

# بررسی وجود جواب و طیف مقادیر ویژه در کلاس‌هایی از معادلات بیضوی

سمیه سعیدی نژاد؛ دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی

پذیرش ۹۶/۰۵/۱۰

دریافت ۹۵/۰۳/۲۱

## چکیده

در این مقاله به بررسی وجود جواب برخی از کلاس‌های معادلات بیضوی به صورت‌های

$$\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x, u)$$

با شرایط مرزی ناویر  $u = \Delta u = 0$  روی مرز هموار از ناحیه کراندار  $\Omega$  از  $\mathbb{R}^N$  و معادله

$$-\Delta u - \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x, u)$$

با شرط مرزی دیریکله می‌پردازیم که در آن‌ها  $\varepsilon$  و  $\lambda$  پارامترهایی مثبت و  $c < \mu_1$  که  $\mu_1$  کوچک‌ترین مقدار ویژه عملگر لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله است. با بحث‌هایی مبتنی بر حساب تغییرات و تغییر صورت‌بندی وجود جواب به یک مسئله نقطه ثابت، با تکیه بر قضیه نقطه ثابت باناخ، وجود جواب معادله به‌ازای هر  $0 < \lambda$  در شرایطی که  $\varepsilon \neq 0$  به صورت پدیده‌ای ناپیوسته در مقابل حالتی که  $\varepsilon = 0$  و معادله لزوماً دارای جواب ضعیف نیست، مطرح می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم که اسکالر  $\mu$  چنان موجود است که معادله زیر به‌ازای مقادیری به قدر کافی بزرگ  $\lambda$  و هر  $0 < \varepsilon$  دارای جواب غیربدیهی است.

$$\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x, u) + \mu u$$

همچنین مثال‌هایی در راستای کاربردی بودن بحث‌های انجام شده، ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** معادله دیفرانسیل بیضوی، عملگر بای لاپلاسی، جواب ضعیف، مقدار ویژه، قضیه نقطه ثابت باناخ.

Mathematics Subject Classification (2010).35J60; 15A18; 35J30, 35D30.

## مقدمه

معادلات بیضوی شامل عملگر مرتبه دوم لاپلاسی  $\Delta^1$  و عملگر مرتبه چهارم لاپلاسی  $\Delta^{2^2}$  که روی تابع  $N$

متغیره  $u$  بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ و } \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$$

در مدل‌سازی پدیده‌های دینامیک بسیاری ظاهر می‌شوند. از جمله، مسائل زیادی در الکتروستاتیک و الکترومغناطیس وجود دارد که با معادله پواسن که شامل عملگر  $\Delta$  است، توصیف می‌شوند. همچنین معادلات مرتبه چهارم که شامل عملگر  $\Delta^2$  باشند، عموماً رفتار حرکت استاتیک در جسم صلب را توضیح می‌دهند. از این رو، معادلات بیضوی، جزء

دسته معادلات پر کاربرد در حوزه فیزیک و مهندسی به‌شمار می‌روند که توجه پژوهش‌گران بسیاری به آن‌ها معطوف شده است. در این میان مسائلی که روش‌های تحلیلی عاجز از معرفی و یافتن جواب تحلیلی آن‌هاست، در حوزه نظری توجه ریاضی‌دانان آنالیزکار را به‌خود جلب کرده است. مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای آنالیز تغییرات از جمله روش مسیر کوهی<sup>۳</sup>، روش چشمه، روش جواب بالایی و پایینی و راهبردهای هندسی- تغییراتی از جمله روش خمینه نهاری، نگاشت فایبرینگ و راهبردهای توپولوژیک از جمله روش درجه توپولوژیک مثال‌هایی از انبوه روش‌های موجود در باب بررسی وجودی معادلات است [۱]، [۲].

گفتنی است، شرایط مفروض شده بر جملات درگیر در معادله و نوع غیرخطی آن‌ها مزیت هر یک از روش‌های نام‌برده را در جای خود به اثبات می‌رساند. در این میان به مقالات [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، که هریک از روشی مجزا به بررسی وجودی معادله‌ای بیضوی پرداخته اشاره می‌کنیم. در ادامه برخی از مسائل بررسی شده مرتبط را با ذکر جزئیات بیش‌تر مرور می‌کنیم.

به‌طور مثال معادله  $\Delta^2 u + c\Delta u = d[(u+1)^+ - 1]$  با شرایط مرزی ناویر که در آن  $u^+ = \max\{u, 0\}$  برای اولین بار در مقاله [۷] در نظر گرفته شده است که مکنا<sup>۴</sup> و لازر<sup>۵</sup> در این مقاله اشاره می‌کنند، این نوع از معادله غیرخطی در مدل‌بندی حرکت موج در پل‌های معلق ظاهر می‌شود. بعد از آن مقالات متعددی به بررسی وجود جواب شکل‌های کلی‌تر از معادله به‌صورت  $\Delta^2 u + c\Delta u = f(x, u)$  با شرایط مختلفی روی  $f$  و عموماً با شرط  $c < \mu_1$  که  $\mu_1$  اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاسین با شرایط مرزی دیریکله است، پرداختند.

