\xi \in \hat{G}$.

ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

در این بخش مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده معرفی و ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده بررسی می‌شود و با استفاده از مفاهیمی چون آنالیز چندریزه‌ساز و تبدیل فوریه مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعیین می‌شود.

نتایج این بخش تعمیم مفاهیم و قضایا مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده است. ابتدا با تعریف مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده شروع می کنیم.

تعریف ۷. فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده است. زیر مجموعه W از $\hat{G}$ را مجموعه موجک گوییم هرگاه تابع موجک $\psi \in L^2(G)$ موجود باشد به‌طوری‌که $|\hat{\psi}| = \chi_W$. موجک ψ را موجک فرکانسی با محمل مینیمال گوییم و به‌صورت ψ_W نمایش می‌دهیم.

لم ۸. در مورد اندازه مجموعه‌های موجک است.

لم ۸. اگر $W\ \subseteq \hat{G}$ مجموعه موجک باشد، آن‌گاه $|W\ | = |\hat{H}\ |$.

برهان: بنا به لم ۶، $\sum_{\eta\in H^{\perp}} \chi_W\ (\xi+\eta) = 1$ ، در نتیجه با استفاده از فرمول وایل داریم:

$$|W\ | = \int_{\hat{G}} \chi_W\ (\xi) d\xi = \int_{\hat{G}/H^{\perp}} \sum_{\eta\in H^{\perp}} \chi_W\ (\xi+\eta) d\xi$$
$$= \int_{\hat{G}/H^{\perp}} d\xi = \left|\hat{G}\ /\ H^{\perp}\right| = |\hat{H}\ |.$$

تعریف ۹. دو مجموعه $E, F \subseteq \hat{G}$ را هم‌ارز انتقال گوییم هرگاه افراز اندازه‌پذیر E_η از E موجود باشد به‌طوری‌که مجموعه $\{\eta+E_\eta : \eta \in H^{\perp}\}$ افراز اندازه پذیری از F به هنگ مجموعه‌های صفر تشکیل دهد، یعنی

$$F = \bigcup_{\eta\in H^{\perp}} (\eta+E_\eta).$$

چنین هم‌ارزی به‌صورت $E\ \sim_T\ F$ نشان داده می‌شود.

لم بعدی در مورد مجموعه‌های هم ارز انتقال است.

لم ۱۰. مجموعه توابع $\{\overline{(h,\xi)}\chi_E\ (\xi) : h \in H\}$ تشکیل مجموعه متعامد یکه می‌دهد اگر و تنها اگر $E\ \sim_T\ \hat{H}$.

برهان: اگر $E\ \sim_T\ \hat{H}$، آنگاه بنا به لم ۶ مجموعه $\{\overline{(h,\xi)}\chi_E\ (\xi) : h \in H\}$ متعامد یکه است.

بلعکس، فرض کنید $\{\overline{(h,\xi)}\chi_E\ (\xi) : h \in H\}$ مجموعه متعامد یکه باشد. این مجموعه تبدیل فوریه مجموعه $\{T_h F^{-1}\chi_E\ : h \in H\}$ است که بنا به قضیه پلانشرمتعامد یکه است. حال بنا به لم ۶ برای تقریباً هر $\xi \in \hat{G}$ داریم

$$\sum_{\eta\in H^{\perp}} |\ \chi_E\ (\xi+\eta)\ |^2 = 1.$$

تساوی مذکور افرازی از $\hat{H}$ به‌دست می‌دهد که هم‌ارز انتقال با E است. در حقیقت چون مجموع برابر یک است، برای هر $\xi \in \hat{H}$ عضو یکتا η متعلق به $H^{\perp}$ موجود است به‌طوری‌که $\xi+\eta \in E$. از این‌رو برای هر $\eta \in H^{\perp}$ مجموعه

$I_\eta=\{\xi\in\hat{H}:\xi+\eta\in E\}$ افرازی از $\hat{H}$ است. بنابراین $\eta+I_\eta\subseteq E$ برای هر $\eta\in H^\perp$. هم‌چنین با توجه به اینکه انتقال‌های $\hat{H}$ تمام $\hat{G}$ را می‌پوشاند تمام E با انتقال‌هایی از I_η پوشیده می‌شود. در نتیجه $E\sim_T \hat{H}$.

