

بررسی تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در فضای فینسلری

سمانه سادات صابرعلی*، بهمن رضایی
دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی

پذیرش: ۹۹/۰۴/۱۸

دریافت: ۹۹/۰۲/۰۳

چکیده

مترهای راندز یک رده مهم از مترهای فینسلری هستند که توسط یک متر ریمانی α و $1-\beta$ فرمی به صورت $F = \alpha + \beta$ تعریف می‌شود. در این مقاله ویژگی‌های تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در فضای راندز مطالعه شده است، همچنین اثبات می‌کنیم که یک تبدیل همدیس در یک فضای اینشتینی ضعیف یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است. در ادامه نشان می‌دهیم که نتیجه مشابهی برای مترهای راندز با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف و با انحنای بروالد ایزوتروپیک ضعیف برقرار است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل حافظ دایره ژئودزیک، متر فینسلر، انحنای پرچمی ایزوتروپیک، انحنای بروالد میانگین

مقدمه

در یک فضای اقلیدسی یک دایره ژئودزیک یک خط راست یا یک دایره با شعاع مثبت متناهی است و این مفهوم با استفاده از التصاق لوی چوپتا به هندسه ریمانی توسعه داده می‌شود. در هندسه ریمان یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک تبدیلی است که دایره‌های ژئودزیک را حفظ می‌کند. وگل^۱ در هندسه ریمان اثبات کرد که هر دیفئومورفیسم حافظ دایره، همدیس است. منیفلدهای نیمه ریمانی (M, g) را در نظر گرفته، یک دیفئومورفیسم همدیس $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ به این معنی است که $f^* \bar{g}$ یک مضرب اسکالر مثبتی از g است. اگر این مضرب اسکالر ثابت باشد آن‌گاه f متجانس است [۶]. در سال ۱۹۴۰ یانو تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک منیفلدهای ریمانی را معرفی کرد و نظریه هندسه تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در یک سری از مقالات توسط یانو توسعه داده شد [۱]. یک دایره ژئودزیک در هندسه ریمان، مانند هندسه فینسلر، یک منحنی است که انحنای اول فرنه آن k_1 ثابت و انحنای دوم آن k_2 صفر است و به طور معادل منحنی است که انحنای آن ثابت و بدون تاب می‌باشد [۹]. شباهت‌های بین معنای هندسی و نتایج معروف روی تغییرات تصویری و تغییرات حافظ دایره ژئودزیک نقش مهمی در توسعه و پیشرفت هندسه ریمانی داشته است.

فرض کنیم $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی منیفلد فینسلری (M, g) و $\hat{V} = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \partial_j v^i \frac{\partial}{\partial y^j}$ یک ترفیع کاملروی TM باشد. V را یک میدان برداری همدیس یا تبدیل همدیس بی‌نهایت کوچک گوئیم اگر در رابطه $\mathcal{L}_V g_{ij} = 2\rho(x)g_{ij}$ صدق کند که $\rho(x)$ یک تابع حقیقی روی M است و آن را تابع مشخصه V می‌نامیم. اگر $\rho(x)$ ثابت باشد یا صفر آن‌گاه V

*نویسنده مسئول s.saberali@urmia.ac.ir

¹ Vogel

را یک میدان برداری متجانس یا کیلینگ گوئیم. بعد از آن محققان دیگری کارهای بیشتری در زمینه تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در هندسه ریمان انجام دادند. ایشیهارا اثبات کرد که یک میدان برداری حافظ دایره ژئودزیک روی منیفلدهای ریمانی، یک میدان برداری همدیس است [۷]. این نتیجه از ایشیهارا توسط جوهری ناد به منیفلدهای فینسلری تعمیم داده شد [۸]. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد، یک دیفئومورفیسم موضعی منیفلدهای فینسلری را حافظ دایره گوئیم اگر دایره را به دایره تصویر کند. مفهوم حافظ دایره ژئودزیک به طور مشابه توسط آگراوال^۲ و ایزومی^۳ در هندسه فینسلر توسعه پیدا کرده است به علاوه بیدآباد [۹] نشان داد که در تعریف تبدیل حافظ دایره ژئودزیک نیازی به فرض همدیس بودن نمی باشد، به عبارت دیگر اگر یک تبدیلی دایره های ژئودزیک را حفظ کند آن گاه آن تبدیل یک تبدیل همدیس است.

