

## کاربرد برخی تبدیلات انتگرالی و توابع فوق هندسی چندگانه در مدل‌بندی و توزیع میانگین وزنی تصادفی برخی متغیرهای تصادفی

رسول روزگار؛ دانشگاه یزد، گروه آمار  
دریافت ۹۵/۰۶/۰۷ پذیرش ۹۵/۱۰/۱۹

### چکیده

مدل‌بندی و پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی مختلف، به دلیل تصادفی بودن وزن‌ها با استفاده از روش‌های معمول و رایج آماری کاری نسبتاً سخت و پیچیده است و حتی در حالتی که اندازه نمونه تصادفی برابر ۲ است ( $n = 2$ ) توزیع صریح و به شکل بسته‌ای وجود ندارد. در این مقاله توزیع میانگین وزنی تصادفی خانواده‌ای از توزیع‌های بتا، نرمال و گاما را در حالت  $n \geq 2$  با استفاده از برخی تبدیلات انتگرالی و همچنین توابع فوق هندسی چندگانه به شکل صریح به دست آورده و در ادامه نتایجی را برای پیدا کردن توزیع و برخی مشخصه‌های دیگر میانگین وزنی تصادفی از این متغیرهای تصادفی ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: میانگین وزنی تصادفی، تبدیل استیلتایس، توابع فوق هندسی چندگانه، توزیع بتا، توزیع گاما، توزیع نرمال.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۰E۰۵، ۴۶F۱۲، ۶۲E۱۵

### مقدمه

میانگین وزنی تصادفی از دو متغیر تصادفی پیوسته و مستقل  $X_1$  و  $X_2$  به صورت  $Z = WX_1 + (1 - W)X_2$  در نظر گرفته می‌شود که متغیر وزنی  $W$  دارای توزیع یک‌نواخت روی بازه  $(0,1)$  و مستقل از متغیرهای تصادفی  $X_1$  و  $X_2$  است. این نوع میانگین اولین بار توسط ون اشه [۱] معرفی شد. سپس جانسون و کاتز [۲] توزیع این میانگین را برای حالتی که  $X_1$  و  $X_2$  دارای توزیع یک‌نواخت، نرمال و کوشی هستند به دست آوردند. توزیع میانگین وزنی تصادفی در حالتی که اندازه نمونه تصادفی برابر ۲ است کاربردهای فراوانی در مسائل زیست‌محیطی به‌ویژه در تحلیل داده‌های مرکب دارد. دی‌سالوو و لوویسون [۳] توزیع  $Z$  را به صورت غیرصریح و بر اساس یک انتگرال زمانی که  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیعی از توزیع گاما،  $G(\alpha, \lambda)$  هستند و همچنین متغیر وزنی  $W$  از توزیع بتا،  $Be(\beta, \beta)$  تبعیت کند پیدا کردند و توانستند تنها نمودار تابع چگالی  $Z$  را به صورت عددی (و نه تحلیلی) برای برخی مقادیر مختلف پارامترهای  $\alpha, \lambda$  و  $\beta$  رسم کنند.

تعمیم و بررسی میانگین وزنی تصادفی به بیش از دو متغیر تصادفی ( $n > 2$ )، را اولین بار سلطانی [۴] و سلطانی و روزگار [۵] به کار گرفتند. میانگین وزنی تصادفی از تعداد متناهی متغیرهای تصادفی پیوسته و مستقل  $X_1, \dots, X_n$  با وزن‌هایی که برش‌هایی از بازه  $(0,1)$  به نام فاصله‌ها هستند به صورت (۱) تعریف می‌شود:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n W_i X_i, \quad (1)$$

به‌طوری‌که وزن‌های تصادفی  $W_i$  به‌صورت  $W_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  و با شرط  $\sum_{i=1}^n W_i = 1$  در نظر گرفته می‌شوند و  $U_{(1)}, \dots, U_{(n-1)}$  آماره‌های ترتیبی متناظر با نمونه تصادفی  $U_1, \dots, U_{n-1}$  از توزیع یک‌نواخت روی بازه  $(0, 1)$  و مستقل از  $X_1, \dots, X_n$  هستند. ( $U_{(0)} = 0$  و  $U_{(n)} = 1$ ).