حال به ارائه دو لم می‌پردازیم که در برهان قضیهٔ ۷-۳ کاربرد دارد.

لم ۱۱. فرض کنید $f\in L^2(\hat{G})$ و $E=supp(f)$. در این صورت مجموعه $\{\overline{(h,\xi)}f(\xi):h\in H\}$ پایه متعامد یکه برای $L^2(E)$ است اگر وتنها اگر شرایط زیر برقرار باشد

۱. $E\sim_T \hat{H}$;

۲. $|f(\xi)|=1$ تقریباً همه جا برای $\xi\in E$.

برهان: مشابه لم ۱-۴ در مرجع [۷].

لم ۱۲. فرض کنید $E\subseteq\hat{G}$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت تساوی $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}L^2(A^{*n}E)=L^2(\hat{G})$ برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه $\{A^{*n}E:n\in\mathbb{Z}\}$ افراز اندازه‌پذیری از $\hat{G}$ به هنگ مجموعه‌های صفر باشد.

برهان: فرض کنید اتساع‌های E تشکیل افرازی از $\hat{G}$ به هنگ مجموعه‌های صفر باشد. در این صورت بدیهی است که فضاهای $L^2(A^{*n}E)$ و $L^2(A^{*k}E)$ متعامدند هرگاه $n\neq k$. اگر $f\in L^2(\hat{G})$، آن‌گاه با توجه به این‌که اتساع‌های E مجموعه $\hat{G}$ را می‌پوشانند، $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\chi_{A^{*n}E}$. هر یک از جمع بندها متناظر با $L^2(A^{*n}E)$ است از این‌رو، جمع مستقیم آنها تمام $L^2(\hat{G})$ است.

حال فرض کنید $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}L^2(A^{*n}E)=L^2(\hat{G})$. برای مقادیرصحیح n و k که $n\neq k$ است اگر $A^{*n}E\bigcap A^{*k}E$ اندازه غیرصفر داشته باشد، آن‌گاه با انتخاب مجموعه F زیر مجموعه با اندازه متناهی و ناصفر $A^{*n}E\bigcap A^{*k}E$، تابع مشخصه χ_F در هر دو $L^2(A^{*n}E)$ و $L^2(A^{*k}E)$ وجود دارد که با فرض مجزا بودن $L^2(A^{*n}E)$ و $L^2(A^{*k}E)$ در تناقض است.

در قضیهٔ بعد مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده مشخص می‌شود.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید مجموعه $W\subseteq\hat{G}$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت W مجموعه موجک است اگر و تنها اگر این شرایط برقرار باشد:

۱. مجموعه W هم ارز انتقال $\hat{H}$ است؛

۲. خانواده $\{A^{*n}W:n\in\mathbb{Z}\}$ افرازی از $\hat{G}$ است.

برهان: اگر W مجموعه موجک باشد، بنا به تعریف مجموعه‌های موجک، مجموعه $\{\overline{(h,\xi)}\chi_W(\xi):h\in H\}$ متعامد یکه است. بنابراین بنا به لم ۱۰ مجموعه W هم ارز انتقال $\hat{H}$ است. در حقیقت $\hat{W}_0=L^2(W)$. به‌علاوه

$$L^2(G)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\hat{D}^n\hat{W}_0=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}L^2(A^{*n}W).$$

در نتیجه لم ۶-۳ شرط (۲) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنید W هم ارز انتقال $\hat{H}$ باشد. در نتیجه بنا به لم ۵-۳ تابع ψ_W انتقالهای متعامد یکه دارد. بعلاوه،

$$\overline{span}\{\overline{(h,\xi)}\hat{\psi}_W(\xi):h\in H\}=L^2(W).$$

واضح است $\hat{D}^n(L^2(W))=L^2(A^{*n}W)$ و شامل $\hat{D}^n\hat{T}_n\hat{\psi}_W$ می باشد. بنا به لم ۱۲ این زیر فضاها متعامدند و جمع مستقیم آنها برابر با $L^2(\hat{G})$ است. بنابراین انتقال‌ها و اتساع‌های ψ_W متعامد یکه بوده است و تشکیل پایه کامل می‌دهند. از این رو W مجموعه موجک است.

