

وجود جواب‌های دستگاه‌های نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا

روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$

حجت‌اله امیری کیوانلو، مهناز خانه‌گیر، رضا الهیاری*

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۸/۱۳

دریافت ۹۶/۱۲/۲۸

چکیده

در این مقاله فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ را معرفی می‌کنیم و یک اندازه نافرزدگی را روی آن تعریف می‌کنیم. برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادی، در بخش کاربرد این مقاله با ارائه یک قضیه به وجود جواب یک دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا می‌پردازیم و با استفاده از تکنیک اندازه نافرزدگی به همراه قضیه نقطه ثابت داربو وجود این جواب را در این فضا تضمین می‌کنیم. در انتها با ارائه مثال‌هایی کاربردی و کاربرد این قضیه را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌های نافرزدگی، فضای فرشه، قضیه نقطه ثابت داربو، دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال ولترا.

مقدمه

اندازه‌های نافرزدگی ابزارهای مفیدی در نظریه معادلات عملگری در فضاهای باناخ و فرشه هستند. همچنین در نظریه معادلات تابعی که شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال دیفرانسیلی و نظریه کنترل بهینه هستند، کاربرد دارند. اندازه‌های نافرزدگی و قضیه نقطه ثابت داربو نقش مهمی را در نظریه نقطه ثابت و کاربردهای آن ایفا می‌کنند. اولین اندازه نافرزدگی به وسیله کاراتووسکی (۱۹۳۰) [۵] تعریف و بررسی شد. در سال ۱۹۵۵ داربو به کمک اندازه نافرزدگی قضیه‌ای را ارائه کرد که وجود نقاط ثابت را در عملگرهای تراکمی تضمین می‌کرد [۳]. نظریه دستگاه‌های نامتناهی از معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل شاخه‌ای مهم از آنالیز غیرخطی هستند. اندازه نافرزدگی برای وجود جواب معادلات انتگرال غیرخطی، معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه‌های متناهی و نامتناهی از معادلات دیفرانسیل به وسیله محققان مختلفی به کار گرفته شده است (به طور مثال [۷]، [۸]، [۹]، [۱۳]، [۱۵] را ببینید). همچنین آنها کاربردهای بسیار در مسائل جهان حقیقی ما از جمله مهندسی مکانیک، نظریه فرایندهای انشعاب و نظریه شبکه‌های عصبی دارند ([۴]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴] را ببینید). فرض کنید $\mathbb{R}^\infty$ فضای خطی از تمام دنباله‌های حقیقی باشد. اخیراً اولزوی [۹]، [۱۰] فضای فرشه جدیدی را تحت عنوان $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ (فضای تمام توابع پیوسته روی $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$) بیان و خصوصیات آن را بررسی کرده است و یک اندازه نافرزدگی روی این فضا تعریف کرده است. سپس با کمک قضیه نقطه ثابت داربو به حل دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال پرداخته است. همچنین لطیف و همکارانش [۶] حل‌پذیری معادلات انتگرال تابعی را در فضای فرشه $C(\Omega) \quad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^N)$ بررسی کرده و با تعریف خانواده‌ای از اندازه‌های نافرزدگی به حل دستگاهی از معادلات انتگرال در این فضا پرداخته‌اند.

در این مقاله یک اندازه نافشردگی روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ معرفی می‌کنیم و باکمک آن وجود جواب برای یک دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا را بررسی می‌کنیم و در انتها با ارائه دو مثال کارایی و کاربرد این قضیه را نشان می‌دهیم.

نمادگذاری و مطالب پایه‌ای

در این بخش، بعضی از مفاهیم و نمادهای مورد نیاز بخش‌های بعدی را بیان می‌کنیم. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ حقیقی باشد، برای $\emptyset \neq X \subset E$ ، مجموعه $\bar{X}$ و $\text{Conv}X$ را به ترتیب بستار و غلاف محدب X می‌نامیم. علاوه بر این، $\mathfrak{M}_E$ را خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی و کران دار E و $\mathfrak{N}_E$ را زیر خانواده شامل همه زیرمجموعه‌های به‌طور نسبی فشرده E در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱. [۲]. نگاشت $\mu: \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ را اندازه نافشردگی در E نامیم هرگاه در این شرایط صدق کند:

۱. خانواده $\ker \mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\ker \mu \subseteq \mathfrak{N}_E$ ،

۲. اگر $X \subset Y$ آنگاه $\mu(X) \leq \mu(Y)$ ،

۳. $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$ ،

۴. $\mu(\text{Conv}X) = \mu(X)$ ،

۵. به‌ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ این رابطه برقرار باشد:

$$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y),$$

۶. اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_E$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n=1, 2, \dots$ $X_{n+1} \subset X_n$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0, \text{ آنگاه } X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset.$$

زیر خانواده $\ker \mu$ که در (۱) تعریف شده بیان‌گر هسته اندازه نافشردگی است و چون برای هر n ،

$$\mu(X_\infty) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \mu(X_n)$$

$$\text{پس } X_\infty \in \ker \mu \text{ و بنابراین } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) = 0.$$

هم‌چنین μ را اندازه نافشردگی منظم می‌نامیم هرگاه علاوه بر شرایط (۱) الی (۶) داشته باشیم

$$\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\} \quad ۷.$$

$$\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) \quad ۸.$$

۹. به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\mu(\lambda X) = |\lambda| \mu(X),$$

$$۱۰. \ker \mu = \mathfrak{N}_E.$$

قضیه ۲. (قضیه نقطه ثابت داربو) [۲]، فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ E

باشد و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. هم‌چنین $F: C \rightarrow C$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوری‌که ثابت $k \in [0, 1)$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

$$\mu(FX) \leq k \mu(X), \quad \forall X \subset C$$

در این صورت F یک نقطه ثابت دارد.

