برآوردهای ای-بیز قابلیت اعتماد و نرخ خطر در توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس داده‌های سانسور نوع۲

حسن پیریائی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، گروه آمار،
غلامحسین یاری*، رحمان فرنوش
دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۷/۲۳ پذیرش ۹۸/۰۲/۲۱

چکیده

در این مقاله علاوه بر برآوردهای حداکثر درست‌نمایی و بیز، از روش جدید برآورد ای-بیز برای پارامتر مجهول و توابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته، استفاده می‌شود. محاسبات براساس داده‌های سانسور نوع ۲ و تحت تابع زیان درجه دوم خطا انجام می‌شود. این برآوردها براساس یک توزیع پیشین مزدوج برای پارامتر مجهول به‌دست می‌آیند. برای محاسبهٔ این برآوردها، از سه توزیع پیشین متفاوت برای ابرپارامترها به‌منظور مقایسه نتایج استفاده شده است. رفتار مجانبی برآوردهای ای-بیز و ارتباط بین آنها نیز بحث می‌شود. در نهایت مقایسه‌ای بین برآوردهای حداکثر درست‌نمایی، بیز و ای-بیز با حجم نمونه مختلف و با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برآورد ای-بیز، داده‌های سانسور نوع ۲، قابلیت اعتماد، نرخ خطر، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

مقدمه

توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته کاربردهای زیادی از جمله در آزمون طول‌عمر، مسابقات اسب‌دوانی، نظریه صف، جریآنهای دریایی، سرعت‌های باد و غیره، دارد. مخصوصاً برای داده‌های طول‌عمر در حالت‌های مختلف، الگویی عالی به حساب می‌آید. تابع خطر این توزیع هیچ‌گاه ثابت نیست. تابع چگالی این توزیع، تک‌مدی و دارای چولگی به‌سمت راست است. (برای اطلاعات بیش‌تر، [۱] را ببینید). ابواماه و الشینگیتی [۲] این توزیع را به‌عنوان تعمیمی از توزیع نمایی معکوس معرفی کرده و بررسی‌های گسترده‌ای روی آن انجام دادند. آنها مشاهده کردند که این توزیع در بسیاری از موارد، برازش بهتری نسبت به توزیع‌هایی چون گاما، وایبل، نمایی تعمیم یافته و نمایی معکوس دارد.

کریشنا و کومار [۳] برآوردهای این توزیع را تحت سانسور فزاینده نوع ۲ با روش های قدیمی به‌دست آورده‌اند، اما در این مقاله برآوردهای مذکور به‌طور کامل‌تر با روش جدید ای-بیز به‌دست آمده‌اند. کاربردهای نظریه قابلیت اعتماد به‌وسیلهٔ مان و همکاران [۴] بیان شده است. طرح سانسور فزایندهٔ نوع ۲ و فرایندهای مربوط به آن را آلوارز و بوردز [۵] بررسی کرده‌اند. حبیبی‌راد و همکاران [۶] شواهد آماری را در طرح سانسور نوع ۲ بررسی کردند. برآوردهای قابلیت اعتماد در توزیع وایبل براساس سانسور نوع ۲ را اوکاشا [۷] انجام داده است. اما در این مقاله از توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته که برازش بهتری نسبت به توزیع وایبل دارد، استفاده شده است. بانرجی و کوندو [۸] براساس داده‌های

*نویسنده مسئول yari@iust.ac.ir

سانسور هیبرید نوع ۲ برای توزیع وایبل استنباط انجام دادند. احمدی و همکاران [۹] براساس داده‌های سانسور برای الگوهای طول‌عمر برآورد بیز به‌دست آوردند. کرایو و همکاران [۱۰] راه مفیدی برای توسعهٔ الگوهای طول‌عمر دومتغیره با استفاده از مفهوم مفصل ارائه دادند. برآورد ای-بیز نرخ شکست براساس داده‌های سانسور نوع۱ به‌وسیلهٔ هان [۱۱] به‌دست آمده است. هم‌چنین هان [۱۲] برآوردهای ای-بیز و بیز سلسه مراتبی را در آزمون طول‌عمر مقایسه کرده است. آدریا و همکاران [۱۳] پژوهش‌های جدیدتری روی قابلیت اعتماد انجام داده‌اند. استفاده از برآورد بیزی و مونت‌کارلو به‌وسیلهٔ بهبودی و همکاران انجام شده است [۱۴]، [۱۵]. اخیراً پژوهش‌های ای-بیز به‌وسیلهٔ محققان توسعه بیش‌تری پیدا کرده است که از آنها می‌توان به اسفندیاری و همکاران [۱۶]، هان [۱۷]، جاهین و اوکاشا [۱۸]، اوکاشا [۱۹]، ریاد و احمد [۲۰]، عظیمی و همکاران [۲۱]، کیاپور [۲۲]، اوکاشا و وانگ [۲۳] و هان [24] اشاره کرد. حال در این مقاله برآوردهای پارامتر مجهول و توابع قابلیت اعتماد (متوالی و موازی) و نرخ خطر براساس داده‌های سانسور نوع ۲ برای توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته، با تأکید بر برآورد ای-بیز محاسبه می‌شود.

برخی از انگیزش‌های اصلی نوشتن این مقاله بدین‌شرح است:

- توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته کاربردهای زیادی نه فقط در آمار، بلکه در بسیاری از علوم دیگر دارد. به‌عنوان مثال، در علوم فنی مانند برق و سخت‌افزار در محاسبه قابلیت اعتماد (تابع بقا) و نرخ خطر (شکست-از کارافتادگی) استفاده می‌شود. یا در علوم جوی برای بررسی سامانه‌های آب و هوایی کاربرد زیاد دارد. هم‌چنین این توزیع در بسیاری از آزمایش‌ها از جمله آزمون‌های طول‌عمر با سانسور، برازش بهتری نسبت به توزیع‌هایی چون گاما، وایبل، نمایی تعمیم‌یافته و نمایی معکوس دارد.
- اخیراً برآوردهای ای-بیز به‌دلیل دقت بیش‌تر توأم با سادگی محاسبات، نسبت به برآوردهای قدیمی ازجمله حداکثر درست‌نمایی و بیز مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران قرار گرفته است.

ادامه مقاله به این صورت سازمان‌دهی می‌شود: در بخش۲ توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته و توابع مفید وابسته به آن معرفی می‌شود. برآوردهای حداکثر درست‌نمایی و بیز تحت تابع زیان درجه دوم خطا در بخش ۳ به‌دست آمده‌اند. برآوردهای ای-بیز تحت تابع زیان درجهٔ دوم خطا و یک توزیع پیشین مزدوج در بخش ۴ به‌دست آمده‌اند. بخش ۵ اختصاص به رفتار مجانبی برآوردهای ای-بیز و ارتباط بین آنها دارد. محاسبهٔ عددی همهٔ روش‌های برآورد و مقایسهٔ دقت آنها، با داده‌های واقعی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو در بخش ۶ انجام شده است. در نهایت در بخش۷ خلاصه نتایج و پیشنهادها آمده است.

توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته

توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته توزیع پیوستهٔ ۲ پارامتری با تابع چگالی (۱) است:

$$f(x;\alpha,\lambda)=\frac{\alpha\lambda}{x^2}e^{-\lambda/x}(1-e^{-\lambda/x})^{\alpha-1},\quad x,\alpha,\lambda>0. \qquad (۱)$$

که در آن α پارامتر شکل و λ پارامتر مقیاس است و این توزیع با $\mathrm{GIED}(\alpha,\lambda)$ نشان داده می‌شود. در سراسر این مقاله فرض می‌شود که λ معلوم و α مجهول است. درصورتی‌که هر دو پارامتر نامعلوم باشند، برآورد پارامترها از طریق حل دستگاه معادلات به‌دست می‌آید که به‌وضوح پیچیدگی محاسبات را بسیار بیش‌تر می‌کند.

تابع توزیع تجمعی این توزیع عبارت است از:

$$F(x;\alpha,\lambda)=1-(1-e^{-\lambda/x})^{\alpha},\quad x,\alpha,\lambda>0.$$

پس تابع قابلیت اعتماد این توزیع عبارت است از:

$$R(t) = \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha}, \quad t > 0, \qquad \alpha, \lambda > 0.$$

تحت استقلال زمان‌های شکست، قابلیت اعتماد یک سامانه متوالی با m جزء در زمان t، به‌صورت (۲) است:

$$R(t; s, m) = \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{m\alpha}, \quad t > 0,\ \alpha, \lambda > 0, \qquad (۲)$$

و برای یک سامانه موازی عبارت است از:

$$R(t; p, m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{k\alpha}, \quad t > 0,\ \alpha, \lambda > 0, \qquad (۳)$$

رابطهٔ (۳) بسط مک‌لورن قابلیت اعتماد برای چنین سامانه‌ای است.

تابع نرخ خطر این توزیع عبارت است از:

$$h(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha\lambda}{x^2\left(e^{\frac{\lambda}{x}} - 1\right)}, \quad x, \alpha, \lambda \geq 0. \qquad (۴)$$

جزییات بیش‌تر درباره سامانه‌های متوالی و موازی و قابلیت اعتماد آنها به‌وسیلهٔ ویلیامز [۲۵] مطرح شده است. روش‌های آماری برای تحلیل قابلیت اعتماد و داده‌های طول‌عمر به‌وسیلهٔ بلاک و همکاران [۲۶] و سارالیز و ساموئل [۲۷] به‌کار برده شده است.

برآورد حداکثر درست‌نمایی (MLE) و بیز (B)

در این مقاله برآوردها براساس داده‌های سانسور نوع۲ که حالت خاصی از داده‌های سانسور فزاینده نوع ۲ هستند، به‌دست می‌آیند. (برای اطلاعات بیش‌تر، [۲۸] را ببینید). براساس داده‌های سانسور نوع ۲ به حجم r که از یک آزمون طول‌عمر برای n جزء به‌دست آمده و دارای توزیع GIED(λ, α) هستند، طبق نتایج آرنولد و همکاران [۲۹] تابع درست‌نمایی به‌صورت (۵) است:

$$L(\lambda, \alpha | \underline{x}) = \frac{n!}{(n-r)!} \alpha^r c(\lambda; \underline{x})\, exp\{-\alpha S_r\}, \qquad (۵)$$

که در آن $\underline{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1 \dots, \mathrm{x}_\mathrm{r})$، $c(\lambda; \underline{x}) = \lambda^r (\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{x_i^2}) e^{-\sum_{i=1}^{r}[\frac{\lambda}{x_i} + \ln\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)]}$ و

$$S_r = -\sum_{i=1}^{r} ln\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right) - (n - r) ln\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_r}}\right) > 0. \qquad (۶)$$

با توجه به معلوم بودن λ، لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت (۷) است:

$$\ell(\alpha | x) = ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) + r ln\, \alpha + ln(c(\lambda; \underline{x})) - \alpha S_r, \qquad (۷)$$

بنابراین برآورد حداکثر درست‌نمایی پارامتر α به‌صورت (۸) است:

$$MLE(\alpha) = \frac{r}{S_r}. \qquad (۸)$$

برآوردهای حداکثر درست‌نمایی توابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته، بنابر خاصیت ناوردایی برآورد حداکثر درست‌نمایی و طبق (۲)، (۳)، (۴) و (۸) قابل محاسبه‌اند.

برای پارامتر α از تابع چگالی پیشین مزدوج گاما به‌صورت (۹) استفاده می‌شود:

$$g'(\alpha|a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}\,exp\{-\alpha b\},\ \ \alpha>0,\quad a>0,\quad b>0, \qquad (۹)$$

که در آن به پارامترهای a و b ابرپارامتر پیشین گفته می‌شود.

دراین‌صورت تابع چگالی پسین طبق (۵) و (۹) به‌صورت (۱۰) است:

$$g\big(\alpha|\underline{x}\big)=\frac{(b+S_r)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}\alpha^{n+a-1}\,exp\{-(b+S_r)\alpha\},\ \ \alpha>0. \qquad (۱۰)$$

تحت تابع زیان درجه دوم خطا (SELF)، برآورد بیز پارامتر α طبق (۱۰) به‌صورت (۱۱) است:

$$\hat{\alpha}_B(a,b)=\frac{r+a}{b+S_r}. \qquad (۱۱)$$

تحت SELF، برآورد بیز قابلیت اعتماد برای حالت متوالی و موازی و تابع نرخ خطر به‌ترتیب عبارتند از:

$$\hat{R}_{Bs}(t;s,m)=\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-m\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}, \qquad (۱۲)$$

و

$$\hat{R}_{Bp}(t;p,m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-k\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}, \qquad (۱۳)$$

$$\hat{h}_B(t)=\frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)}\hat{\alpha}_B. \qquad (۱۴)$$

برآورد ای-بیز (EB)

توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته عضو خانواده الگوهای نرخ خطر متناسب است. این خانواده بدین‌صورت کلی است:

$$F(x)=1-(\overline{F_0}(x))^{\alpha},$$
$$f(x)=\alpha\, f_0(x)(\overline{F_0}(x))^{\alpha-1},$$

که در آن $\bar{F}(x)=1-F(x)$. در این خانواده تابع نرخ خطر عبارت است از: $h(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{\alpha f_0(t)}{1-F_0(t)}$، که تابعی خطی برحسب α است. در نظریه قابلیت اعتماد، نرخ خطر قطعات با قابلیت اعتماد زیاد، کم‌تر از نرخ خطر قطعات با قابلیت اعتماد کم است. بنابر این دلیل و برطبق هان [۳۰] ابرپارامترهای a و b باید طوری انتخاب شوند که تابع چگالی پسین $g(\alpha|a,b)$ نسبت به α نزولی باشد. مشتق $g(\alpha|a,b)$ نسبت به α عبارت است از:

$$\frac{dg(\alpha|a,b)}{d\alpha}=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-2}\,exp\{-\alpha b\}\,[(a-1)-\alpha b].$$