حال از لم ۱۴ کمک می‌گیریم تا مجموعه‌های موجک را به‌صورتی دیگر مشخص کنیم.

لم ۱۴. فر ض کنید مجموعه $E\subseteq\hat{G}$ اندازه‌پذیر باشد. مجموعه $\{A^{*n}E:n\in\mathbb{Z}\}$ افراز اندازه‌پذیری از $\hat{G}$ به هنگ مجموعه‌های صفر است اگر و تنها اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_E(A^{*n}\xi)=1$ تقریباً همه جا $\xi\in\hat{G}$.

برهان: اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_E(A^{*n}\xi)=1$، آن‌گاه برای هر $\xi\in\hat{G}$ وجود دارد $n\in\mathbb{Z}$ به‌طوری‌که $A^{*n}\xi\in E$ در نتیجه $\xi\in(A^*)^{-n}E$. از این رو اتساع‌های E مجموعه $\hat{G}$ را می‌پوشانند.

اگر برای $n\neq k$ مجموعه $A^{*n}E\bigcap A^{*k}E=F$ اندازه نا صفر داشته باشد، آن‌گاه $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_E(A^{*n}\xi)=2$ برای تقریباً همه جا $\xi\in F$ که با فرض در تناقض است. بنابراین $\{A^{*n}E:n\in\mathbb{Z}\}$ افراز اندازه‌پذیری از $\hat{G}$ است.

حال فرض کنید مجموعهٔ $\{A^{*n}E:n\in\mathbb{Z}\}$ افراز اندازه‌پذیری از $\hat{G}$ باشد از این رو برای هر $\xi\in\hat{G}$ وجود دارد $k\in\mathbb{Z}$ به‌طوری‌که $\xi\in A^{*k}E$. بنابراین $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_E(A^{*n}\xi)$ حداقل یک است. اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_E(A^{*n}\xi)$ بزرگ‌تر از یک باشد، آن‌گاه $n,k\in\mathbb{Z}$ موجود است به‌طوری‌که $n\neq k$ بوده است و اندازهٔ $A^{*n}E\bigcap A^{*k}E$ ناصفر باشد. اما این با افراز مجموعه $\{A^{*n}E:n\in\mathbb{Z}\}$ در تناقض است.

در قضیهٔ ۱۵ مجموعه‌های موجک مشخص شده‌اند. در حقیقت این قضیه صورت دیگری از قضیهٔ ۱۳ است.

قضیهٔ ۱۵. فرض کنید مجموعه $W\subseteq\hat{G}$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت W مجموعه موجک است اگر وتنها اگر این شرایط برقرار باشد:

۱. $\sum_{\eta\in H^\perp}\chi_W(\xi+\eta)=1$ تقریباً همه جا $\xi\in\hat{G}$؛

۲. $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_W(A^{*n}\xi)=1$ تقریباً همه جا $\xi\in\hat{G}$.

برهان: بنا به قضیهٔ ۱۳ و لم ۱۴.

قضیهٔ ۱۶ موجک‌های فرکانسی با محمل مینیمال را که دارای ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز هستند، مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۱۶. فرض کنید تابع ψ_W موجک فرکانسی با محمل مینیمال باشد. در این صورت ψ_W موجک با ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز است اگر و تنها اگر مجموعه $E=\bigcup_{j<0}A^{*j}W$ هم ارز انتقال $\hat{H}$ باشد.