قضیه ۳. (قضیه نقطه ثابت تیخونوف) [۱]، فرض کنید E فضای توپولوژیکی خطی موضعاً محدب هاسدورف باشد و C یک زیرمجموعه ناتهی محدب از E و $F: C \rightarrow E$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که در این نامساوی صدق کند:

$$F(C) \subseteq A \subseteq C,$$

که در آن A فشرده است. آن گاه تابع F حداقل یک نقطه ثابت دارد.

تعریف ۴. [۱۶]، فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. در این صورت گوییم:

الف) X یک F -فضاست اگر توپولوژی آن به وسیله یک متر پایای کامل القا شده باشد.

ب) X یک فضای فرشه است اگر X یک F -فضای به طور موضعی محدب باشد.

مثال ۵. فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$ فضای باناخ باشد. در این صورت فضای حاصل ضرب $\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ با متر تعریف

$$\text{شده به وسیله } d(x, y) = \sup \left\{ \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} : i \in \mathbb{N} \right\} \text{ که در آن}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \text{ یک فضای فرشه است.}$$

اکنون فرض کنید $T > 0$ ثابت باشد. همچنین فرض کنید $C([0, T]^N)$ فضای باناخ شامل تمام توابع حقیقی پیوسته تعریف شده روی $[0, T]^N$ همراه با نرم $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, T]^N\}$ باشد. می‌دانیم زیرمجموعه ناتهی X از $C([0, T]^N)$ کراندار است اگر $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in X$ داشته باشیم $\|f\|_\infty \leq M$.

یادآوری ۶. هر مجموعه کراندار در $\mathbb{R}^N$ به طور نسبی فشرده است.

تعریف ۷. فرض کنید X یک زیرمجموعه ناتهی و کراندار از $C([0, T]^N)$ باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ و هر $\varepsilon > 0$ تعریف می‌کنیم

$$\omega_0^T(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)|, t, s \in [0, T]^N, \max\{|t_i - s_i|, i = 1, 2, \dots, N\} \leq \varepsilon\},$$

$$\text{که در آن } t = (t_1, t_2, \dots, t_N), s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$$

$$\omega_0^T(X, \varepsilon) = \sup\{\omega_0^T(x, \varepsilon), x \in X\}, \quad \omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_0^T(X, \varepsilon).$$

در این صورت ω_0^T بنا به [۹] یک اندازه نافشرده‌گی منظم در فضای $C([0, T]^N)$ است.

یادآوری ۸. [۹]، فرض کنید $\mathbb{R}^\infty$ به متر زیر مجهز شده باشد.

$$d_{\mathbb{R}^\infty}(a, b) = \sup\left\{\frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} : i \in \mathbb{N}\right\},$$

که در آن $a = (a_i), b = (b_i) \in \mathbb{R}^\infty$. در این صورت فضای $\mathbb{R}^\infty$ یک فضای فرشه است. برای هر دنباله $a = (a_i) \in \mathbb{R}^\infty$ قرار می‌دهیم $\pi_i(a) = a_i$. اکنون فضای $C([0, T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ شامل تمام توابع پیوسته روی $[0, T]^N$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$ را در نظر بگیرید. برای هر $x = (x_i(t_1, \dots, t_N)) \in C([0, T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ قرار می‌دهیم $\pi_i(x) = x_i$ واضح است که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $\pi_i(x) \in C([0, T]^N)$.

همچنین اگر $X \subset C([0, T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ آن گاه برای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $\pi_i(X) = \{\pi_i(x) : x \in X\}$

فضای $C([0, T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ مجهز به متر زیر است.

$$d_{C_T}(x, y) = \sup\{d_{\mathbb{R}^\infty}(x(t_1, \dots, t_N), y(t_1, \dots, t_N)) : t = (t_1, \dots, t_N) \in [0, T]^N\},$$

وقتی که $x, y \in C([0, T]^N, \mathbb{R}^\infty)$.

نتایج اصلی

در این بخش به معرفی فضای فرشه $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ و توصیف برخی از خواص آن می‌پردازیم. سپس یک اندازه نافرزدگی روی این فضا معرفی می‌کنیم و با کمک آن یک قضیه نقطه ثابت را بیان می‌کنیم. نتایج مورد نظر تعمیمی از مطالب ارائه شده در [۹] هستند و از این‌رو، از ذکر جزئیات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

فرض کنید $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ فضای تمام توابع پیوسته تعریف شده روی $\mathbb{R}_+^N$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$ باشند. این فضا مجهز به خانواده‌ای از نیم نرمها بدین‌صورت است:

$$\|x\|^T = \sup\{|\pi_i(x)(t)| : i \leq T, t \in [0, T]^N\},$$

وقتی $T \in \mathbb{N}$. همچنین این فضا با متر تعریف شده بدین‌صورت است:

$$d_c(x, y) = \sup\left\{\frac{1}{2^T} \frac{\|x - y\|^T}{(1 + \|x - y\|^T)} : T \in \mathbb{N}\right\}$$

وقتی که $x, y \in C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ ، یک فضای فرشه است.