اگر دو ساختار فینسلری روی یک منیفلد، دایره های ژئودزیک یکسان به صورت مجموعه های نقاط داشته باشند، آن گاه این دو ساختار فینسلری را حافظ دایره ژئودزیک مرتبط گوئیم. تغییرات حافظ دایره ژئودزیک کلی تر از تغییرات تصویری است به عبارت دیگر تغییر متر است که ژئودزیک ها را پایا نگه می دارد.

در سال ۲۰۱۴ پروفیسور شن^۴ و دکتر بیدآباد مفهوم یک دایره ژئودزیک در هندسه فینسلر را بیان کردند و تغییر مترهای حافظ دایره را مطالعه کردند [۹]. در یک فضای فینسلری، تغییر متری که دایره های ژئودزیک را حفظ می کند، همدیس است. به طور دقیق تر اثبات شده است که اگر یک تبدیلی دایره های ژئودزیک را حفظ کند، آن گاه همدیس است. کهنل و راداماخر^۵ منیفلدهای نیمه ریمانی (M, g) را دسته بندی کردند. به عبارت دیگر یک تبدیل همدیس غیر ثابت $\bar{g} = \varphi^{-2}g$ به طوری که تفاوت تانسورهای ریچی آن $\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g$ یک مضرب ثابتی از متر g یا متر \bar{g} است. یک تبدیل $g \rightarrow \bar{g}$ را تبدیل حافظ دایره ژئودزیک می نامیم اگر حافظ منحنی های با انحنا ی ژئودزیک ثابت و تاب ژئودزیک صفر باشد. (این منحنی ها به دایره های ژئودزیک معروف هستند) در این حالت ژئودزیک های همدیس، دایره های ژئودزیک هستند. یک فضای (M, g) را اینشتینی گوئیم؛

$$[\text{Ric}_g] = [g]. \quad \text{هرگاه:}$$

یک تبدیل همدیس بین فضا های اینشتینی یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

$$[g] = [\bar{g}] = [\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g] \quad \text{هرگاه: } [g] = [\bar{g}] = [\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g]$$

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = 0. \quad \text{اگر: } g \rightarrow \bar{g} \text{ را یک تبدیل لیوویل گوئیم،}$$

² Agrawal

³ Izumi

⁴ Z. Shen

⁵ W.Kühnel, H.-B. Rademacher

لم: مترهای هم‌ارز همدیس $g, \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g] = [g] = [\bar{g}]$$

اگر و تنها اگر تابع Φ در معادله زیر صدق کند:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g.$$

Φ یک تابع اسکالر دلخواه است.

یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک $g \rightarrow \bar{g}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = \frac{1}{n} \left(\frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S \right) g$$

که S, \bar{S} انحناهای اسکالر g, \bar{g} هستند.

لم: فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری باشد. شرط لازم و کافی برای این که یک تغییر همدیس $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ حافظ دایره ژئودزیک باشد این است که تابع σ یک جوابی از معادله دیفرانسیل جزئی زیر باشد [۱۰]:

$$\nabla_j \sigma_k - \sigma_j \sigma_k = \Phi g_{jk} \quad (2)$$

که $\sigma_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x^k}$, ∇_k مشتق افقی کارتان و Φ یک تابع اسکالر خاص است.