برهان: موجک ψ_W یک موجک با ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز است اگر و تنها اگر تابع مقیاس $\varphi\in L^2(G)$ موجود باشد به‌طوری‌که مجموعهٔ $\{T_h\varphi:h\in H\}$ تشکیل یک پایه متعامد یکه برای V_0 دهد یا به‌طور هم‌ارز $\{\overline{(h,\xi)}\varphi(\xi):h\in H\}$ تشکیل پایه متعامد یکه برای $\hat{V_0}=L^2(E)$ دهد. بنا به لم ۱۰ این هم‌ارز است با این‌که مجموعه E هم‌ارز انتقال $\hat{H}$ باشد.

با توجه به قسمت ۱ از قضیهٔ ۱۳، اگر E و F دو مجموعه موجک باشند، آن‌گاه E و F هم‌ارز انتقال هستند. بنابراین نگاشت $\sigma : E \to F$ موجود است به‌طوری‌که $\sigma(x) - x = \eta$ برای $\eta \in H^{\perp}$. حال به بررسی این نگاشت، تعمیم و خواص آن می‌پردازیم.

گزارهٔ ۱۷. اگرE و F دو مجموعه موجک باشند، آن‌گاه نگاشت σ که در بالا تعریف شده است را می‌توان به نگاشتی اندازه‌پذیر، یک به یک و پوشا از $\hat{G}$ به روی خودش تعمیم داد.

برهان: بنا به قسمت ۲ از قضیهٔ ۱۳ خانواده $\{A^{*n}E : n \in \mathbb{Z}\}$ افرازی از $\hat{G}$ است. از این‌رو برای هر $\xi \in \hat{G}$ عضو $e \in E$ وجود دارد به‌طوری‌که $\xi = A^{*j}e$. تعریف می‌کنیم $\sigma(\xi) = A^{*j}\sigma(e) = A^{*j}\sigma(A^{*-j}\xi)$. در این صورت σ نگاشتی از $\hat{G}$ به $\hat{G}$ است که اتساع‌های E را به اتساع‌های F منتقل می کند. در حقیقت اگر $\xi \in A^{*n}E$، آن‌گاه $A^{*-n}\xi \in E$. با توجه به این‌که $\sigma(\xi) = A^{*n}\sigma(A^{*-n}\xi)$ و $\sigma(A^{*-n}\xi) \in F$ داریم $A^{*n}\sigma(A^{*-n}\xi) \in A^{*n}F$. چون σ نگاشتی از E به روی F است، از این‌رو، σ مجموعه $A^{*n}E$ را به روی $A^{*n}F$ تصویر می‌کند. این نشان می‌دهد که σ یک به یک و پوشا است.

حال نشان می‌دهیم σ اندازه‌پذیر است. بدیهی است که σ روی E اندازه‌پذیر است. بنابراین روی $A^{*n}E$ نیز اندازه‌پذیر است. برای هر $H \subseteq \hat{G}$ داریم $H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (H \cap A^{*n}E)$ و $\sigma(H \cap A^{*n}E)$ اندازه‌پذیر است و از این‌رو، $\sigma(H)$ نیز اندازه‌پذیر است.

نگاشت $\sigma : \hat{G} \to \hat{G}$ که در گزاره ۱۷ تعریف شد را نگاشت مجموعه‌های موجک E و F گویند.

گزارهٔ ۱۸. فرض کنید E و F مجموعه‌های موجک و σ نگاشت مجموعه‌های موجک E و F باشد. در این صورت نگاشت σ اندازه پایا و A^*-همگن است.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم σ اندازه پایا است. در حقیقت σ اندازه پایا از E به F است، چون E و F انتقال‌هایی از یکدیگرند. هم‌چنین σ روی اتساع‌های E نیز اندازه پایا است. فرض کنید $M \subseteq A^{*n}E$، در این صورت $\sigma(M) = A^{*n}\sigma(A^{*-n}M)$. چون $A^{*-n}M \subseteq E$ از این‌رو، اندازهٔ $\sigma(A^{*-n}M)$ با اندازه $A^{*-n}M$ برابر است. پس $A^{*n}\sigma(A^{*-n}M)$ دارای اندازه یکسانی با $A^{*-n}M$ است. در نتیجه σ اندازه پایا است.