حال اگر $0<a<1$، $b>0$ و $\alpha>0$ باشد، آن‌گاه $\frac{\mathrm{d}g(\alpha|a,b)}{\mathrm{d}\alpha}<0$ و $g(\alpha|a,b)$ نسبت به α نزولی می‌شود. در این قسمت برآورد ای-بیز پارامترها براساس ۳ تابع چگالی پیشین مختلف برای ابرپارامترهای a و b محاسبه شده است. این توزیع‌ها برای بررسی تأثیر توابع چگالی پیشین مختلف بر برآورد ای-بیز لحاظ شده‌اند. در هر یک از آنها a دارای توزیع $\mathrm{Beta(u,v)}$ است. برای b نیز به‌ترتیب یک تابع ثابت، کاهشی و افزایشی درنظر گرفته شده است. این توزیع‌ها با فرض استقلال ابرپارامترهای a و b عبارتند از:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1(a,b) &= \frac{1}{cB(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1}, \quad 0<a<1, \quad 0<b<c \\ \pi_2(a,b) &= \frac{2(c-b)}{c^2B(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1}, \quad 0<a<1, \quad 0<b<c \\ \pi_3(a,b) &= \frac{2b}{c^2B(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1}, \quad 0<a<1, \quad 0<b<c, \end{aligned}\right\}, \qquad (۱۵)$$

۱. برآورد ای-بیز α

براساس SELF و $\pi_1(a,b)$، برآورد ای-بیز α طبق (۱۱) و (۱۵) عبارت است از:

$$\hat{\alpha}_{EB1} = \iint_D \hat{\alpha}_B(a,b)\pi_1(a,b)\,dadb = \frac{1}{cB(u,v)}\int_0^1\int_0^c \left(\frac{r+a}{b+S_r}\right) a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda$$
$$= \frac{1}{c}\left(r+\frac{u}{u+v}\right)\ln\left(\frac{c+S_r}{S_r}\right). \qquad (۱۶)$$

به‌طور مشابه برآورد ای-بیز α براساس $\pi_2(a,b)$ و $\pi_3(a,b)$ ، به‌ترتیب به‌صورت (۱۷) و (۱۸) است:

$$\hat{\alpha}_{EB2} = \frac{2}{c}\left(r+\frac{u}{u+v}\right)\left[\frac{c+S_r}{c} ln\left(\frac{c+S_r}{S_r}\right)-1\right], \qquad (۱۷)$$

$$\hat{\alpha}_{EB3} = \frac{2}{c}\left(r+\frac{u}{u+v}\right)\left[1-\frac{S_r}{c} ln\left(\frac{c+S_r}{S_r}\right)\right]. \qquad (۱۸)$$

۲. برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت متوالی

براساس SELF و $\pi_1(a,b)$، برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت متوالی طبق (۱۲) و (۱۵) عبارت است از:

$$\hat{R}_{EBs1} = \frac{1}{cB(u,v)}\int_0^1\int_0^c \left(\frac{b+S_r}{b+S_r-mln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a} a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda. \qquad (۱۹)$$

به‌طور مشابه برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت متوالی براساس $\pi_2(a,b)$ و $\pi_3(a,b)$، به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$\hat{R}_{EBs2} = \frac{2}{c^2B(u,v)}\int_0^1\int_0^c (c-b)\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-m\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a} a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda, \qquad (۲۰)$$

و

$$\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{EBs3}} = \frac{2}{\mathrm{c^2B(u,v)}}\int_0^1\int_0^c \mathrm{b}\left(\frac{\mathrm{b+S_r}}{\mathrm{b+S_r-mln}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{\mathrm{r+a}} \mathrm{a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda}. \qquad (۲۱)$$

انتگرال‌های روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) قابل محاسبه با یک شکل بسته ساده نیستند. برای تقریب آنها از روش‌های عددی با نرم افزار R استفاده می‌شود.

۳. برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت موازی

براساس SELF و $\pi_1(a,b)$، برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت موازی طبق (۱۳) و (۱۵) عبارت است از:

$$\hat{R}_{EBp1}=\frac{1}{cB(u,v)}\int_0^1\int_0^c\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-k\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda. \qquad (۲۲)$$

به‌طور مشابه برآورد ای-بیز قابلیت اعتماد برای حالت موازی براساس $\pi_2(a,b)$ و $\pi_3(a,b)$، به‌ترتیب به‌صورت (۲۳) و (۲۴) است:

$$\hat{R}_{EBp2}=\frac{2}{c^2B(u,v)}\int_0^1\int_0^c(c-b)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-k\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda, \qquad (۲۳)$$

و

$$\hat{R}_{EBp3}=\frac{2}{c^2B(u,v)}\int_0^1\int_0^c b\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-kln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda. \qquad (۲۴)$$

انتگرال‌های روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) قابل محاسبه با یک شکل بسته ساده نیستند. برای تقریب آنها از روش‌های عددی با نرم افزار R استفاده می‌شود.

۴. برآورد ای-بیز تابع نرخ خطر

تحت شرایط ذکر شده، برآورد ای-بیز تابع نرخ خطر طبق (۱۴)، (۱۶)، (۱۷)، و (۱۸) به‌ترتیب بدین‌صورت است:

$$\hat{h}_{EB1}(t)=\frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)}\hat{\alpha}_{EB1}, \qquad (۲۵)$$

$$\hat{h}_{EB2}(t)=\frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)}\hat{\alpha}_{EB2}, \qquad (۲۶)$$

$$\hat{h}_{EB3}(t)=\frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)}\hat{\alpha}_{EB3}. \qquad (۲۷)$$

خواص برآوردهای ای-بیز

در این قسمت ارتباط بین برآوردهای ای-بیز پارامترهای مربوط به توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته بررسی می‌شود.

۱. ارتباط بین $\hat{\alpha}_{EBi}$ (i=1,2,3) :

قضیهٔ ۱. فرض کنید $0<c<S_r$ ، آن‌گاه:

الف) $\hat{\alpha}_{EB3}<\hat{\alpha}_{EB1}<\hat{\alpha}_{EB2}$

ب) $\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB1}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB2}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB3}$

اثبات: الف) از روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) می‌توان نوشت:

$$\hat{\alpha}_{EB2}-\hat{\alpha}_{EB3}=2(\hat{\alpha}_{EB1}-\hat{\alpha}_{EB3}),$$

و

$$\hat{\alpha}_{EB1}-\hat{\alpha}_{EB3}=\hat{\alpha}_{EB2}-\hat{\alpha}_{EB1}=\frac{1}{c}\left(r+\frac{u}{u+v}\right)\left[\frac{c+2S_r}{c}ln\left(\frac{c+S_r}{S_r}\right)-2\right]. \qquad (۲۸)$$