مثال: تغییرات حافظ دایره ژئودزیک در فیزیک به صورت جمع‌بندی همدیس ریچی شناخته شده می‌باشند و معادلات میدان ماکسول-اینشتین در رابطه با میدان‌های الکترومغناطیسی غیرتهی را تخمین می‌زنند.

لم: فرض کنید F و \bar{F} دو متریک فینسلر همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان M با $\bar{F} = u^{-1} F$ باشند (فاکتور همدیس u معادل با e^σ است)؛ آن‌گاه داریم [۱۱]:

F (۱) و \bar{F} حافظ دایره ژئودزیک هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$(u_i := u_{x^i}, u^i := g^{ir} u_r) u^r C_{ri}^k = 0, u_{ij} = \lambda g_{ij} \quad (3)$$

که $\lambda = \lambda(x)$ یک تابع اسکالر روی M و $|$ به معنای مشتق کواریانت افقی التصاق کارتان (چرن) F است.

(۲) اگر F و \bar{F} حافظ دایره ژئودزیک باشند، آن‌گاه F و \bar{F} حافظ انحنای پرچمی اسکالر (ایزوتروپیک) یا انحنای پرچمی ثابت در (بعدهای بزرگ‌تر یا مساوی ۳) یا یک متر اینشتینی می‌باشند.

قضیه ۱: فرض کنیم F, \bar{F} دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر F, \bar{F} هر دو مترهای اینشتینی ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

نتیجه: فرض کنید F, \bar{F} دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر F, \bar{F} هر دو مترهای اینشتینی باشند، آن گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

فرض کنید F و \bar{F} دو متریک فینسلر روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M باشند. F و \bar{F} را هم ارز تصویری یا تصویری مرتبط گوییم اگر ژئودزیک های (M, F) و (M, \bar{F}) به صورت منحنی های جهت دار در جهت مشابهی یکسان باشند. از طرف دیگر اگر ضرایب ژئودزیک F و \bar{F} در رابطه زیر صدق کنند:

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + P(x, y)y^i \quad (۴)$$

آن گاه F و \bar{F} هم ارز تصویری هستند. تغییر متریک های فینسلری که در رابطه (۴) صدق می کنند را تغییر تصویری می نامیم. تابع $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$ که همگن مثبت از درجه یک می باشد را فاکتور تصویری گوییم. اسپری های G و \bar{G} که در رابطه (۴) صدق می کنند را هم ارز تصویری می نامیم.

مسأله چهارم هیلبرت در حالت منظم مطالعه و بررسی مترهای فینسلری روی یک زیر مجموعه $\mathbb{U} \subset R^n$ است که ژئودزیک های آن خطوط راست هستند. مترهای فینسلری با این ویژگی را متریک های سطح تصویری می نامیم. یک متر فینسلر $F(x, y)$ را روی یک زیر مجموعه $\mathbb{U} \subset R^n$ مسطح تصویری می گوییم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

$$G^i(x, y) = P(x, y)y^i \quad (۵)$$

که $P(x, y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک در y است. انحنای مهم ترین مفاهیم در هندسه هستند. مفهوم انحنای اولین بار توسط ریمان معرفی شد، انحنای ریمانی را مانند انحنای برشی می توان به متریک های فینسلری گسترش داد. کمیت زیر برای هر صفحه مماس $P \subset T_x M$ و بردار غیر صفر $y \in P$ به صورت زیر بیان می شود:

$$K(P, y) := \frac{g_y(u, R_y(u))}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}$$

که $u \in T_x M$ یک بردار دلخواهی است به طوری که $P = \text{span}\{y, u\}$. $K(P, y)$ را انحنای پرچمی F می نامیم. وقتی F ریمانی باشد، $K(P, y) = K(P)$ مستقل از $y \in P$ انحنای برشی P در هندسه ریمان است. بنابراین انحنای پرچمی مشابه انحنای برشی در هندسه ریمان می باشد. یک متریک فینسلر را با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف گوییم اگر انحنای پرچمی آن یک تابع اسکالر روی $T_x M$ به صورت زیر باشد

$$K = \frac{3\theta}{F} + \sigma$$

که $\theta = t_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی و $\sigma = \sigma(x)$ یک تابع اسکالر روی M است.