حال نشان می‌دهیم σ نگاشتی A^*-همگن است یعنی $\sigma(A^*\xi) = A^*\sigma(\xi)$ برای هر $\xi \in \hat{G}$. اگر $\xi \in A^{*n}E$ پس $A^*\xi \in A^{*(n+1)}E$ اما $\sigma(\xi) \in A^{*n}F$ از این‌رو، $A^*\sigma(\xi) \in A^{*(n+1)}F$ و $\sigma(A^*\xi) \in A^{*(n+1)}F$. چون σ نگاشتی یک به یک و پوشا است از این‌رو $\sigma(A^*\xi) = A^*\sigma(\xi)$.

مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

در این بخش مجموعه مقیاس تعمیم یافته و تابع بعد روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف می‌شود. سپس با استفاده از تابع بعد و مجموعه مقیاس تعمیم یافته مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده را تعیین می‌شوند.

چنان‌که قبلاً نشان داده شد $\hat{V}_0 = L^2(E)$ جایی‌که $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$. بنابراین $W = A^*E \setminus E$. مشابه [۵]، ما تعریف ۱۹ را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۹. مجموعه اندازه‌پذیر $E \subseteq \hat{G}$ مجموعه مقیاس تعمیم یافته متناظر با اتساع A گوییم هرگاه $|E| = \dfrac{1}{q-1}$ و مجموعه $A^{*}E \setminus E$ مجموعه موجک باشد جایی‌که $q = |A|$.

با استفاده از گزاره ۲۰ می‌توان تعریف معادلی برای مجموعه مقیاس تعمیم یافته بدین‌صورت بیان کرد:

گزارهٔ ۲۰. مجموعه اندازه‌پذیر $E \subseteq \hat{G}$ مجموعه مقیاس تعمیم یافته است اگر وتنها اگر برای مجموعه موجک W داشته باشیم $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$.

برهان: فرض کنید W مجموعه موجک باشد و $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$. بنا به قضیهٔ ۱۳ این اجتماع مجزا است و در نتیجه $W = A^{*}E \setminus E$. هم‌چنین بنا به نتیجهٔ ۳-۳ اندازهٔ W برابر یک است از این‌رو، $|E| = \dfrac{1}{q-1}$.

برای اثبات طرف دیگر مجموعه $A^{*}E \setminus E$ را با W نشان می‌دهیم. چون $|W| = 1$ و $E \subseteq A^{*}E$. پس $\bigcup_{j<0} A^{*j}W \subseteq E$. اما با توجه به این که هر دو این مجموعه‌ها اندازهٔ مساوی دارند، از این‌رو، تقریباً همه جا با یک‌دیگر برابرند.

حال به تعریف تابع بعد روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده می‌پردازیم که تعمیمی ازتابع بعد موجک در حالت اقلیدسی است[۵].

تعریف ۲۱. فرض کنید $f \in L^2(G)$. در این صورت تابع بعد روی $\hat{G}$ بدین‌ه صورت تعریف می‌کنیم:

$$D_f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\eta \in H^{\perp}} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta)) \right|^2 .$$

گزارهٔ ۲۲. برای هر $f \in L^2(G)$ تابع بعد D_f تقریباً همه جا روی $\hat{G}$ متناهی است و

$$\|D_f\|_{L^1(\hat{H})} = \frac{1}{|A|-1} \|f\|^2_{L^2(G)} .$$

برهان: بنا به قضیهٔ پلانشر و فرمول وایل داریم

$$\|D_f\|_{L^1(\hat{H})} = \int_{\hat{H}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\eta \in H^{\perp}} \left| \hat{f}\left(A^{*j}(\xi+\eta)\right) \right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\hat{H}} \sum_{\eta \in H^{\perp}} \left| \hat{f}\left(A^{*j}(\xi+\eta)\right) \right|^2 d\xi$$

با تغییر متغیر $\xi + \eta = w$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\hat{G}} \left| \hat{f}\left(A^{*j} w\right) \right|^2 dw$$