از طرفی طبق بسط مک لورن همواره می‌توان نوشت:

$$ln(1+x) \;=\; x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \qquad |x|<1.$$

حال کافی است که در رابطه بالا x را با $\frac{c}{x_n}$ جابه‌جا کرد. هم‌چنین از $0<c<S_r$ نتیجه می‌شود که: $0<\frac{c}{S_r}<1$

بنابراین :

$$\begin{aligned}
&\frac{c+2x_n}{c}\,ln\left(\frac{x_n+c}{x_n}\right)-2\\
&\quad=\frac{c+2x_n}{c}\left[\left(\frac{c}{x_n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{x_n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{x_n}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{c}{x_n}\right)^5-\cdots\right]-2\\
&\quad=\left[\left(\frac{c}{x_n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{x_n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{x_n}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{c}{x_n}\right)^5-\cdots\right]-2\\
&\quad\quad+\left[2-\left(\frac{c}{x_n}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{c}{x_n}\right)^2-\frac{2}{4}\left(\frac{c}{x_n}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{c}{x_n}\right)^4-\cdots\right]\\
&\quad=\left(\frac{c^2}{6{x_n}^2}-\frac{c^3}{6{x_n}^3}\right)+\left(\frac{3c^4}{6{x_n}^4}-\frac{2c^5}{15{x_n}^5}\right)+\cdots\\
&\quad=\frac{c^2}{6{x_n}^2}\left(1-\frac{c}{x_n}\right)+\frac{c^4}{60{x_n}^4}\left(9-\frac{8c}{x_n}\right)+\cdots\,.
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

از روابط (۲۸) و (۲۹) می‌توان نوشت: $\hat{\alpha}_{EB1}-\hat{\alpha}_{EB3}=\hat{\alpha}_{EB2}-\hat{\alpha}_{EB1}>0$ ،

یا $\hat{\alpha}_{EB3}<\hat{\alpha}_{EB1}<\hat{\alpha}_{EB2}$.

ب) با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\lim_{S_r\to\infty}(\hat{\alpha}_{EB1}-\hat{\alpha}_{EB3}) \;=\; \lim_{S_r\to\infty}(\hat{\alpha}_{EB2}-\hat{\alpha}_{EB1})=0.$$

یعنی:

$$\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB1}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB2}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{\alpha}_{EB3}\,.$$

قسمت (۱) قضیهٔ ۱ بیان می‌کند که با ۳ تابع چگالی پیشین متفاوت ابرپارامترها (۱۵)، برآوردهای ای-بیز مربوطه برای α نیز متفاوت است. قسمت (۲) قضیهٔ ۱ بیان می‌کند که برآوردهای ای-بیز α با افزایش S_r، به‌طور مجانبی با یک‌دیگر برابر هستند.

۲. ارتباط بین $\hat{R}_{EBpi}$ و $\hat{R}_{EBsi}$ (i=1,2,3) :

قضیهٔ ۲: برای برآوردهای قابلیت اعتماد، این روابط برقرار است:

الف) $$\begin{cases}\hat{R}_{EBp2}<\hat{R}_{EBp1}<\hat{R}_{EBp3}\\ \hat{R}_{EBs2}<\hat{R}_{EBs1}<\hat{R}_{EBs3}\end{cases}$$

ب) $$\begin{cases}\lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBp1}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBp2}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBp3}\\ \lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBs1}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBs2}=\lim_{S_r\to\infty}\hat{R}_{EBs3}\end{cases}$$

اثبات: الف) از روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) می‌توان نوشت:

$$\hat{R}_{EBp3}-\hat{R}_{EBp1}=\hat{R}_{EBp1}-\hat{R}_{EBp2}=$$

$$\frac{1}{c^2B(u,v)}\int_0^1\int_0^c(2b-c)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}\left(\frac{b+S_r}{b+S_r-k\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)}\right)^{r+a}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda. \tag{۳۰}$$

انتگرال رابطهٔ (۳۰) قابل محاسبه با یک شکل بسته ساده نیست. برای حل آن از روش‌های عددی با نرم افزار R استفاده شده است. روش‌های عددی (جدول ۳ و ۴) نشان می‌دهد که حاصل این انتگرال مثبت است. یعنی:

$$\hat{R}_{EBp2} < \hat{R}_{EBp1} < \hat{R}_{EBp3}.$$

به‌طور مشابه می‌توان نوشت: $\hat{R}_{EBs2} < \hat{R}_{EBs1} < \hat{R}_{EBs3}$.

ب) با استفاده از رابطهٔ (۳۰) می‌توان نوشت:

$$\lim_{S_r\to\infty}\left(\hat{R}_{EBp1} - \hat{R}_{EBp3}\right) = \lim_{S_r\to\infty}\left(\hat{R}_{EBp2} - \hat{R}_{EBp1}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2 B(u,v)} \lim_{S_r\to\infty} \int_0^1 \int_0^c (c-2b) \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \left(\frac{b+S_r}{b+S_r - k\ln\left(1-e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)} \right)^{r+a} a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\,da = 0. \quad (۳۱)$$

یعنی:

$$\lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBp1} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBp2} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBp3}.$$

به‌طور مشابه این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBs1} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBs2} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{R}_{EBs3}.$$

قسمت الف قضیهٔ ۲ بیان می‌کند که با ۳ تابع چگالی پیشین متفاوت ابرپارامترها (۱۵)، برآوردهای ای-بیز مربوطه برای قابلیت اعتماد نیز متفاوت است. قسمت ب قضیهٔ ۲ بیان می‌کند که برآوردهای ای-بیز قابلیت اعتماد با افزایش S_r، به‌طور مجانبی با یک‌دیگر برابر است.

۳. ارتباط بین $\hat{h}_{EBi}$ ($i=1,2,3$) :

قضیهٔ ۳. برای برآوردهای نرخ خطر، این روابط برقرار است:

الف) $\hat{h}_{EB3} < \hat{h}_{EB1} < \hat{h}_{EB2}$

ب) $\lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB1} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB2} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB3}$

اثبات: الف) از روابط (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) می‌توان نوشت:

$$\hat{h}_{EB1} - \hat{h}_{EB3} = \hat{h}_{EB2} - \hat{h}_{EB1} = \frac{1}{c} \frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)} \left(r + \frac{u}{u+v}\right) \left[\frac{c+2S_r}{c} \ln\left(\frac{c+S_r}{S_r}\right) - 2\right],$$

با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\hat{h}_{EB1} - \hat{h}_{EB3} = \hat{h}_{EB2} - \hat{h}_{EB1} > 0$$

یعنی

$$\hat{h}_{EB3} < \hat{h}_{EB1} < \hat{h}_{EB2}.$$

ب) با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\lim_{S_r\to\infty}\left(\hat{h}_{EB1} - \hat{h}_{EB3}\right) = \lim_{S_r\to\infty}\left(\hat{h}_{EB2} - \hat{h}_{EB1}\right)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\lambda}{t^2\left(e^{\frac{\lambda}{t}}-1\right)} \left(r + \frac{u}{u+v}\right) \lim_{S_r\to\infty} \left\{ \frac{c^2}{6{S_r}^2}\left(1 - \frac{c}{S_r}\right) + \frac{c^4}{60{S_r}^4}\left(9 - \frac{8c}{S_r}\right) + \cdots \right\} = 0.$$

یعنی

$$\lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB1} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB2} = \lim_{S_r\to\infty} \hat{h}_{EB3}.$$

قسمت الف قضیهٔ ۳ بیان می‌کند که با ۳ تابع چگالی پیشین متفاوت ابرپارامترها (۱۵)، برآوردهای ای-بیز مربوطه برای نرخ خطر نیز متفاوت است. قسمت ب قضیهٔ ۳ بیان می‌کند که برآوردهای ای-بیز نرخ خطر با افزایش S_r، به‌طور مجانبی با یک‌دیگر برابر است.