قضیه ۲: فرض کنید F, \bar{F} دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر F, \bar{F} هر دو با انحنا ی پرچمی ایزوتروپیک ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است. انحنا ی بروالدکمیت غیرریمانی مهم دیگری است که وابسته به S انحنا است.

$$E_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} S_{y^i y^j}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \left[\frac{\partial G^m}{\partial y^m} \right](x, y)$$

$E := E_{ij} dx^i \otimes dx^j$ یک تانسور روی TM_0 است که E تانسور نام دارد. E تانسور به صورت یک خانواده از فرم‌های متقارن $E_y: T_x M \times T_x M \rightarrow R$ تعریف شده است.

$$E_y(u, v) = E_{ij}(x, y) u^i v^j,$$

که $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ و $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} |_x$ متعلق به $T_x M$ است. آن‌گاه $E := \{E_y | y \in TM \setminus \{0\}\}$ انحنا ی بروالد میانگین یا E -انحنا می‌نامیم. یک متریک فینسلر را یک متریک بروالد ضعیف گوئیم اگر $E = 0$.

قضیه ۳: فرض کنید F, \bar{F} دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر F, \bar{F} هر دو با انحنا ی بروالد میانگین ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است.

مقدمات

یک تابع $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ را یک ساختار فینسلری می‌نامیم؛ اگر در یک دستگاه مختصات موضعی (x^i, y^i) :

$$F(x, y) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x)$$

در روابط زیر صدق کنند:

(۱) F یک تابع همگن مثبت از درجه یک نسبت به y باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ و λ مثبت باشد.

(۲) $F(x, y)$ تابعی C^∞ روی $TM \setminus \{0\}$ باشد.

(۳) ماتریس هسیان $\frac{1}{2} [F^2_{y^i y^j}]^6$ یک ماتریس مثبت معین باشد.

یک منیفلد C^∞ فینسلری با ساختار فینسلری بالا را یک منیفلد فینسلری یا یک فضای فینسلری می‌گوئیم.

⁶ Hessian Matrix

تعریف: فرض کنیم $F : R^n \rightarrow [0, \infty]$ یک نگاشت با خواص زیر باشد:

۱. F روی $R^n - \{0\}$ هموار باشد.

۲. F همگن مثبت از درجه یک باشد.

۳. ماتریس هسیان F معین مثبت باشد.

در این صورت F را یک نرم مینکوفسکی^۷ روی R^n می نامیم.

یک متریک فینسلر روی یک منیفلد، یک خانواده از نرم های مینکوفسکی روی فضاها می باشد. در واقع با توجه به تعریف فوق و تعریف ساختار فینسلری می توان گفت F یک ساختار فینسلری روی منیفلد M است هرگاه تحدید آن به هر تار TM در هر نقطه یک نرم مینکوفسکی باشد.

مثال: متریک ریمانی روی منیفلد M یک خانواده از ضرب های داخلی $\{g_x\}_{x \in M}$ است که $g_{ij}(x, y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ در مختصات موضعی هموار هستند.

مثال: روی R^n ، تابع $F(x, y) := |y| + \langle x, y \rangle$ را در نظر می گیریم که در آن $\|\cdot\|$ نرم استاندارد و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی R^n است. در این صورت F یک متریک فینسلر روی R^n است.