همگرایی و به‌طور نسبی فشردگی در $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ با شرایط زیر مشخص‌سازی می‌شوند.

۱. دنباله (x_n) همگرا به x در $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ است اگر و فقط اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ $\pi_i(x_n)$ به‌طور یکنواخت همگرا به $\pi_i(x)$ روی $[0, T]^N$ باشد.

۲. زیرمجموعه $X \subset C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ به‌طور نسبی فشرده است اگر و فقط اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ مجموعه توابع $\pi_i(X)$ هم‌پیوسته و به‌طور یکنواخت کراندار روی $[0, T]^N$ باشد.

همچنین برای هر $T > 0$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{C_T}(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_C(x_n, x) = 0.$$

تعریف ۹. زیرمجموعه ناتهی $Z \subset \mathbb{R}^\infty$ کراندار نامیده می‌شود اگر برای هر $i = 1, 2, \dots$

$$\sup\{|\pi_i(z)| : z \in Z\} < \infty.$$

زیرمجموعه Y از $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^\infty$ کراندار نامیده می‌شود اگر Y مشمول در مجموعه‌ای به‌صورت $[0, T]^N \times Z$ باشد که $T > 0$ و Z در $\mathbb{R}^\infty$ کراندار است. زیرمجموعه ناتهی $X \subset C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ کراندار نامیده می‌شود اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ ، مجموعه توابع $\pi_i(X)$ به‌طور یکنواخت کراندار روی $[0, T]^N$ باشد، یعنی

$$\sup\{|\pi_i(x)(t)| : t = (t_1, \dots, t_N) \in [0, T]^N, x \in X\} < \infty.$$

در ادامه فرض کنید خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار در $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ و همچنین $\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)}$ زیرخانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی و به‌طور نسبی فشرده از $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ باشد. اندازه نافرزدگی منظم ω_0 در فضای $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید $p_i : \mathbb{R}_+^N \rightarrow (0, \infty)$ دنباله‌ای از توابع باشد. برای هر $X \in \mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)}$ قرار می‌دهیم:

$$\omega_0^T(X) = \sup\{p_i(T, \dots, T) \omega_0^T(\pi_i(X)) : i \in \mathbb{N}\},$$

$$\omega_0(X) = \sup\{\omega_0^T(X) : T > 0\}.$$

در قضیه ۱۰ خواص اساسی ω_0 را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰. [۹]. نگاشت $\omega_0 : \mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)} \rightarrow [0, \infty]$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. $\omega_0(X) = 0$ اگر و فقط اگر X زیرمجموعه به‌طور نسبی فشرده از $(C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty))$ باشد،

۲. اگر $X \subset Y$ آن‌گاه $\omega_0(X) \leq \omega_0(Y)$.

$$.۳. \varpi_0(X) = \varpi_0(\text{Conv} X) = \varpi_0(\overline{X})$$

۴. برای هر $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$\varpi_0(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \varpi_0(X) + (1-\lambda) \varpi_0(Y),$$

۵. اگر (X_n) دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)}$ باشد به‌طوری که برای هر $n = 1, 2, \dots$

$$X_{n+1} \subset X_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \varpi_0(X_n) = 0 \text{ آن گاه اشتراک } X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \text{ ناتهی است،}$$

۶. برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\varpi_0(\lambda X) = |\lambda| \varpi_0(X)$ ،

$$.۷. \varpi_0(X + Y) \leq \varpi_0(X) + \varpi_0(Y)$$

$$.۸. \varpi_0(X \cup Y) \leq \max \{ \varpi_0(X), \varpi_0(Y) \}$$

توجه کنید که اندازه نافشردگی ϖ_0 روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ ممکن است مقدار ∞ را بپذیرد.

در زیر نوع دیگری از قضیه نقطه ثابت داربو روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۱. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ باشد و $\varpi_0(C) < \infty$. همچنین فرض کنید $F: C \rightarrow C$ یک نگاشت پیوسته باشد و عدد ثابت $q \in [0, 1]$ موجود باشد

به‌طوری که برای هر زیرمجموعه ناتهی X از C داشته باشیم

$$\varpi_0(FX) \leq q \varpi_0(X), \quad (۱)$$

در این صورت F یک نقطه ثابت در مجموعه C دارد.