مثال‌های کاربردی

در این قسمت دو مثال کاربردی یکی با داده‌های واقعی و دیگری با شبیه‌سازی برای نتایج به‌دست آمده از توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته بیان می‌شود. برای مقایسهٔ دقت برآوردگرها، در داده‌های واقعی از کمیت انحراف معیار و در داده‌های شبیه‌سازی از برآورد مخاطره برآوردگرها استفاده شده است.

۱. مثال با داده‌های واقعی

داده‌های این مثال در صفحه۳ از [۳۱] موجود است. این داده‌ها زمان‌های شکست مربوط به ۱۱ سیال عایق الکتریکی ۳۰ کیلو ولتی هستند. برای ساده‌تر شدن محاسبات، داده‌ها بعد از یک تبدیل لگاریتمی عبارتند از:

$$2.836, 3.120, 3.045, 5.169, 4.934, 4.970, 3.018, 3.770, 5.272, 3.856, 2.046.$$

در [۳۱] نویسندگان نشان داده‌اند که توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته، یک الگوی معقول و به نیکویی برازش شده به این داده‌ها هستند. با استفاده از روابط (۸)، (۱۱) تا (۱۴) و (۱۶) تا (۲۷) نتایج برآوردها به‌دست آمده و در جدول ۱ نمایش داده شده است که در آن کمیت بالایی، برآورد پارامتر و کمیت پایینی، انحراف معیار آن است.

براساس SELF مراحل برآورد بدین‌صورت بوده است:

- براساس داده‌های بالا، برآوردهای حداکثر درست‌نمایی برای ۴ پارامتر موردنظر محاسبه می‌شوند.
- برای مقادیر داده شده پارامترهای پیشین، مقادیر پارامترهای a و b به‌ترتیب از توزیع‌های پیشین بتا و یکنواخت (۱۵) تولید می‌شوند.
- براساس داده‌های بالا، برای مقادیر داده شده پارامترهای a و b ، برآوردهای بیز و ای-بیز ۴ پارامتر موردنظر محاسبه می‌شوند.

در مراحل بالا، مقادیر زیر به‌عنوان ورودی استفاده شده است:

برای برآورد α:

$$(m=5, \alpha=1, \lambda=2, c=4, a=۰/۵, b=1, u=2, v=4),$$

برای برآورد $R(t;s,m)$:

$$(m=5, t=۰/۵, \alpha=1, \lambda=2, c=4, a=۰/۵, b=1, u=2, v=2),$$

برای برآورد $R(t;p,m)$:

$$(m=5, t=10, \alpha=1, \lambda=2, c=4, a=۰/۵, b=1, u=2, v=4),$$

برای برآورد $h(t)$:

$$(m=5, t=0/5, \alpha=1, \lambda=2, c=4, a=0/5, b=1, u=2, v=4).$$

جدول ۱. برآوردهای توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس داده‌های واقعی

Parameters	n	r	MLE	Bayes	EB1	EB2	EB3
α	11	4	0/5178278	0/5157844	0/4520536	0/4834016	0/4207056
			0.3355820	0.3002453	0.2324900	0.2346648	0.2668740
		8	0/8382016	0/8061271	0/7292155	0/7716693	0/6867617
			0.0981182	0.0733242	0.0261787	0.0375867	0.0521349
		11	1/1408210	1/0806058	0/9832213	1/0399736	0/9264690
			0.0198306	0.0064973	0.0002815	0.0015979	0.0054068
$R(t;s,m)$	11	4	0/9532659	0/9536851	0/9787197	0/9643413	0/9787331
			0.0024109	0.0021128	0.0017264	0.0017614	0.0019345
		8	0/9254523	0/9285014	0/9642160	0/9483082	0/9674344
			0.0026829	0.0012745	0.0001887	0.0002818	0.0005183
		11	0/8999258	0/9053387	0/9521984	0/9338642	0/9580958
			0.0010059	0.0002563	0.0000406	0.0001389	0.0004681
$R(t;p,m)$	11	4	0/9303009	0/9018836	0/9272996	0/9144295	0/9401699
			0.0023410	0.0020381	0.0016374	0.0016673	0.0018921
		8	0/7447087	0/7551079	0/7996686	0/7750204	0/8243165
			0.0012742	0.0011327	0.0001757	0.0002615	0.0004517
		11	0/5364292	0/5891423	0/6486755	0/6143102	0/6830408
			0.0010043	0.0002412	0.0000312	0.0001296	0.0003467
$h(t)$	11	4	0/07729040	0/07698540	0/06747301	0/07215198	0/06279405
			0.0074762	0.0066889	0.0051795	0.0052235	0.0059455
		8	0/1251090	0/1203216	0/1088419	0/1151785	0/1025053
			0.0021859	0.0016335	0.0005832	0.0008374	0.0011615
		11	0/1702777	0/1612900	0/1467545	0/1552253	0/1382837
			0.0004418	0.0001447	0.0000063	0.0000356	0.0001205

این جدول نشان می‌دهد که برآوردهای ای-بیز در بیش‌تر حالات در قضایای ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کنند.

۲. شبیه‌سازی مونت‌کارلو و مقایسه برآوردگرها

در این قسمت به‌کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو، یک مقایسه بین نتایج برآورد حداکثر درست‌نمایی، بیز و ای-بیز انجام می‌شود. برای این کار گام‌های زیر برداشته شده است:

- برای مقادیر داده شده پارامترهای پیشین (u,v) و $(0,c)$، مقادیر پارامترهای a و b به‌ترتیب از توزیع‌های پیشین بتا و یکنواخت (۱۵) تولید می‌شوند.
- برای مقادیر داده شده پارامترهای a و b ، مقدار پارامتر α از توزیع پیشین گاما (۹) تولید می‌شود.
- برای مقادیر معلوم λ، نمونه‌های سانسور نوع۲ با اندازه‌های مختلف از $\mathrm{GIED}(\lambda,\alpha)$ (۱) تولید می‌شود. (طبق الگوریتم بالاکریشنان و آگروالا [۲۸]).
- تحت SELF ، برآوردهای $\hat{\alpha}_{ML}$، $\hat{\alpha}_B$، $\hat{\alpha}_{EB1}$، $\hat{\alpha}_{EB2}$ و $\hat{\alpha}_{EB3}$ از پارامتر α با روابط (۸)، (۱۱)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) محاسبه می‌شوند.
- برآوردهای $\hat{R}_{MLs}$، $\hat{R}_{Bs}$، $\hat{R}_{EBs1}$، $\hat{R}_{EBs2}$ و $\hat{R}_{EBs3}$ از قابلیت اعتماد حالت متوالی با روابط (۸)، (۱۲)، (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) محاسبه می‌شوند.
- برآوردهای $\hat{R}_{MLp}$، $\hat{R}_{Bp}$، $\hat{R}_{EBp1}$، $\hat{R}_{EBp2}$ و $\hat{R}_{EBp3}$ از قابلیت اعتماد حالت موازی با روابط (۸)، (۱۳)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) محاسبه می‌شوند.
- برآوردهای $\hat{h}_{ML}$، $\hat{h}_B$، $\hat{h}_{EB1}$، $\hat{h}_{EB2}$ و $\hat{h}_{EB3}$ از نرخ خطر با روابط (۸)، (۱۴)، (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) محاسبه می‌شوند.
- کمیت‌های $\left(\hat{Q}-Q\right)^2$ برای برآوردهای بالا محاسبه می‌شود که در آن $\hat{Q}$ یک برآورد برای Q است.

- مراحل بالا ۵۰۰۰ بار تکرار شده و برآورد مخاطره برآوردگرها (ER) از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$ER(\hat{Q}) = \frac{1}{5000}\sum(\hat{Q}-Q)^2.$$

نتایج در جداول ۲ تا ۵ آمده است که در آن کمیت بالایی، برآورد پارامتر و کمیت پایینی، ER آن است. زیرا محاسبهٔ اریبی برآوردگرها، به‌دلیل وجود تابع امید ریاضی، منجر به انتگرال‌گیری‌های چندگانه و پیچیدگی بیش‌تر محاسبات می‌شود، بنابراین از کمیت ER برای مقایسه دقت برآوردگرها استفاده شده است.

در این مقاله، چنان‌که ابتدا ذکر شد، برای بررسی تأثیر n بر برآوردها، از مقادیر مختلف آن استفاده شده است. هم‌چنین به‌دلیل پراکندگی n، از مقادیر مختلف r برای هرکدام استفاده شده است و بیش‌ترین مقدار r همان n (یعنی داده‌های کامل بدون سانسور) درنظر گرفته شده است.

جدول۲. برآوردهای α و ER آنها در توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس شبیه‌سازی

(λ =1, a=0/4967353, b=1/017031, u=2, v=4, c=4, α =0/4489786)

n	r	MLE	Bayes	EB1	EB 2	EB3
20	10	0/5000670	0/4967334	0/4668487	0/4822644	0/4514329
		0/03348139	0/02883961	0/02152843	0/02548900	0/01827533
	15	0/4806273	0/4797547	0/4604191	0/4702458	0/4505923
		0/01875377	0/01729472	0/01423706	0/01586548	0/01286173
	20	0/4702133	0/4700601	0/4558837	0/4630295	0/4487380
		0/012425706	0/011768897	0/010201240	0/011029484	0/009497676
25	15	0/4802184	0/4793185	0/4599863	0/4698150	0/4501576
		0/01939395	0/01782134	0/01467153	0/01635976	0/01324132
	20	0/4722631	0/4720381	0/4577442	0/4649603	0/4505281
		0/013046536	0/012355348	0/010676719	0/011564539	0/009916649
	25	0/4649671	0/4650534	0/4538415	0/4594680	0/4482150
		0/009179003	0/008821547	0/007881793	0/008374786	0/007462568
35	25	0/4683582	0/4683603	0/4569970	0/4627131	0/4512809
		0/009916459	0/009522919	0/008451917	0/009015125	0/007965459
	30	0/4665878	0/4666686	0/4572095	0/4619595	0/4524595
		0/008208290	0/007944125	0/007166054	0/007574521	0/006809349
	35	0/4616227	0/4617931	0/4538042	0/4578021	0/4498064
		0/006681031	0/006502007	0/005982177	0/006255179	0/005745139
45	35	0/4617637	0/4619367	0/4539475	0/4579451	0/4499499
		0/006524998	0/006352991	0/005841877	0/006109459	0/005610098
	40	0/4597872	0/4599761	0/4530137	0/4564930	0/4495343
		0/005833035	0/005700013	0/005303937	0/005511891	0/005122849
	45	0/4589206	0/4591143	0/4529361	0/4560205	0/4498516
		0/005026183	0/004924977	0/004612571	0/004776279	0/004469721
65	55	0/4580395	0/4582223	0/4531703	0/4556899	0/4506507
		0/004063529	0/003999851	0/003783040	0/003896119	0/003683629
	60	0/4565234	0/4567067	0/4520961	0/4543933	0/4497989
		0/003748599	0/003695136	0/003518521	0/003610848	0/003437500
	65	0/4553764	0/4555597	0/4513202	0/4534305	0/4492100
		0/003307206	0/003264131	0/003122895	0/003196596	0/003058665

جدول۳. برآوردهای $R(s)$ و ER آنها در توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس شبیه‌سازی

(λ =1, a=0/4967353, b=1/017031, u=2, v=4, c=4, α =0/4489786, t=0/5, Rs= 0/7214894)

n	r	MLE	Bayes	Eb1	Eb2	Eb3
20	10	0/7029558	0/7081611	0/7223172	0/7158940	0/7302152
		0/007199914	0/005926861	0/004879360	0/005414496	0/004439816
	15	0/7084927	0/7114819	0/7210169	0/7171035	0/7266805
		0/004439362	0/003921676	0/003417292	0/003661533	0/003194870
	20	0/7113904	0/7134494	0/7206226	0/7183248	0/7254958
		0/003227756	0/002948726	0/002651044	0/002780372	0/002512457
25	15	0/7081507	0/7111562	0/7207085	0/7173695	0/7269519
		0/004437617	0/003922838	0/003414184	0/003642789	0/003185399

	20	0/7120063	0/7140300	0/7211745	0/7153585	0/7225621
		0/003071348	0/002810328	0/002532983	0/002735169	0/002435280
	25	0/7132698	0/7148232	0/7205639	0/7177708	0/7235150
		0/002517545	0/002344498	0/002149811	0/002251912	0/002063996
35	25	0/7131362	0/7146877	0/7204303	0/7172681	0/7230194
		0/002445474	0/002278181	0/002087070	0/002194115	0/002006453
	30	0/7149883	0/7162151	0/7209846	0/7174165	0/7221945
		0/001984695	0/001873503	0/001744714	0/001833049	0/001697046
	35	0/7154904	0/7165213	0/7206192	0/7182636	0/7223565
		0/001732989	0/001649513	0/001548704	0/001606771	0/001506333
45	35	0/7161538	0/7171706	0/7212531	0/7197308	0/7237960
		0/001713922	0/001632780	0/001537965	0/001581739	0/001494366
	40	0/7159184	0/7168060	0/7203969	0/7196136	0/7231853
		0/001544176	0/001478990	0/001397647	0/001427951	0/001356154
	45	0/7172645	0/7180252	0/7212013	0/7186490	0/7218204
		0/001342177	0/001293069	0/001233738	0/001276690	0/001212563
65	55	0/7171914	0/7178065	0/7204162	0/7186372	0/7212388
		0/0010726501	0/0010396095	0/0009959249	0/0010241696	0/0009791003
	60	0/7180468	0/7185976	0/7209814	0/7197166	0/7220879
		0/0009620696	0/0009356504	0/0009017264	0/0009203083	0/0008870715
	65	0/7182722	0/7187772	0/7209781	0/7202640	0/7224501
		0/0009162086	0/0008929935	0/0008630642	0/0008759563	0/0008484879