سلطانی و روزگار [۵] نشان دادند که تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع متغیر تصادفی  $Z_n$  (میانگین وزنی تصادفی) را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تبدیل‌های استیلتایس (معمولی) متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  به‌صورت (۲) نوشت:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}[F_i; 1](z), \quad (2)$$

به‌طوری‌که در این رابطه منظور از  $F$  و  $F_i$  به‌ترتیب تابع توزیع متغیرهای تصادفی  $Z_n$  و  $X_i$  هستند و این تبدیل انتگرالی نیز بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(z-x)^n} dF(x), \quad z \in \mathbb{C} \cap (\text{supp } F)^c,$$

که منظور از  $\mathbb{C}$  مجموعه اعداد مختلط و منظور از  $\text{supp } F$  تکیه‌گاه تابع توزیع  $F$  است. سپس با به‌کارگیری رابطه (۲) توانستند توزیع میانگین وزنی از متغیرهای تصادفی کوشی و آرک‌سینوس را برای حجم نمونه دل‌خواه به‌دست آورند. روزگار و سلطانی [۶] با توجه به رابطه (۲) نشان دادند که کلاس وسیعی از توزیع‌ها به‌نام توزیع‌های شبه‌توانی دایره‌ای که شامل توزیع‌های یک‌نواخت، آرک‌سینوس و ویگنر نیز می‌شود توزیع میانگین وزنی تصادفی هستند. تعمیم دیگری از رابطه (۱) زمانی است که وزن‌های تصادفی  $(W_1, \dots, W_n)$  از توزیع دیرخه تبعیت می‌کند، که این تعمیم را روزگار [۷] و [۸] معرفی کرد و برای  $n > 2$ ، توزیع این نوع میانگین وزنی تصادفی توسط جملاتی از تبدیل کوشی - استیلتایس به‌دست آمد. هم‌چنین کاربرد این رابطه در قالب سه مثال در این مقاله ارائه شد.

میانگین وزنی تصادفی کاربردهای زیادی در بخش‌های مختلف علوم و مهندسی از جمله زیست‌شناسی، ژنتیک، مالی و... دارد. از جمله کاربردها می‌توان به پژوهش‌های چن و جین [۹]، دی‌سالوو و لوویسون [۳] اشاره کرد. هم‌چنین کاربردهای دیگری در نمونه‌گیری، برآوردگرهای تابع چگالی و تحلیل بیزی می‌توان یافت. به‌عنوان مثال در نظریه رگرسیون و شبکه‌های عصبی، برآوردگرهای تابع چگالی در حالت چندمتغیره و هسته رگرسیون چندمتغیره نمونه‌هایی از میانگین وزنی تصادفی هستند. کاربردهای بیش‌تر را می‌توان در پژوهش سلطانی و روزگار [۵] و مراجع موجود در آن ملاحظه کرد.

## تعاریف و روابط مورد نیاز

انجام محاسبات در این مقاله نیازمند داشتن تعاریف و ویژگی‌های برخی توابع خاص است که از جمله آن‌ها می‌توان به تابع لاریسلا<sup>۱</sup> اشاره کرد. این تابع که نقش مهمی را در حل مسائل مربوط به پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی ایفا می‌کند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

1. Lauricella function

$$F_D(a; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\dots+i_n} (b_1)_{i_1} \dots (b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\dots+i_n}} \frac{z_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{z_n^{i_n}}{i_n!},$$

به طوری که منظور از  $(z)_k$  نماد پاکهمر<sup>۱</sup> یا فاکتوریل صعودی است و بدین صورت تعریف می شود:  $((z)_0 = 1)$

$$(z)_k = z(z+1) \dots (z+k-1) = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)}.$$