اثبات: فرض کنید $C_0 = C$ ، دنباله $\{C_n\}$ را طوری می‌سازیم که برای هر $n \geq 0$ ، $C_{n+1} = \text{Conv}(FC_n)$

همچنین داریم

$$C_1 = \text{Conv}(FC_0) \subseteq C = C_0, \quad FC_0 = FC \subseteq C = C_0,$$

با ادامه روند مذکور داریم:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$$

اگر عدد طبیعی $N \geq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\varpi_0(C_N) = 0$ آن گاه C_N به‌طور نسبی فشرده است. بنابراین از قضیه تیخونوف نتیجه می‌شود که F یک نقطه ثابت دارد. در غیر این صورت فرض می‌کنیم برای هر عدد صحیح

$$\varpi_0(C_m) \neq 0, \quad m \geq 0$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\varpi_0(C_{m+1}) = \varpi_0(\text{Conv}(FC_m)) = \varpi_0(FC_m) \leq q \varpi_0(C_m). \quad (۲)$$

چون $q \in [0, 1]$ بنابراین $\{\varpi_0(C_m)\}$ یک دنباله کاهشی و مثبت از اعداد حقیقی است. از این‌رو، $r \geq 0$ وجود دارد به‌طوری که $\varpi_0(C_m) \rightarrow r$ وقتی $m \rightarrow \infty$. حال ادعا می‌کنیم $r = 0$. به برهان خلف فرض می‌کنیم $r > 0$. با

استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \varpi_0(C_{m+1}) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} q \varpi_0(C_m).$$

بنابراین $q \geq 1$ که با فرض $q \in [0, 1]$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و از این‌رو، $r = 0$ و

$$\varpi_0(C_m) \rightarrow 0 \text{ وقتی } m \rightarrow \infty.$$

چون دنباله $\{C_m\}$ تو در تو است از این‌رو، با استفاده از شرط (۵) تعریف اندازه نافشردگی نتیجه می‌گیریم که

$$C_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset, \text{ بسته، محدب و } C_\infty \subset C \text{ است. همچنین } C_\infty, \text{ تحت نگاشت } F \text{ پایا است. اکنون از قضیه}$$

تیخونوف نتیجه می‌شود که F دارای نقطه ثابت در C است.

کاربرد دستگاه‌های نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه اندازهٔ نافشردگی تعریف شده روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ در بخش قبل، می‌تواند در حل‌پذیری دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا کاربرد داشته باشد. فرض کنید $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^N}$ خانواده همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار از $\mathbb{R}^N$ باشد. اکنون دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال (۴) را در نظر بگیرید.

$$u_i(t) = f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy). \quad (۴)$$

که در آن هر $i \in \mathbb{N}$ ، $g_i: \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f_i: \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $h_i: \mathbb{R}_+^N \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^N} \Lambda(t) \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ و $\Lambda: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}^N}$ توابعی پیوسته هستند.

تعریف ۱۲. نگاشت $\Lambda: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}^N}$ پیوسته نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $t, s \in \mathbb{R}_+^N$ داشته باشیم

$$\max\{|t_i - s_i|, i = 1, 2, \dots\} < \delta \Rightarrow \mu(\Lambda(t) \Delta \Lambda(s)) < \varepsilon,$$

که در آن μ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^N$ است و Δ تفاضل متقارن در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ است.

قضیه ۱۳. فرض کنید این فرضیات برقرار باشد.

۱. تابع $\Lambda: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}^N}$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ مجموعه $\bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t)$ کراندار است.

۲. برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $f_i: \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ خانواده توابع $\{f_i(t, y, z)\}_{(y, z) \in B_1 \times B_2}$ زیرمجموعه‌های کراندار از $\mathbb{R}$ هستند روی $-N$ -جره‌های $[0, T]^N$ هم‌پیوسته است. به‌علاوه توابع نامنفی $a_i, b_i: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $y, z, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ و $t \in \mathbb{R}_+^N$ این رابطه برقرار باشد:

$$|f_i(t, y, z) - f_i(t, y_1, z_1)| \leq a_i(t)|y - y_1| + b_i(t)|z - z_1|.$$

۳. برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $g_i: \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ خانواده توابع $\{g_i(t, u)\}_{t \in [0, T]^N}$ روی زیرمجموعهٔ کراندار $Z \subseteq \mathbb{R}^\infty$ هم‌پیوسته است. همچنین برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، خانواده توابع $\{g_i(t, u)\}_{u \in Z}$ روی $-N$ -جره‌های $[0, T]^N$ برای هر زیرمجموعهٔ کراندار $Z \subseteq \mathbb{R}^\infty$ هم‌پیوسته است. به‌علاوه برای هر $i \in \mathbb{N}$ تابع $d_i: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t \in \mathbb{R}_+^N$ و هر $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ این رابطه برقرار است:

$$|g_i(t, (u_1, u_2, \dots)) - g_i(t, (v_1, v_2, \dots))| \leq d_i(t)|u_i - v_i|.$$

۴. برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $h_i: \mathbb{R}_+^N \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^N} \Lambda(t) \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. فرض کنید Z زیرمجموعهٔ کراندار

دلخواهی از $\mathbb{R}^\infty$ باشد. همچنین فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ ، خانواده توابع $\{h_i(t, y, u)\}_{(y, u) \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^N} \Lambda(t) \times Z}$ روی $-N$ -جره‌های $[0, T]^N$ هم‌پیوسته و خانواده توابع

$c_i: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($i \in \mathbb{N}$) باشند. به‌علاوه تابع پیوسته $\{h_i(t, y, u)\}_{(t, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^N} \Lambda(t)}$ روی Z هم‌پیوسته باشند.

وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left| \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy \right| \leq c_i(t),$$

که در آن $t \in \mathbb{R}_+^N$ و $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^N} \Lambda(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^N$ تابعی پیوسته است.

۵. برای هر $t \in \mathbb{R}_+^N$ و هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $a_i(t)d_i(t) < 1$.

در این صورت سیستم نامتناهی معادلات انتگرال (۴) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ است.

اثبات: ابتدا عملگر F را روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ با این ضابطه تعریف می‌کنیم:

$$Fu(t) = (\pi_i(Fu)(t)) = (f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy)).$$

اکنون نشان می‌دهیم برای $i = 1, 2, \dots$ توابع $r_i : \mathbb{R}_+^N \rightarrow (0, \infty)$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_+^N$ و $u \in C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ اگر $|\pi_i(u)(t)| \leq r_i(t)$ آنگاه $|\pi_i(Fu)(t)| \leq r_i(t)$ برای این منظور با استفاده از خواص (۱) الی (۵) داریم:

$$\begin{aligned} & |\pi_i(Fu)(t)| = |f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy)| \\ & \leq |f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) - f_i(t, 0, 0)| + |f_i(t, 0, 0)| \\ & \leq a_i(t) |g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)) - g_i(t, (0, 0, \dots))| + b_i(t) \left| \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy \right| + |f_i(t, 0, 0)| \\ & \leq a_i(t) (|g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)) - g_i(t, (0, 0, \dots))| + |g_i(t, (0, 0, \dots))|) + b_i(t)c_i(t) + |f_i(t, 0, 0)| \\ & \leq a_i(t)(d_i(t)|u_i(t)| + |g_i(t, (0, 0, \dots))|) + b_i(t)c_i(t) + |f_i(t, 0, 0)|. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$r_i(t) = \frac{a_i(t) |g_i(t, 0, 0, \dots)| + b_i(t)c_i(t) + |f_i(t, 0, 0)|}{1 - a_i(t)d_i(t)}.$$

زیرمجموعه Q از فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ شامل تمام توابع $u(t) = (u_i(t_1, t_2, \dots, t_N))$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q = \{u \in C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty), |u_i(t)| \leq r_i(t), \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

به‌آسانی بررسی می‌شود که زیرمجموعه Q ناتپی، بسته، کراندار و محدب از فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ است.

به‌علاوه تعریف $r_i(t)$ ایجاب می‌کند که Q تحت F پایا است از این‌رو، $F : Q \rightarrow Q$.

اکنون نشان دهیم که تابع F یک عملگر پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $u, u_n \in Q$ ($n \in \mathbb{N}$) و $t \in [0, T]^N$ باشد به‌طوری‌که $\pi_i u_n(t) \rightarrow \pi_i u(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) در $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ همگرا باشد.

باید نشان دهیم:

$$|\pi_i(Fu_n)(t) - \pi_i(Fu)(t)| \rightarrow 0.$$

برای این منظور، با به‌کارگیری فرضیات (۲) الی (۴) داریم

$$\begin{aligned} & |\pi_i(Fu_n)(t) - \pi_i(Fu)(t)| = |f_i(t, g_i(t, (u_{n,1}(t), u_{n,2}(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_{n,1}(\xi(y)), u_{n,2}(\xi(y)), \dots)) dy) \\ & - f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy)| \\ & \leq a_i(t) |g_i(t, (u_{n,1}(t), u_{n,2}(t), \dots)) - g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots))| \\ & + b_i(t) \left| \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_{n,1}(\xi(y)), u_{n,2}(\xi(y)), \dots)) dy \right| \end{aligned}$$

$$- \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) |$$

در نتیجه به کمک شرط‌های (۳) و (۴) داریم

$$\begin{aligned} & | \pi_i(Fu_n)(t) - \pi_i(Fu)(t) | \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]^N} a_i(t) | g_i(t, (u_{n,1}(t), u_{n,2}(t), \dots)) - g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots)) | \\ & + \sup_{t \in [0, T]^N} b_i(t) | \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_{n,1}(\xi(y)), u_{n,2}(\xi(y)), \dots)) dy - \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy | \\ & \leq \overline{a_i}^T v_0^T(g_i, \sup_{t \in [0, T]^N} |u_{n,i}(t) - u_i(t)|) + \overline{b_i}^T v_0^T(h_i, \sup_{t \in [0, T]^N} |u_{n,i}(t) - u_i(t)|) \Lambda^T \end{aligned}$$

که $[0, T]_T^N$ تصویر تابع پیوسته ξ روی مجموعه $\bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t)$ است که در $\mathbb{R}^N$ بسته و کراندار است. و در روابط اخیر