جدول۴. برآوردهای $R(p)$ و ER آنها در توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس شبیه‌سازی

(λ =1, a=0/4967353, b=1/017031, u=2, v=4, c=4, α =0/4489786, t=10, Rp =0/8820111)

n	r	MLE	Bayes	Eb1	Eb2	Eb3
20	10	0/8257275	0/8202638	0/8423291	0/8308277	0/8538305
		0/02329144	0/01895910	0/01332808	0/01627928	0/01078523
	15	0/8443238	0/8376338	0/8522918	0/8447423	0/8598412
		0/013471007	0/012068694	0/009273992	0/010735844	0/007977783
	20	0/8547399	0/8483753	0/8592109	0/8536758	0/8647460
		0/008791716	0/008292026	0/006697713	0/007526623	0/005953200
25	15	0/8466923	0/8398665	0/8543278	0/8468884	0/8617672
		0/012987639	0/011655508	0/008966492	0/010371163	0/007723293
	20	0/8547248	0/8483521	0/8591908	0/8536544	0/8647272
		0/008727385	0/008243250	0/006654875	0/007480118	0/005913885
	25	0/8601405	0/8544031	0/8630100	0/8586355	0/8673845
		0/006515288	0/006310457	0/005270122	0/005809021	0/004781790
35	25	0/8585004	0/8528132	0/8615141	0/8570875	0/8659406
		0/006711875	0/006499951	0/005418879	0/005979338	0/004910090
	30	0/8645353	0/8593933	0/8664778	0/8628910	0/8700646
		0/005191596	0/005096640	0/004372272	0/004746869	0/004030768
	35	0/8679101	0/8632307	0/8692361	0/8662067	0/8722655
		0/004087572	0/004053426	0/003541470	0/003805225	0/003300598
45	35	0/8656051	0/8609955	0/8670988	0/8640144	0/8701832
		0/004426209	0/004383430	0/003822105	0/004112169	0/003555883
	40	0/8695282	0/8653045	0/8705438	0/8679054	0/8731821
		0/003590164	0/003573153	0/003170095	0/003377848	0/002979430
	45	0/8704585	0/8665940	0/8712528	0/8689104	0/8735952
		0/003063601	0/003060755	0/002747988	0/002912337	0/002596803
65	55	0/8722866	0/8689974	0/8727950	0/8708904	0/8746997
		0/002387726	0/002304711	0/002189650	0/002299837	0/002087911
	60	0/8734345	0/8703786	0/8738412	0/8721065	0/8755760
		0/002191012	0/002140194	0/002024955	0/002117363	0/001939503
	65	0/8733431	0/8704963	0/8737049	0/8720979	0/8753118
		0/002043411	0/002030628	0/001900399	0/001982507	0/001824207

جدول ۵ . برآوردهای $h(t)$ و ER آنها در توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته براساس شبیه‌سازی

(λ =1, a=0/4967353, b=1/017031, u=2, v=4, c=4, α =0/4489786, t=0/5, $h(t)$ = 0/2810923)

n	r	MLE	Bayes	Eb1	Eb2	Eb3
20	10	0/3113510	0/3094150	0/2908796	0/3004224	0/2813368
		0/012495802	0/010859032	0/008168157	0/009615472	0/006985464
	15	0/3036874	0/3030423	0/2907540	0/2970134	0/2844946

		0/007584814	0/006999921	0/005718626	0/006399151	0/005140154
	20	0/2958698	0/2957228	0/2867633	0/2912873	0/2822392
		0/005143445	0/004867239	0/004201216	0/004553891	0/003898907
25	15	0/3014159	0/3008341	0/2886858	0/2948648	0/2825068
		0/007576494	0/006968416	0/005723749	0/006389327	0/005159481
	20	0/2970114	0/2968321	0/2878131	0/2923721	0/2832542
		0/005262845	0/004975997	0/004278220	0/004647986	0/003959772
	25	0/2928670	0/2928748	0/2857748	0/2893452	0/2822044
		0/003878135	0/003722267	0/003306469	0/003525485	0/003117470
35	25	0/2922548	0/2922858	0/2852192	0/2887692	0/2816691
		0/003664747	0/003522013	0/003133704	0/003337170	0/002959604
	30	0/2898424	0/2899329	0/2840913	0/2870182	0/2811645
		0/003049513	0/002951242	0/002682017	0/002823606	0/002560048
	35	0/2879207	0/2880438	0/2830756	0/2855590	0/2805921
		0/002537559	0/002470231	0/002281858	0/002380791	0/002196765
45	35	0/2896799	0/2897793	0/2847595	0/2872728	0/2822462
		0/002603024	0/002534362	0/002325909	0/002435015	0/002230969
	40	0/2874314	0/2875590	0/2832149	0/2853842	0/2810455
		0/002161186	0/002111839	0/001966324	0/002042540	0/001900507
	45	0/2873823	0/2875020	0/2836317	0/2855642	0/2816992
		0/001996615	0/001956944	0/001833240	0/001898038	0/001776627
65	55	0/2866232	0/2867383	0/2835777	0/2851539	0/2820016
		0/001603736	0/001578366	0/001493673	0/001537917	0/001454783
	60	0/2860269	0/2861404	0/2832505	0/2846906	0/2818104
		0/001462546	0/001441533	0/001371190	0/001407945	0/001338880
	65	0/2850344	0/2851493	0/2824958	0/2838166	0/2811750
		0/001308278	0/001291147	0/001235679	0/001264661	0/001210409

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به جداول ۱ تا ۵ ، این نتایج به‌دست می‌آید:

- با افزایش حجم نمونه، برآوردهای ای-بیز پارامترها با توابع پیشین مختلف، بسیار به‌هم نزدیک شدند و رفتار مجانبی یکسانی داشتند. شبیه‌سازی نشان داد که با توابع پیشین مختلف برای ابرپارامترها، همه برآوردهای ای-بیز در قضایای ۱، ۲ و ۳ صدق کردند.
- نتایج نشان داد که مقادیر ER برآوردگرها با افزایش حجم نمونه کاهش می‌یابد.
- برآوردهای ای-بیز در بیش‌تر حالات نسبت به برآوردهای حداکثر درست‌نمایی و بیز دارای ER کم‌تر و نزدیک‌تر به‌هم و از این نظر کاراتر بودند. هم‌چنین با افزایش حجم نمونه، ER برآوردهای ای-بیز کم‌ترین مقدار را نسبت به برآوردهای متناظر دیگر داشتند و از این نظر برآوردهای بهتری هستند.