شکل هم ریخت<sup>۲</sup> تابع لاریسلا چهارم که اردلی [۱۰] معرفی کرده است بدین صورت است:

$${}_n\Phi(b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!}.$$

هم چنین سری فوق هندسی  ${}_pF_q$  (حالت خاصی از تابع لاریسلا) نیز زمانی که سری هم گرا باشد عبارت است از:

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

سری فوق هندسی گاوسی  ${}_2F_1$  که حالت خاصی از رابطه مذکور است نقش اساسی را در ادامه محاسبات ایفا می کند و

دارای نمایش انتگرالی بدین صورت است:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 \frac{u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}}{(1-uz)^{-\alpha}} du.$$

با توجه به تعریف سری فوق هندسی گاوسی و نمایش انتگرالی فوق مشاهده می شود که

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z).$$

ویژگی های بیشتر این توابع را می توان در بخش ۹ کتاب گرادشتاین و ریژیک [۱۱] و همچنین فصل ۱۵ کتاب

آبراموتیز و استیگان [۱۲] جستجو کرد.

الماسی و همکاران [۱۳] نشان دادند که تابع چگالی مجموع وزنی (غیرتصادفی) متغیرهای تصادفی گاما را می توان

به صورت (۳) بیان کرد:

$$f_Z(z) = \frac{\beta^{\alpha^*}}{\prod_{i=1}^k w_i^{\alpha_i} \Gamma(\alpha^*)} z^{\alpha^*-1} \exp\left(-\frac{\beta}{w_k} z\right) [k-1] \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}; \alpha^*; u_1, \dots, u_{k-1}), \quad (3)$$

به طوری که  $\alpha^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i$  و  $i = 1, 2, \dots, k-1$  برای  $w_k < w_i$ ،  $u_i = \frac{\beta z}{w_k} (1 - \frac{w_k}{w_i})$

است  $Z = \sum_{i=1}^k w_i X_i$  که  $X_i$  ها متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیع گاما با پارامترهای  $\alpha_i$  و  $\beta$  یعنی

$X_i \sim G(\alpha_i, \beta)$  تبعیت می کنند. هم چنین تابع مولد گشتاور مجموع وزنی  $Z$  به صورت (۴) است:

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^k (1 - \frac{t}{\beta} w_i)^{-\alpha_i}. \quad (4)$$

در ادامه این مقاله تابع چگالی متغیر تصادفی بتا با پارامترهای  $\gamma$  و  $\beta$  روی بازه  $[-1, 1]$  را بدین صورت در نظر

می گیریم:

$$f_X(x; \gamma, \beta) = \frac{\Gamma(\gamma + \beta + 2)}{2^{\gamma+\beta+1} \Gamma(\gamma + 1) \Gamma(\beta + 1)} (1-x)^{\gamma} (1+x)^{\beta}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

به طوری که  $\gamma > -1$  و هم چنین  $\beta > -1$  در حالتی که  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$  باشد این توزیع به توزیع ویگنر (شبه دایره ای)<sup>۱</sup>

تبدیل می شود. هم چنین زمانی که  $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$  است این توزیع به توزیع آرک سینوس تبدیل می شود.

1. Pochhammer symbol

2. Isomorph form

## نتایج اصلی

در این بخش توزیع رده مهمی از میانگین وزنی تصادفی را به دست می‌آوریم. ابتدا توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی بتا را به شکل بسته به دست آورده و در ادامه تابع توزیع، تابع مولد گشتاور و گشتاور  $m$ -ام میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای گاما را به صورت نمایش انتگرالی بیان می‌کنیم. در نهایت نیز تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای نرمال را ارائه می‌کنیم.

**قضیه ۱:** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل باشند که دارای توزیع بتا با پارامترهای  $\theta - 1$  و  $\theta$  روی بازه  $(-1, 1)$  باشند ( $0 < \theta < 1$ ) آن‌گاه میانگین وزنی تصادفی به صورت (۱) دارای توزیع بتا با پارامترهای  $\theta n - 1$  و  $(1 - \theta)n - 1$  روی بازه  $(-1, 1)$  است.