با تغییر متغیر $A^{*j}w = \xi$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |A^{*}|^{-j} \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{|A|-1} \|f\|^2_{L^2(G)} .$$

تعریف ۲۳. فرض کنید $f \in L^2(G)$ و D_f تابع بعد باشد. در این صورت تابع بعد D_f در معادله توافقی صدق می کند هرگاه

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\eta\in H^{\perp}}\left|\hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta))\right|^2 = D_f(\xi)+1. \tag{۱-۴}$$

قضیهٔ ۲۴. فرض کنید $f \in L^2(G)$. در این صورت تابع بعد D_f در معادله توافقی صدق می کند اگر وتنها اگر انتقال‌های تابع f متعامد یکه باشند.

برهان: سمت چپ معادلهٔ (۴-۱) را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\eta\in H^{\perp}}\left|\hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta))\right|^2\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\eta\in H^{\perp}}\left|\hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta))\right|^2+\sum_{\eta\in H^{\perp}}\left|\hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta))\right|^2\\ &=D_f(\xi)+\sum_{\eta\in H^{\perp}}\left|\hat{f}(A^{*j}(\xi+\eta))\right|^2.\end{aligned}$$

بنابراین تابع بعد D_f در معادله توافقی صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\sum_{\eta\in H^{\perp}}|\hat{f}(\xi+\eta)|^2=1$. حال بنا به لم ۶ مجموعه $\{T_h f : h\in H\}$ متعامد یکه است. در نتیجه قضیه اثبات می‌شود.

با استفاده از تعریف تابع بعد و قضیهٔ ۲۴ می‌توان نتیجهٔ ۲۵ را به‌دست آورد.

نتیجهٔ ۲۵. اگر ψ_W موجک فرکانسی با محمل مینیمال و $E=\bigcup_{j<0}A^{*j}W$، آن‌گاه تابع بعد D_{ψ_W} برابر است با

$$D_{\psi_W}(\xi)=\sum_{\eta\in H^{\perp}}\chi_E(\xi+\eta).$$

به‌علاوه، تابع D_{ψ_W} در معادله توافقی صدق می‌کند اگر وتنها اگر $\sum_{\eta\in H^{\perp}}\chi_E(\xi+\eta)=1$.

بونیک و همکاران [۵] مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی مجموعه‌های اقلیدسی n بعدی را مشخص کرده‌اند. در این‌جا مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی و موضعاً فشرده بررسی می‌شود.

قضیهٔ ۲۶. مجموعه اندازه‌پذیر $E\subseteq\hat{G}$ مجموعه مقیاس تعمیم یافته متناظر با اتساع A است اگر و تنها اگر

۱. $|E|=\dfrac{1}{|A|-1}$؛
۲. $E\subseteq A^*E$؛
۳. $\lim_{n\to\infty}\chi_E(A^{*-n}\xi)=1$ برای تقریباً همه جا $\xi\in\hat{G}$؛
۴. تابع $m(\xi)=\sum_{\eta\in H^{\perp}}\chi_E(\xi+\eta)$ در معادله توافقی صدق می‌کند.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم شرایط ۱ تا ۴ لازم هستند. شرط ۱ بنا به تعریف برقرار است. شرط ۲ از اثبات گزارهٔ ۲۰ به‌دست می‌آید. به‌علاوه از آن‌جاکه $E=\bigcup_{j<0}A^{*j}W$ برای مجموعه موجک W می‌توان نوشت

$\chi_E(A^{*-n}\xi)=\sum_{j=-n+1}^{\infty}\chi_W(A^{*j}\xi)$ و با استفاده از شرط ۲ از قضیهٔ ۱۵ مقدار حد وقتی $n\to\infty$ برابر یک است. در نتیجه ۳ نیز برقرار خواهد بود. هم‌چنین شرط ۴ بنا به لم و قضیهٔ ۱۵ برقرار است.