داریم:

$$\begin{aligned} \overline{a_i}^T &= \sup \{a_i(t), t \in [0, T]^N\}, \quad \overline{b_i}^T = \sup \{b_i(t), t \in [0, T]^N\}, \quad \Lambda^T = \sup \{\mu(\Lambda(t)), t \in [0, T]^N\}, \\ v_0^T(g_i, \varepsilon) &= \sup \{|g_i(t, u) - g_i(t, v)|, t \in [0, T]^N, u = (u_i), v = (v_i), |u_i| \leq r_i(T), |v_i| \leq r_i(T), d_{\mathbb{R}^\infty}(u, v) < \varepsilon\}, \\ v_0^T(h_i, \varepsilon) &= \sup \{|h_i(t, y, u) - h_i(t, y, v)|, t \in [0, T]^N, u = (u_i), v = (v_i), y \in \bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t), d_{\mathbb{R}^\infty}(u, v) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

با استفاده از مفروضات (۳) و (۴) و چون خانواده توابع $\{g_i(t, u)\}_{t \in [0, T]^N}$ و $\{h_i(t, y, u)\}_{(t, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t)}$ برای

$i = 1, 2, \dots$ هم‌پیوسته هستند، بنابراین داریم $v_0^T(g_i, \varepsilon) \rightarrow 0$ ، $v_0^T(h_i, \varepsilon) \rightarrow 0$ موقعی که $\varepsilon \rightarrow 0$. در نتیجه

داریم:

$$| \pi_i(Fu_n)(t) - \pi_i(Fu)(t) | \rightarrow 0.$$

وقتی $n \rightarrow \infty$. از این‌رو عملگر F پیوسته است. در انتها شرایط قضیه ۱۱ را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از Q باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ و $t, s \in [0, T]^N$ که $t = (t_1, \dots, t_N)$ و $s = (s_1, \dots, s_N)$ با شرط $\max \{|t_i - s_i|, i = 1, 2, \dots, N\} < \varepsilon$ و $u \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} | \pi_i(Fu)(t) - \pi_i(Fu)(s) | &= | f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \\ &\quad - f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots))), \int_{\Lambda(s)} h_i(s, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) |. \end{aligned}$$

حال با افزودن و کاستن عبارت‌های مناسب و به کار بردن فرضیات (۲) الی (۴) مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} | \pi_i(Fu)(t) - \pi_i(Fu)(s) | &\leq | f_i(t, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \\ &\quad - f_i(s, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) | \\ &\quad + | f_i(s, g_i(t, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \\ &\quad - f_i(s, g_i(s, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) | \\ &\quad + | f_i(s, g_i(s, (u_1(t), u_2(t), \dots))), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) | \\
& + |f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \\
& -f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots)), \int_{\Lambda(s)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) | \\
& + |f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots)), \int_{\Lambda(s)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) \\
& -f_i(s, g_i(s, (u_1(s), u_2(s), \dots)), \int_{\Lambda(s)} h_i(s, y, (u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots)) dy) |.
\end{aligned}$$

در نتیجه با به کارگیری شرایط (۲) الی (۴) داریم:

$$\begin{aligned}
& |\pi_i(Fu)(t) - \pi_i(Fu)(s)| \leq v_0^T(f_i, \varepsilon) + \bar{a}_i^T \eta^T(g_i, \varepsilon) \\
& + d_i^T \bar{a}_i^T \omega_0^T(u_i, \varepsilon) + \bar{b}_i^T \bar{h}_i^T \mu(\Lambda(t) \Delta \Lambda(s)) + \Lambda^T \bar{b}_i^T v_0^T(h_i, \varepsilon)
\end{aligned}$$

که در روابط اخیر داریم

$$\begin{aligned}
\Lambda^T &= \sup\{\mu(\Lambda(t)), t \in [0, T]^N\}, \bar{h}_i^T = \sup\{|h_i(t, y, u)|, t \in [0, T]^N, y \in \bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t)\}, \\
\eta^T(g_i, \varepsilon) &= \sup\{|g_i(t, u) - g_i(s, u)| : t, s \in [0, T]^N, \max\{|t_j - s_j|, j = 1, 2, \dots, N\} < \varepsilon, u = (u_i), |u_i| \leq r_i(T)\}, \\
v_0^T(f_i, \varepsilon) &= \sup\{|f_i(t, y, z) - f_i(s, y, z)|, t, s \in [0, T]^N, \max\{|t_j - s_j|, j = 1, 2, \dots, N\} < \varepsilon, |y| \leq \bar{g}^T, |z| \leq \bar{h}^T \Lambda^T\}, \\
d_i^T &= \sup\{d_i(t), t \in [0, T]^N\}, \bar{g}^T = \sup\{|g_i(t, u)|, t \in [0, T]^N, u \in Z \subseteq \mathbb{R}^\infty\}, \\
&\text{که } Z \text{ زیرمجموعه فشرده از } \mathbb{R}^\infty \text{ است و بنابراین } v_0^T(f_i, \varepsilon) \rightarrow 0, v_0^T(h_i, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ وقتی که } \varepsilon \rightarrow 0. \\
&\text{از طرفی چون خانواده توابع } \{g_i(t, u)\}_{u \in Z} \text{ روی } [0, T]^N \text{ } N \text{ -جره‌های } \Lambda \text{ پیوسته است پس } \mu(\Lambda(t) \Delta \Lambda(s)) \rightarrow 0 \\
&\text{وقتی که } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ و برای } t, s \in [0, T]^N \text{ با } \delta < \max\{|t_j - s_j|, j = 1, 2, \dots, N\} < \delta.
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\omega_0^T(\pi_i(Fu)) \leq d_i^T \bar{a}_i^T \omega_0^T(\pi_i(u)).$$