**اثبات:** تبدیل استیلتایس توزیع بتا با پارامترهای  $\theta - 1$  و  $\theta$  برابر است با:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z-x} f(x; \theta-1, -\theta) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{z-x} \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta)} (1-x)^{\theta-1} (1+x)^{-\theta} dx$$

$$= \frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}}.$$

بنا بر این سمت راست رابطه (۲) برابر است با  $\left[ \frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}} \right]^n$ . حال طبق رابطه (۲)، کافی است نشان دهیم که این عبارت تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع بتا با پارامترهای  $\theta n - 1$  و  $(1 - \theta)n - 1$  است. با توجه به نمایش انتگرالی سری فوق‌هندسی گاوسی  ${}_2F_1$ ، تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع بتا ( $F$ ) با پارامترهای  $\gamma$  و  $\beta$  روی بازه  $(-1, 1)$  برابر است با

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \frac{1}{(z-1)^n} {}_2F_1\left(n, \gamma+1; \gamma+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right).$$

با در نظر گرفتن  $n = \gamma + \beta + 2$  داریم:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \frac{1}{(z-1)^n} {}_2F_1\left(n, \gamma+1; n; \frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{(z-1)^{n-\gamma-1}} \frac{1}{(z+1)^{\gamma+1}}.$$

هم‌چنین با قرار دادن  $\gamma = n\theta - 1$  داریم:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \frac{1}{(z-1)^{n-n\theta}} \frac{1}{(z+1)^{n\theta}} = \left[ \frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}} \right]^n,$$

و بنا بر این قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۱ که قضیه اصلی روزگار و سلطانی است [۶]، به صورت نتیجه‌ای از قضیه ۱ با قرار دادن  $\theta = \frac{1}{2}$  به راحتی

ثابت می‌شود.

**نتیجه ۱:** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند که دارای توزیع آرک‌سینوس روی بازه  $(-1, 1)$  هستند آن‌گاه میانگین وزنی تصادفی به صورت (۱) دارای توزیع بتا با پارامترهای  $\gamma = \beta = \frac{n}{2} - 1$  است.

در قضیه ۲ توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی نرمال را در قالب تبدیل استیلتایس تعمیم یافته بیان می‌کنیم. برخلاف حالتی که وزن‌ها غیر تصادفی هستند ملاحظه می‌شود که میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای نرمال دارای توزیع نرمال نیست.

**قضیه ۲:** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل باشند که دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس  $\frac{1}{2}$  هستند آن گاه تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع میانگین وزنی تصادفی از این متغیرهای نرمال بدین صورت است:

$$\mathcal{S}[F_{Z_n}; n](z) = [-\sqrt{i} e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{i} z)]^n,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2(1+a^2)}}{1+a^2} da \text{ و } i^2 = -1$$

**اثبات:** با توجه به تعریف تابع  $\operatorname{erfc}(x)$  و تغییر متغیر روی تبدیل استیلتایس توزیع نرمال ( $F_N$ ) با میانگین ۰ و واریانس  $\frac{1}{2}$  داریم:

$$\mathcal{S}[F_N; n](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{i} e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{i} z).$$

بنابراین سمت راست رابطه (۲) برابر است با

$$\mathcal{S}[F_{Z_n}; n](z) = [-\sqrt{i} e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{i} z)]^n,$$

و قضیه ثابت می شود.

در ادامه به بررسی تابع چگالی، تابع مولد گشتاور و گشتاورهای میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای گاما می پردازیم. دی سالوو و لوویسون [۳] نشان دادند که اگر  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند که دارای توزیع گاما،  $G(\alpha, \lambda)$  هستند و همچنین متغیر وزنی  $W$  از توزیع بتا،  $Be(\beta, \beta)$ ، تبعیت کند آن گاه میانگین وزنی تصادفی از این دو متغیر تصادفی با فرض استقلال  $W$  از  $X_1$  و  $X_2$  دارای تابع چگالی بدین صورت پیچیده است:

$$f_X(y; \alpha, \lambda, \beta) = \frac{\lambda^{\alpha+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} (\frac{\gamma}{2})^{\alpha-\frac{1}{2}}}{B(\beta, \beta) \Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(t - \frac{1}{2})^{\alpha-\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{\beta-\frac{3}{2}} I_{(\alpha-\frac{1}{2})} \left( \frac{\lambda y(t - \frac{1}{2})}{t(1-t)} \right)}{\exp\left(\frac{\lambda y}{2t(1-t)}\right)} dt,$$