یک اسپری^۸ روی منیفلد فینسلری M یک میدان برداری هموار G روی $TM \setminus \{0\}$ می باشد که در یک دستگاه مختصات استاندارد موضعی به صورت زیر بیان می شود:

$$(۶) \quad G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

که $G^i(y)$ توابع موضعی روی TM می باشند: $G^i(\lambda y) = \lambda^2 G^i(y)$, $\lambda > 0$

یک منیفلد با یک اسپری را فضای اسپری می نامیم. ضرایب اسپری G^i به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(۷) \quad G^i = \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^m y^l} y^m - [F^2]_{x^l} \}$$

که در آن $g^{ij} := (g_{ij})^{-1}$ [۱۲].

^۷ Minkowski

^۸ Spray

هر اسپری G به طور یکتا یک خانواده از تبدیلات $R_y := R_k^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} |_x : T_x M \rightarrow T_x M$ مشخص می کند که در آن R_k^i به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_k^i := 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2 G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (۸)$$

R_y انحنا ی ریمان^۹ اسپری G در جهت y می باشد.

اثر انحنا ی ریمان را انحنا ی ریچی^{۱۰} نامیده و به صورت زیر تعریف می شود:

(۹)

$$\text{Ric}(x, y) = R_m^m(x, y)$$

انحنا ی ریچی همگن مثبت از درجه ۲ می باشد.

یک متریک فینسلر روی منیفلد M را یک متریک اینشتینی ضعیف می نامیم، اگر:

(۱۰)

$$\text{Ric} = (n-1) \left(\frac{3\theta}{F} + \sigma \right) F^2$$

که $\sigma = \sigma(x)$ یک تابع اسکالر و $\theta = t_i(x)y^i$ یک -1 فرمی روی M است.

یک متریک فینسلری را اینشتینی^{۱۱} می نامیم؛ اگر در رابطه بالا $\theta = 0$ باشد، به عبارت دیگر:

$$\text{Ric} = (n-1) \sigma F^2 \quad (۱۱)$$

فرض کنید F یک متریک فینسلر روی منیفلد $-n$ بعدی M باشد، با انتخاب یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد

(x^i, y^i) فرض کنیم $dv_F = \sigma_F(x) dx^1 \dots dx^n$ فرم حجمی متریک فینسلر F باشد که:

$$\sigma_F(x) = \frac{\text{Vol}(B^n(1))}{\text{Vol}\{y^i \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i \frac{\partial}{\partial x^i})|_x < 1\}}$$

برای یک بردار غیر صفر $y \in T_x M$ انحراف معیار^{۱۲} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau(x, y) := \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma_F(x)}$$

⁹ Riemann curvature

¹⁰ Ricci curvature

¹¹ Einstein metric

¹² distortion

برای یک بردار $y \in T_x M$ فرض کنید منحنی $c(t)$ یک ژئودزیک با $c(0) = x$ و $\dot{c}(0) = y$ باشد، انحنای S به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(x, y) := \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] |_{t=0} \quad (12)$$

انحنای $S(x, y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک می باشد. بنا بر تعریف فوق انحنای $S(x, y)$ در واقع مشتق هموردا افقی τ در امتداد ژئودزیکها است. به عبارت دیگر داریم:

$$S(x, y) = \tau|_1(x, y)y^1$$

"|" که مشتق هموردا افقی F می باشد.

در مختصات موضعی داریم:

$$S(x, y) = y^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i$$

با توجه به رابطه بالا به رابطه زیر برای انحنای $S(x, y)$ می توان دست یافت:

$$S(x, y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} (\ln \sigma_F(x))$$

متریک فینسلر $F(x, y)$ را با انحنای ایزوتروپیک ضعیف $^{13}S(x, y)$ گوئیم، اگر:

$$(13)$$

$$S(x, y) = (n + 1)cF(x, y) + \eta$$

که $c = c(x)$ یک تابع اسکالر و $\eta = \eta_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M می باشد.

متریک فینسلر $F(x, y)$ را با انحنای تقریباً ایزوتروپیک $^{14}S(x, y)$ گوئیم اگر در رابطه بالا $d\eta = 0$.

متریک فینسلر $F(x, y)$ را با انحنای ایزوتروپیک $S(x, y)$ گوئیم اگر در رابطه بالا $\eta = 0$ باشد.