اکنون با در نظر گرفتن $p_i(T, \dots, T) = (r_i(T))^{-1}$ داریم:

$$\frac{1}{r_i(T)} \omega_0^T(\pi_i(Fu)) \leq \frac{d_i^T \bar{a}_i^T}{r_i(T)} \omega_0^T(\pi_i(u)).$$

بنابراین با استفاده از شرط (۵) داریم

$$\omega_0^T(FX) \leq q \omega_0^T(X)$$

در نهایت نتیجه می‌شود که

$$\omega_0(FX) \leq q \omega_0(X).$$

که در آن $q = \sup\{d_i^T \bar{a}_i^T : i \in \mathbb{N}\} < 1$.

علاوه بر این با استفاده از تعریف اندازه نافرزدگی روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ داریم

$$\omega_0^T(\pi_i(u), \varepsilon) \leq 2r_i(T)$$

وقتی $u \in Q$ پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r_i(T)} \omega_0^T(\pi_i(u), \varepsilon) \leq 2 \Rightarrow \varpi_0(Q) \leq 2.$$

سرانجام تمام شرایط قضیه ۱۱ برقرار است. بنابراین معادله انتگرال نامتناهی از نوع ولترا (۴) دارای حداقل یک جواب در فضای $(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ است.

مثال ۱۴. دستگاه نامتناهی معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$u_i(t) = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(t+7)j^5} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(u_i(t))}{\sqrt{5}(2j-1)^2} \right) + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t+y)\cos(u_i(y))}{3j(j+1)} dy. \quad (5)$$

دستگاه معادله انتگرال (۵) حالت خاصی از معادله انتگرال (۴) است که در آن

$$\Lambda(t) = (0, t), \quad \xi(t) = t, \quad f_i(t, y, z) = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(t+7)j^5} + y + z,$$

$$g_i(t, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(u_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2} \right), \quad h_i(t, y, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t+y)\cos(u_i)}{3j(j+1)},$$

وقتی که، $u = (u_i) \in \mathbb{R}^\infty$. واضح است که برای $t \in (0, \infty)$, $y, z, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ شرط (۲) قضیه ۱۳ به‌ازای $a_i(t) = b_i(t) = 1$ برای $i = 1, 2, \dots$ برقرار است.

$$|f_i(t, y, z) - f_i(t, y_1, z_1)| \leq |y - y_1| + |z - z_1|.$$

هم‌چنین با قراردادن $d_i(t) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{5}}$ برای $i = 1, 2, \dots$ شرط (۳) قضیه ۱۳ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} |g_i(t, u) - g_i(t, v)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(u_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(v_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2} \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}(2j-1)^2} |\sin(u_i) - \sin(v_i)| \leq \frac{\pi^2}{8\sqrt{5}} |u_i - v_i|. \end{aligned}$$

که $v = (v_i), u = (u_i) \in \mathbb{R}^\infty$.

سرانجام شرط (۴) قضیه ۱۳ را بدین‌صورت بررسی می‌کنیم:

$$\left| \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t+y)\cos(u_i(y))}{3j(j+1)} dy \right| \leq \int_0^t \frac{t+y}{3} dy = \frac{1}{2} t^2 = c_i(t).$$

هم‌چنین به‌طور بدیهی شرط (۵) قضیه ۱۳ برای $i = 1, 2, \dots$ برقرار است.

$$a_i(t) d_i(t) = 1 \times \frac{\pi^2}{8\sqrt{5}} < 1.$$

بنابراین تمام شرایط قضیه ۱۳ برقرار است. در نتیجه معادله انتگرال (۵) دارای حداقل یک جواب در فضای $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ است.

مثال ۱۵. دستگاه نامتناهی معادله انتگرال (۶) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} u_i(t_1, t_2) &= \sum_{j=1}^i \frac{\sqrt{(t_1+t_2)^3}}{(4+e^{t_1+t_2})j^{\frac{3}{2}}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2})\cos(u_i(t_1, t_2))}{1+|\sin(\cos t_1)|} \right) + \frac{1}{6} \ln(1+|\arctan(u_i(t_1, t_2))|) \\ &+ \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \frac{t_1 t_2 y_1^2 y_2^2}{1+t_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(u_i(y_1, y_2))}{j(j+1)(j+2)} \tanh(u_i(y_1, y_2)) dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (6)$$

دستگاه معادله انتگرال (۶) حالت خاصی از معادله انتگرال (۴) است که در آن

$$\Lambda(t_1, t_2) = (0, t_1) \times (0, t_2), \xi(t_1, t_2) = (t_1, t_2), f_i((t_1, t_2), y, z) = \sum_{j=1}^i \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^3}}{(4 + e^{t_1 + t_2}) j^{\frac{3}{2}}} + y + z,$$

$$g_i((t_1, t_2), u) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2}) \cos(u_i)}{1 + |\sin(\cos t_1)|} \right) + \frac{1}{6} \ln(1 + |\arctan(u_i)|),$$

$$h_i((t_1, t_2), (y_1, y_2), u) = \frac{t_1 t_2 y_1^2 y_2}{1 + t_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(u_i)}{j(j+1)(j+2)} \tanh(u_i),$$