حال برعکس تعریف کنید $W=A^{*}E\setminus E$. به‌راحتی مشاهده می‌شود که W و $A^{*j}W$ برای هر $j\in\mathbb{Z}$ مجزاست. در حقیقت، $A^{*j}W=A^{*(j+1)}E\setminus A^{*j}E$. حال بنا به شرط ۲ $W\subseteq A^{*j}E$ که نتیجه می‌دهد $W\bigcap A^{*j}W=\varnothing$. با همین روش $A^{*j}W\bigcap A^{*k}W=\varnothing$ برای $j,k\in\mathbb{Z}$ و $j\neq k$.

حال نشان می‌دهیم که $E=\bigcup_{j<0}A^{*j}W$. در حقیقت بنا به شرط (۲)مجموعه $\bigcup_{j<0}A^{*j}W$ زیر مجموعه E است اما این دو مجموعه دارای اندازه یکسان هستند و در نتیجه تقریباً همه جا برابرند. این نشان می‌دهد که $\chi_E(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_W(A^{*j}\xi)$.

در نتیجه شرط ۲ از قضیهٔ ۱۵ نیز برقرار است. با استفاده از شرط ۴ و لم ۸ مشاهده می‌شود که شرط ۱ قضیهٔ ۱۵ نیز برقرار است بنابراین W مجموعه موجک است.

مثال ۲۷. فرض کنید G گروه دوتایی کانتور باشد. با توجه به مفاهیم مثال ۵ مجموعه $W=D_1\setminus D$ مجموعه موجک است که آن را موجک شانون گوییم. در حقیقت مجموعه $\{A^{j}W: j\in\mathbb{Z}\}$افرازی از G است. هم‌چنین $D=W\oplus 1$ یعنی W هم ارز انتقال از D است.$\hat{H}=D$

تشکر و قدردانی

از دکتر مسعود امینی برای راهنمایی‌ها و توصیه‌های ارزشمندشان که به ارتقا مقاله کمک کرده است، سپاسگزاری می‌کنیم.

منابع

1. Benedetto J. J., Benedetto R. L., "A wavelet theory for local fields and related groups", J. Geom. Anal. 14 (2004) 423-456.
2. Benedetto J. J., Benedetto R. L., "The construction of Wavelet sets, Wavelets and Multiscale Analysis", (2011) 17-56.
3. Benedetto J. J., Li S., "The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks", Appl. Comput. Harmon. Anal. 5 (1998) 389-427.
4. Baggett L., Medina H., Merrill K., "Generalized multiresolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in Rn.", J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999) 563-573.
5. Bownik M., Rzeszotnik Z., Speegle P., "A characterization of dimension function of wavelets", J. Applied and Computational Harmonic Anal., 10 (2001) 71-92.
6. Daubechies I., "Ten Lectures on Wavelets, American Mathematical Society", Providence, RI, (1992).

7. Dai X., Larson D. R., "Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets", Mem. Amer. Math. Soc. 134, No. 640 (1998).

8. Folland G. B., "A course in abstract harmonic analysis", CRC Press (1995).

9. Fang X., Wang X., "Construction of minimally supported frequency wavelets", J. Fourier Anal. Appl., 2 (1996) 315-327.

10. Hewitt E., Ross K. A., "Abstract harmonic analysis", Vol. 1 Springer, Berlin (1963).

11. Kanuith E., Kutyniok G., "Zeros or the Zak Transform on Locally Compact Abelian Groups", American Mathematical Society, vol.126, num. 12 (1998) 3561-3569.

12. Kamyabi Gol R. A., Tousi R. R., "The structure of shift invariant spaces on a locally compact abelian group", J. Math. Anal. Appl. 340, (2008) 219-225.

13. Kamyabi Gol A., Tousi R. R., "Some equivalent multiresolution conditions on locally compact abelian groups, Proc", Indian Acad. Sci., 120 (2010) 317-331.

14. Lang W. C., "Wavelet analysis on the Cantor dyadic group", Houston J. Math., 24 (1998) 533-544.

15. Rudin W., "Fourier Analysis on Groups", John Wiley (1962).