متریک فینسلر $F(x, y)$ را با انحنای ثابت $^{15}S(x, y)$ گوئیم اگر در رابطه بالا c ثابت و $\eta = 0$ باشد.

¹³ Weak isotropic curvature

¹⁴ Almost isotropic curvature

¹⁵ Constant curvatur

فرض کنید $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متر ریمانی^{۱۶} روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M و $\beta = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M باشد. فرض کنیم:

$$\|\beta(x, y)\|_\alpha := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1$$

که $a^{ij}(x) = (a_{ij}(x))^{-1}$ تعریف می‌کنیم: $F = \alpha + \beta$ را یک متریکراندرز^{۱۷} می‌نامیم. تانسور اساسی متریک راندرز به صورت زیر می‌باشد:

$$g_{ij}(x, y) = \frac{F}{\alpha} \left[a_{ij} + \frac{\alpha}{F} \left(b_i + \frac{y_i}{\alpha} \right) \left(b_j + \frac{y_j}{\alpha} \right) - \frac{y_i y_j}{\alpha} \right]. \quad (14)$$

وارون g^{ij} ، g_{ij} به صورت زیر می‌باشد:

$$g^{ij}(x, y) = \frac{\alpha}{F} a^{ij} - \frac{\alpha}{F^2} (b^i y^j + b^j y^i) + \frac{b^2 \alpha + \beta}{F^3} y^i y^j. \quad (15)$$

تاب کارتان میانگین متر راندرز

$$I_i(y) = \frac{n+1}{2(\alpha + \beta)} \left(b_i - \frac{y_i}{\alpha} \beta \right) \quad (16)$$

$F(x, y)$ را روی یک زیر مجموعه باز $\mathbb{U} \subset R^n$ مسطح تصویری گوئیم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

$$G^i(x, y) = P(x, y)y^i \quad (17)$$

که $P(x, y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک در y است.

اثبات قضایا

اثبات قضیه ۱: می‌دانیم که اگر F, \bar{F} دو متریک راندرز اینشتینی ضعیف باشند آنگاه با انحنای S, \bar{S} ایزوتروپیک می‌باشند بنابراین داریم: $\bar{F}S(x, y) = (n+1)k_1(x)$ و به عبارت دیگر، اگر F با انحنای ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم $S = (n+1)k_1(x)$ و $k_1(x)$ تابع اسکالر می‌باشد. همچنین اگر \bar{F} با انحنای ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم $\bar{S} = (n+1)k_2(x)$ و $k_2(x)$ تابع اسکالر می‌باشد. با توجه به تبدیل همدیس مرتبط بودن بین F, \bar{F} رابطه زیر را برای تبدیل همدیس انحنای S ، داریم:

$$\bar{S}(x, y) = S(x, y) + F^2(x, y)\sigma^i I_i \quad (18)$$

¹⁶ Riemannian metric

¹⁷ Randers metric

با جایگذاری \bar{S}, S در رابطه بالا، به دست می آوریم:

$$(n+1)k_2(x)e^\sigma F = (n+1)k_1(x)F + F^2\sigma^i I_i$$

$$(n+1)(k_2(x)e^\sigma - k_1(x)) - F\sigma^i I_i = 0$$

با جایگذاری $F = \alpha + \beta$ و $\bar{F} = \overline{\alpha + \beta}$ و همچنین از روابط بالا به دست می آوریم:

$$I_i \sigma^i = 0 \quad (19)$$

$$(n+1)(k_2(x)e^\sigma - k_1(x))\beta - \sigma^i I_i = 0$$

که $\sigma^i = g^{ij}\sigma_j$ با جایگذاری در رابطه (۱۹) داریم:

$$I_i g^{ij}\sigma_j = 0 \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در رابطه (۲۰) به دست می آوریم:

$$\alpha\{\beta b^j \sigma_j - b^2 \sigma_0\} + \alpha^2 b^j \sigma_j - \beta \sigma_0 = 0 \quad (21)$$

با توجه به رابطه (۲۱) داریم:

$$\alpha^2 b^j \sigma_j - \beta \sigma_0 = 0 \quad (22)$$

با توجه به تحویل ناپذیری α^2 و β در رابطه (۲۲) به دست می آوریم $\sigma_i = 0$. پس σ ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی می باشد.