وقتی که، $u = (u_i) \in \mathbb{R}^\infty$ و برای هر $y, z, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ ، $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ، شرط (۲) قضیه ۱۳ به‌ازای

$a_i(t_1, t_2) = 1$ و $b_i(t_1, t_2) = 1$ برای $i = 1, 2, \dots$ برقرار است. به‌علاوه داریم:

$$|f_i((t_1, t_2), y, z) - f_i((t_1, t_2), y_1, z_1)| \leq |y - y_1| + |z - z_1|.$$

با در نظر گرفتن $d_i(t_1, t_2) = \frac{\pi^2 + 6}{36}$ برای هر $i = 1, 2, \dots$ شرط (۳) قضیه ۱۳ نیز برقرار است.

$$|g_i((t_1, t_2), u) - g_i((t_1, t_2), v)| \leq$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2})(\cos(u_i) - \cos(v_i))}{1 + |\sin(\cos t_1)|} \right) + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{1 + |\arctan u_i|}{1 + |\arctan v_i|} \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{6j^2}\right)(\cos(u_i) - \cos(v_i)) \right| + \frac{1}{6} \left| \ln \left(1 + \frac{|\arctan u_i| - |\arctan v_i|}{1 + |\arctan v_i|} \right) \right| \\ & \leq \frac{\pi^2}{36} |\cos(u_i) - \cos(v_i)| + \frac{1}{6} |\ln(1 + |\arctan u_i - \arctan v_i|)| \\ & \leq \frac{\pi^2}{36} |u_i - v_i| + \frac{1}{6} |u_i - v_i| = \frac{\pi^2 + 6}{36} |u_i - v_i| \end{aligned}$$

که در آن $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^\infty$. در انتها شرط (۴) قضیه ۱۳ را بدین صورت بررسی می‌کنیم.

$$\left| \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 t_2) y_1^2 y_2}{1 + t_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(u_i(y_1, y_2))}{j(j+1)(j+2)} \tanh(u_i(y_1, y_2)) dy_1 dy_2 \right| \leq \frac{t_1^4 t_2^3}{24(1 + t_1^2)}.$$

که در آن $c_i(t_1, t_2) = \frac{t_1^4 t_2^3}{24(1 + t_1^2)}$. همچنین شرط (۵) قضیه ۱۳ برای $i = 1, 2, \dots$ بدین صورت برقرار است:

$$a_i(t_1, t_2) d_i(t_1, t_2) = 1 \times \frac{\pi^2 + 6}{36} < 1.$$

در نتیجه تمام شرایط قضیه ۱۳ برقرار است. بنابراین معادله انتگرال (۶) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}^\infty)$ است.

منابع

1. Agarwal R. P., Meehan M., O'Regan D., "Fixed Point Theory and Applications", Cambridge university press, Vol. 141 (2001).
2. Banas J., Goebel K., "Measures of noncompactness in Banach spaces", Lecture Notes in Pure and Applied Math. Vol. 60, Dekker, NewYork (1980).

3. Darbo G., "Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto", Rend. Sem. Mat. Uni. Padova, 24 (1955) 84-92.
4. Deimling K., "Ordinary differential equations in Banach spaces", Lecture Notes in Math., Vol. 596, Springer Verlag, Berlin (1977).
5. Kuratowski K., "Sur les espaces complets", Fund. Math. 15 (1930) 301-309.
6. Latefa B., Dejevali S., "Solvability of functional integral equations in the Frechet space $C(\Omega)$ ", Mediter. J. Math. (2016).
7. Mursaleen M., Mohiuddine S. A., "Applications of measures of noncompactness to the infinite system of differential equations in l_p spaces", Nonlinear Anal. 75 (2012) 2111-2115.
8. Mursaleen M., Alotaibi A., "Infinite system of differential equations in some BK spaces", Abstr. Applied Anal, (2012), Article ID 863483, 20.
9. Olszowy L., "Solvability of infinite systems of singular integral equations in Frechet space of continuous functions", Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 2794-2801.
10. Olszowy L., "On some measure of noncompactness in Frechet space of continuous functions", Nonlinear Anal. 71 (2009) 5157-5163.
11. M.N. Oguztöreli, On the neural equations of cowan and stein, Util. Math. 2 (1972) 305-315.
12. Persidskii K. P., "Countable systems of differential equations and stability of their solutions III: Fundamental theorems on stability of solutions of countable many differential equations", Izv. Akad. Nauk Kazach. SSR 9 (1961) 11-34.
13. Rzepka R., Sadarangani K., "On solutions of an infinite system of singular integral equations", Math. Comput. Modelling 45 (2007) 1265-1271.
14. Zautykov O. A., "Countable systems of differential equations and their applications", Differ. Uravn. 1 (1965) 162-170.
15. Zautykov O. A., Valeev K. G., "Infinite systems of differential equations, Izdat", "Nauka" Kazach. SSR, Alma-Ata (1974).

۱۶. مؤسسه نشر علوم نوین، "آنالیز تابعی"، والتر رودین، ترجمه علی اکبر عالم زاده، (۱۳۸۳).