به طوری که  $I_{(\alpha-\frac{1}{2})} \left( \frac{\lambda y(t - \frac{1}{2})}{t(1-t)} \right)$  تابع بسل اصلاح شده نوع اول از مرتبه  $(\alpha - \frac{1}{2})$  و آرگومان  $\frac{\lambda y(t - \frac{1}{2})}{t(1-t)}$  است.

**نکته ۱:** از این که توزیع توام  $W = (W_1, \dots, W_n)$  دیریکله با پارامترهای  $(1, 1, \dots, 1)$  است با توجه به رابطه (۳)، تابع چگالی میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل گاما با پارامترهای  $\alpha_i$  و  $\beta$  یعنی  $X_i \sim G(\alpha_i, \beta)$  برابر است با:

$$f_{Z_n}(z) = \int_{E_{n-1}} (n-1)! f_{Z_n|W}(z|w) dw_1 dw_2 \dots dw_n,$$

به طوری که  $f_{Z_n|W}(z|w)$  در رابطه (۳) داده شده است و

$$E_{n-1} = \{(w_1, w_1, \dots, w_{n-1}): w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1, w_1 + \dots + w_{n-1} \leq 1, w_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w_i\}.$$

**قضیه ۳:** تابع مولد گشتاور و گشتاور  $m$  ام (در حالت خاص) میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما با پارامترهای  $\alpha_i$  و  $\beta$  به ترتیب عبارتند از:

$$M_{Z_n}(t) = F_B^{(n)}\left(n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; 1, 1, \dots, 1; \frac{t}{\beta}, \dots, \frac{t}{\beta}\right),$$

۹

$$E(Z_n^m) = \frac{1}{\binom{m+n-1}{m}} \frac{1}{\lambda^m \Gamma(\alpha)^n} \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \prod_{i=1}^n \Gamma(m_i + \alpha).$$

اثبات: طبق تعریف تابع مولد گشتاور میانگین وزنی تصادفی داریم:

$$M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = EE(e^{tZ_n} | \mathbf{W}) = E[M_{Z_n|\mathbf{W}}(t)] = (n-1)! \int_{E_{n-1}} M_{Z_n|\mathbf{W}=\mathbf{w}}(t) d\mathbf{w}.$$

با توجه به تابع مولد گشتاور میانگین وزنی (غیر تصادفی) از متغیرهای تصادفی گاما، رابطه (۴)، داریم:

$$M_{Z_n}(t) = (n-1)! \int_{E_{n-1}} \prod_{i=1}^n (1 - \frac{t}{\beta} w_i)^{-\alpha_i} d\mathbf{w},$$

به طوری که سمت راست رابطه مذکور نمایش انتگرالی تابع لاریسلا دوم  $F_B^{(n)}$  است. بنا براین:

$$M_{Z_n}(t) = F_B^{(n)}\left(n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; 1, 1, \dots, 1; \frac{t}{\beta}, \dots, \frac{t}{\beta}\right).$$

همانند محاسبه تابع مولد گشتاور، گشتاور  $m$  ام میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما در حالتی که