در مقاله [۸]، میشلتی<sup>۶</sup> و پیستویا<sup>۷</sup> یک ساختار هندسی مطابق با قضیه اتصال<sup>۸</sup> به‌منظور بررسی معادله  $\Delta^2 u + c\Delta u = bg(x, u)$  با شرایط  $2G(x, s) \leq s^2$  و  $\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{G(x, s)}{s^2} = l(x)$  و  $\limsup_{s \rightarrow -\infty} G(x, s) \leq 0$  به‌وجود آوردند که  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$ .

در مقاله [۹]، با استفاده از قاعده اکلان<sup>۹</sup> و روش مسیر کوهی چندگانگی جواب مسئله

$$\Delta^2 u + c\Delta u = a(x)|u|^{s-2}u + f(u(x))$$

با اعمال چندین شرط غیرخطی بر  $f$  تحت شرایط مرزی ناویر بررسی شده است.

در مقاله [۱۰]، معادله  $\Delta^2 u + c\Delta u = \lambda u + f(u(x))$  در نظر گرفته شده که  $f$  دارای شرط زیربحرانی<sup>۱۰</sup> است؛ یعنی  $|f(s)| \leq d_1|s| + d_2|s|^{p-1}$  که  $p \in [2, 2^*)$  و  $d_1, d_2 > 0$  و با تکیه بر تئوری درجه توپولوژیک<sup>۱۱</sup> به بررسی وجود جواب آن پرداخته است.

در بحث تغییراتی راجع به‌وجود جواب معادلات دیفرانسیل، مسئله وجود جواب معادله به‌طور معادل با مسئله وجود نقطه بحرانی تابع انرژی که نظیر معادله ساخته می‌شود؛ دنبال می‌شود و اما در روش نقطه ثابت در مسائل وجودی، مسئله نقطه بحرانی داشتن تابع انرژی به مسئله نقطه ثابت داشتن عملگر مشتق تابع انرژی تبدیل می‌شود. این مقاله با

---

3. Mountain pass theorem  
4. Mckenna  
5. Lazer  
6. Micheletti  
7. Pistoia  
8. Linking theorem  
9. Ekeland principle  
10. Subcritical  
11. Topological degree theory

اقتباس از روشی که در قضیه 2.G از کتاب زیدلر [۱۱] و یا مقاله آمپه [۱۲] است، به شکل جالبی مسئله نقطه ثابت داشتن یک عملگر انقباضی را با وجود جواب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبط می‌سازد.

در این مقاله مسائل بیضوی  $(P_1)$  و  $(P_2)$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$(P_1): \begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x, u); & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0; & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$$(P_2): \begin{cases} \Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x, u); & x \in \Omega \\ u = 0; & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

که  $\Omega$  زیرمجموعه کرانداری از  $\mathbb{R}^N$ ،  $N > 4$ ،  $c < \mu_1$ ،  $\lambda, \varepsilon > 0$  و هم‌چنین نگاشت‌های  $\varphi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  و  $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در این شرایط صدق می‌کنند:

به‌ازای هر  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$  و  $x \in \bar{\Omega}$ :

$$I \quad (\varphi(x, \xi)\xi - \varphi(x, \eta)\eta) \cdot (\xi - \eta) \geq 0$$

$$II \quad \text{به‌ازای } \kappa > 0 \text{ داریم: } |\varphi(x, \xi)\xi_i - \varphi(x, \eta)\eta_i| \leq \kappa |\xi - \eta|$$

$$III \quad f \in Car(\Omega \times \mathbb{R}) \text{ و به‌ازای } r \in L^2(\Omega) \text{ و } \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } |f(x, t)| \leq r(x) + \alpha|t| \text{ به‌ازای هر } t \in \mathbb{R} \text{ و } x \in \bar{\Omega}$$

$$IV \quad \text{به‌ازای هر } x \in \bar{\Omega}, f(x, 0) \neq 0$$

$$V \quad f \text{ نسبت به مؤلفه دوم خود لیپ‌شیتس است؛ یعنی به‌ازای } h \in L^\infty(\Omega) \text{ و هر } u, v \in \mathbb{R} \text{ و } x \in \bar{\Omega} \text{ داریم:}$$

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq h(x)|u - v|$$

مثال ۱. تابع  $f(x, u) = \cos u(x)$  در شرایط (III-V) صدق می‌کند.

اثبات. به‌ازای  $r = 1$  و  $\alpha = 0$  شرط (III) برقرار است و از آن‌جا که  $|f_u| \leq 1$  طبق قضیه مقدار میانگین شرط (V) به‌ازای  $h(x) = 1$  برقرار است.

مثال ۲. تابع  $\varphi(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|}}$  در خواص (I) و (II) صدق می‌کند.