در مجموع روش جدید برآورد ای-بیز در عین سادگی، دارای دقت بیش‌تری نسبت به برآوردهای قدیمی است.

پیشنهادهای زیر برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود:

- در این مقاله برآوردها براساس توزیع‌های پیشین بتا و یکنواخت و با تولید داده‌های سانسور نوع ۲ به‌دست آمدند. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی از توزیع‌های مناسب دیگر به‌عنوان تابع پیشین برای ابرپارامترها استفاده شود. هم‌چنین می‌توان برآوردها را تحت شرایط دیگری مانند رکوردها و انواع دیگر سانسور به‌دست آورد.
- در این مقاله برای سادگی محاسبات، از توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته با یک پارامتر مجهول استفاده شد. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی از توزیع‌های با بیش از یک پارامتر مجهول، که اغلب دوپارامتری

هستند، استفاده شود. هم‌چنین می‌توان در همین توزیع، هر دو پارامتر را مجهول در نظر گرفت. در این حالت برآوردها از حل دستگاه معادلات به‌دست خواهند آمد.

- توزیع‌هایی که در این مقاله استفاده شد، دارای یک شکل بسته برای تابع توزیع و معکوس آن بودند. به‌همین دلیل از روش ساده مونت‌کارلو (MC) برای شبیه‌سازی استفاده شد. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی از توزیع‌هایی که دارای یک شکل بسته برای تابع توزیع نیستند، نیز استفاده شود. در این حالت از روش مونت‌کارلو با زنجیره مارکف ($MCMC$) برای شبیه‌سازی استفاده خواهد شد که مهم‌ترین آنها، الگوریتم گیبز و متروپلیس است.

منابع

1. Kotz S., Nadarajah S., "Extreme value distributions: theory and applications", (2000) World Scientific.
2. Abouammoh A., Alshingiti A. M., "Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution", Journal of Statistical Computation and Simulation, 79 (11) (2009) 1301-1315.
3. Krishna H., Kumar K., "Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample", Journal of Statistical Computation and Simulation, 83 (6) (2013) 1007-1019.
4. Mann N. R., Singpurwalla N. D., Schafer R. E., "Methods for statistical analysis of reliability and life data", (1974).
5. Alvarez-Andrade S., Bordes L., "Type-II progressive censoring and related processes", REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL, 53 (4) (2008) 267-275.
6. Habibi Rad A., Emadi M., Arghami N. R., "Statistical evidences in type-II censored data", Journal of The Iranian Statistical Society, 10 (1) (2011) 1-12.
7. Okasha H., "E-Bayesian estimation of system reliability with Weibull distribution of components based on type-2 censoring", Journal of Advanced Research in Scientific Computing, 4 (4) (2012) 34-45.
8. Banerjee A., Kundu D., "Inference based on type-II hybrid censored data from a Weibull distribution", IEEE Transactions on reliability, 57 (2) (2008) 369-378.
9. Ahmadi J., Doostparast M., Parsian A., "Bayes estimation based on random censored data for some life time models under symmetric and asymmetric loss functions", Communications in Statistics-Theory and Methods, 39 (17) (2010) 3058-3071.

10. Craiu M., Cipu C., Panzar L., INFERENCES IN A COPULA MODEL FOR BIVARIATE SURVIVAL DATA. UNIVERSITY POLITEHNICA OF BUCHAREST SCIENTIFIC BULLETIN-SERIES A-APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICS, 68 (1) (2006) 3-12.
11. Han M., "E-Bayesian method to estimate failure rate", in The Sixth International Symposium on Operations Research and Its Applications (ISOR06) Xinjiang (2006).
12. Han M., "E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate", Applied Mathematical Modelling, 33 (4) (2009)1915-1922.
13. Udrea A., Popescu D., Miron C., "An analysis on the realiability of a series of texture and shape descriptors for melanoma diagnosis", UPB Sci Bull Series C, 78 (2) (2016) 23-134.
14. Behboudi M., Pasha E., Shafie K., "Signature Verification Using Bayesian Model and MCMC Method", Journal of Basic and Applied Scientific Research, (2013) 124-129.
15. Demi Cebis K. T. C., et al., "Evaluation of Bayesian Model and MCMC Validity in Verification of Piecewise Smooth Signature", Sains Malaysiana, 44 (10) (2015) 1511-1520.
16. Esfandiari h., et al., "Estimation of parameter of proportion in Binomial Distribution Using Adjusted Prior Distribution", Mathematical Researches, 2 (2) (2017) 1-12.
17. Han M., "The E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations of Pareto distribution parameter under different loss functions", Journal of Statistical Computation and Simulation, 87(3) (2017) 577-593.
18. Jaheen Z. F., Okasha H. M., "E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring", Applied Mathematical Modelling, 35 (10) (2011) 4730-4737.
19. Okasha H. M., "E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data", Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22 (3) (2014) 489-495.
20. Reyad H. M., Ahmed S. O., "E-Bayesian analysis of the Gumbel type-ii distribution under type-ii censored scheme", International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 3 (2) (2015) 108-120.
21. Azimi R., Yaghmaei F., Fasihi B., "E-Bayesian estimation based on generalized half Logistic progressive type-II censored data", International Journal of Advanced Mathematical Science, 1 (2) (2013) 56-63.
22. Kiapour A., "Bayes, E-Bayes and robust Bayes premium estimation and prediction under the squared log error loss function", JIRSS-JOURNAL OF THE IRANIAN STATISTICAL SOCIETY, 17 (1) (2018) 33-47.
23. Okasha H. M., Wang J., "E-Bayesian estimation for the geometric model based on record statistics", Applied Mathematical Modelling, 40 (1) (2016) 658-670.

24. Han M., "E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution", Applied Mathematical Modelling, 35 (5) (2011) 2419-2424.
25. Williams T., "The circuit designer's companion", (2004) Elsevier.
26. Block H. W., "Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data", (1976) JSTOR.
27. Saralees N., Samuel K., "Reliability for some bivariate exponential distributions", Mathematical Problems in Engineering, (2006).
28. Balakrishnan N., Balakrishnan N., Aggarwala R., "Progressive censoring: theory, methods, and applications", (2000) Springer Science & Business Media.
29. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H., "A first course in order statistics, volume 54 of Classics in Applied Mathematics", Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. Unabridged republication of the 1992 original, (2008).
30. Han M., "The structure of hierarchical prior distribution and its applications", Chinese Operations Research and Management Science, 6 (3) (1997) 31-40.
31. Lawless J. F., "Statistical models and methods for lifetime data", Vol. 362 (2011) John Wiley & Sons.