$\alpha_i = \alpha$  و  $\beta = \lambda$  برابر است با:

$$\begin{aligned} E(Z_n^m) &= \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \frac{m!}{m_1! \dots m_n!} E(W_1^{m_1} \dots W_n^{m_n}) E(X_1^{m_1}) \dots E(X_n^{m_n}) \\ &= (n-1)! \frac{\Gamma(m_1+1) \dots \Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m+n)} E(X_1^{m_1}) \dots E(X_n^{m_n}) \\ &= \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \frac{m! (n-1)!}{(m+n-1)!} \frac{1}{\lambda^{m_1}} \dots \frac{1}{\lambda^{m_n}} \frac{\Gamma(m_1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \dots \frac{\Gamma(m_n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\binom{m+n-1}{m}} \frac{1}{\lambda^m \Gamma(\alpha)^n} \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \prod_{i=1}^n \Gamma(m_i + \alpha), \end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

**نکته ۲:** با توجه به قضیه ۳ ملاحظه می‌شود زمانی که متغیرهای تصادفی دارای توزیع  $G(\alpha, \lambda)$  هستند امیدریاضی و

واریانس میانگین وزنی تصادفی از آن‌ها به ترتیب برابر با  $\frac{\alpha}{\lambda}$  و  $\frac{2\alpha}{(n+1)\lambda^2}$  است.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله به مدل‌بندی و پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی خانواده‌ای از توزیع‌های بتا، گاما و نرمال پرداختیم. روش‌های معمول و رایج آماری، در اینجا به دلیل تصادفی بودن وزن‌ها، چندان کارساز نیست و گاهی اوقات حتی در حالتی که اندازه نمونه تصادفی برابر ۲ است ما را به توزیع صریح و به شکل بسته رهنمون نمی‌کند. روش مورد نظر در این مقاله، استفاده از برخی تبدیل‌های انتگرالی و همچنین توابع فوق هندسی چندگانه

است که در مدل‌بندی و توزیع میانگین وزنی تصادفی به شکل صریح بسیار مفید عمل می‌کنند. در نهایت نیز با استفاده از همین توابع و نمایش انتگرالی آن‌ها تابع مولد گشتاور و هم‌چنین گشتاورهای میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما ارائه شد.

### تقدیر و تشکر

از داوران محترم مقاله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و هم‌چنین از سردبیر مجله و اعضای هیات تحریریه قدردانی می‌شود. از دانشگاه یزد نیز به دلیل حمایت و پشتیبانی از این مقاله قدردانی می‌شود.

### منابع

1. Van Assche W., "A random variable uniformly distributed between two independent random variables", *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 49 (1987) 207-211.
2. Johnson N. L., Kotz S., "Randomly weighted averages: Some aspects and extensions", *The American Statistician*, 44 (1990) 245-249.
3. Di Salvo F., Lovison G., "Parametric inference on composite samples with random weights", working papers GRASPA, [www.graspa.org](http://www.graspa.org) (2000).
4. Soltani A. R., Homei H., "Weighted averages with random proportions that are jointly uniformly distributed over the unit simplex", *Statistics & Probability Letters*, 79 (2009) 1215-1218.
5. Soltani A. R., Roozegar R., "On distribution of randomly ordered uniform incremental weighted averages: Divided difference approach", *Statistics & Probability Letters*, 82 (2012) 1012-1020.
6. Roozegar R., Soltani A. R., "Classes of power semicircle laws that are randomly weighted average distributions", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84 (2014) 2636-2643.
7. Roozegar R., "Randomly Weighted Average with Dirichlet Component Proportions", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, (2015) (just-accepted).
8. Roozegar R., "Certain family of weighted averages with beta random weights", *Journal of Statistics Applications and Probability Letters*, 1 (2014) 19-22.
9. Chen X., Jin M., "A randomly weighted estimate of the population mean", *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 10 (1994) 274-287.
10. Erdelyi A., "Higher trascendental functios and applications", McGraw-Hill Book Company (1953).

11. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., "Table of Integrals, Series and Products (Corrected and Enlarged Edition prepared by A. Jeffrey and D. Zwillinger) ", Academic Press, NewYork, (2000).
12. Abramowitz M., Stegun I. A., "Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)", Courier Corporation (1964).
13. Almasi I., Jalilian R., Sayehmiri K., "The exact distribution of sums weights of gamma variables", Journal of Iranian Statistical Society, 11 (2012) 23-37.