اثبات قضیه ۲: اگر \bar{F} یک متر راندرز با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف باشد، آن گاه \bar{F} با انحنای ایزوتروپیک \bar{S} است، همچنین F با انحنای ایزوتروپیک S می باشد. بنابراین مشابه اثبات قضیه ۱ تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی می باشد.

اثبات قضیه ۳: اگر F یک متریک راندرز با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشد، آن گاه F در رابطه زیر صدق می کند:

$$(23)$$

$$E = (n+1)c(x)F^{-1}h$$

$$(24)$$

$$e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$$

همچنین \bar{F} یک متریک راندرز با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشد، آن‌گاه \bar{F} در رابطه بالا صدق می‌کند. با توجه به این‌که \bar{F} و F هر دو متریک راندرز همدیس مرتبط می‌باشند یعنی $\bar{F} = e^\sigma F$ ، آن‌گاه داریم:

$$e_{00} = r_{00} + 2\beta s_0 \quad (25)$$

$$\bar{r}_{00} = e^\sigma (r_{00} - \beta \sigma_0 + \alpha^2 f) \quad (26)$$

$$(\bar{e}_{00} = e^\sigma (e_{00} + f(\alpha^2 - \beta^2) + \beta \sigma_0 (b^2 - 1)) \quad (27)$$

از رابطه (۲۴) داریم: $\bar{e}_{00} = 2ce^{3\sigma}(\alpha^2 - \beta^2)$

با جایگذاری در رابطه (۲۷) داریم:

$$(2ce^{2\sigma} - 2c - f)(\alpha^2 - \beta^2) - \beta \sigma_0 (b^2 - 1) = 0$$

با توجه به تحویل‌ناپذیری $\alpha^2 - \beta^2$ و β داریم: $\sigma_0 = 0$ پس σ ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی می‌باشد.

References

1. Yano, K., On circular geometry, I. Conircular transformations. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 195-200 (1940).
2. Yano, K., On circular geometry, II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\lambda} = \phi g_{\mu\lambda}$. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 505-511 (1940).
3. Yano, K., On circular geometry, III. Theory of curves. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 442-448 (1940).
4. Yano, K., On circular geometry, IV. Theory of subspace. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 505-511 (1940).
5. Yano, K., On circular geometry, V. Einstein spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 446-451 (1942).
6. Vogel, W.O.K., Transformationen in Riemannschen Räumen, (German). Arch. Math. Soc. **117**, 251-275 (1965).

7. Ishihara, S., On infinitesimal concircular transformations. *Kodai Math. Sem. Rep.* **12**, 45-56 (1960).
8. P. Joharinad, P., Bidabad, B., Conformal vector field on Finsler spaces. *Differential geometry and applications* **31** (2013) 33-40
9. Ferrand, J., Concircular transformations of Riemannian manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. M.* **10**, 163-171 (1985).
10. Bidabad B., Shen Z., Circle-preserving transformations in Finsler spaces. *Publ. Math. Debr.* **81**, 435-445 (2012).
11. Bidabad, B., A classification of complete Finsler manifolds through the conformal theory of curves. *Differential geometry and its applications* **35**, 350-360 (2014).
12. Shen Z., Yang G., On concircular transformations in Finsler geometry. *Results Math.* **74**:162 (2019).
13. Bao D., Chern S.S., Shen Z. *Riemann-Finsler geometry*, Springer-Verlag, (2000).