اثبات. صحت شرط (I) معادل است با این‌که  $|\xi\eta| \left( \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|}} + \frac{1}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) \geq \frac{\xi^2}{\sqrt{1+|\xi|}} + \frac{\eta^2}{\sqrt{1+|\eta|}}$  که نتیجه می‌دهد،

$$(1) \quad \left( \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|}} - \frac{|\eta|}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) (|\xi| - |\eta|) \geq 0;$$

از طرفی با توجه به این‌که تابع  $p(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}}$  به‌ازای  $t$  های مثبت صعودی است، پس رابطه (۱) برقرار است.

به‌منظور تحقیق صحت شرط (II) قرار دهید،  $\phi_i(\xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|}}$ . در این صورت به‌ازای هر  $i \neq j \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi_i} = \frac{2|\xi| + |\xi|^2 - \xi_i^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}, i = j \text{ اگر } \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{-\xi_i \xi_j}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}};$$

بنا براین

$$|\phi_i'(\xi)| = \left( \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial \xi_j} \right| = \frac{2|\xi| + |\xi|^2 - \xi_i^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{-\xi_i \xi_j}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{|\xi_i|^2 + |\xi_j|^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{2|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2N|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2+(2N+1)|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

از آن‌جاکه با محاسبات مقدماتی داریم،  $C_0 = \frac{(4N-2)(2N+1)^{\frac{3}{2}}}{(6N-3)^{\frac{3}{2}}} := C_0$ ،  $\max \left\{ \frac{2+(2N+1)t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}; t > 0 \right\}$  از این رو،  
 $|\phi_i'(\xi)| \leq C_0$

بنا براین با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای تابع  $\phi_i(\xi)$  خواهیم داشت،  $|\phi_i(\xi) - \phi_i(\eta)| \leq C_0|\xi - \eta|$  که این نامساوی (II) را نشان می‌دهد.

در موضوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، کاملاً شناخته شده است که معادلات  $-\Delta u = \mu u$  با شرایط مرزی دیریکله و  $\Delta^2 u + c\Delta u = \lambda u$  با شرایط مرزی ناویر روی مجموعه‌ای هموار دارای دنباله‌های نازولی  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  و  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  از مقادیر ویژه مثبت هستند [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]. از طرفی در این مقاله با ارائه بحث‌هایی مبتنی بر حساب تغییرات و تغییر صورت‌بندی وجود جواب با تکیه بر قضیه نقطه ثابت باناخ [۱۶]، وجود جواب معادلات  $(P_1)$  و  $(P_2)$  به‌ازای هر  $0 < \varepsilon$  در شرایطی که  $\varepsilon \neq 0$  به‌عنوان یک پدیده ناپیوسته در مقابل حالتی که  $\varepsilon = 0$  و معادله لزوماً دارای جواب ضعیف نیست، مطرح می‌شود.

قبل از بیان نتایج اصلی، برخی از مهم‌ترین تعاریف و احکام از پیش دانسته را بیان می‌کنیم. جواب ضعیف یک معادله، تابعی است که مشتقات آن در ناحیه‌ای که معادله در آن تعریف شده است، ممکن است موجود نباشد؛ با این حال، به مفهومی که به شکل دقیق تعریف می‌شود، در معادله داده شده صدق می‌کند. این تعریف که در ادامه می‌آید مستلزم حداقل انتگرال‌پذیری تابع جواب و حاصل ضرب آن با توابعی به قدر کافی هموار است که تعریف فضای سوبولوف<sup>۱۳</sup> به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از توابع انتگرال‌پذیر این نیاز را مرتفع می‌سازد. در خصوص دریافت اطلاعات کاملی از خاستگاه تعریف فضاهای سوبولوف و ویژگی‌های آن کتاب‌های مرجع [۱۷]، [۱۸] را معرفی می‌کنم. فضای سوبولوف  $W^{1,2}(\Omega)$  بدین صورت تعریف می‌شود،

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u = u(x) \in L^2(\Omega); \exists g_1, \dots, g_N \in L^2(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} g_i v dx; \forall v \in C_c^\infty(\Omega), 1 \leq i \leq N \}$$

$W^{1,2}(\Omega)$  با نرم  $\|u\| = \|\nabla u\|_2$  که  $\|\cdot\|_2$  نرم فضای باناخ  $L^2(\Omega)$  است، یک فضای باناخ انعکاسی است. علاوه بر این، با ضرب داخلی  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$ ،  $W^{1,2}(\Omega)$  یک فضای هیلبرت بوده است و به همین دلیل آن را با نماد  $H^1(\Omega)$  نیز نمایش می‌دهند. همچنین بستار مجموعه  $C_c^\infty(\Omega)$  در  $H^1(\Omega)$  را با نماد  $H_0^1(\Omega)$  نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که در واقع  $\nabla u$  همان بردار  $(g_1, \dots, g_N)$  در تعریف ارائه شده از فضای سوبولوف است که از آن با عنوان مشتق ضعیف<sup>۱۴</sup> نامبرده می‌شود. از این پس به جای  $g_i$  از نماد  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  استفاده می‌شود. بدیهی است که مشتقات ضعیف مراتب بالاتر نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.

هم‌چنین فضای سوبولوف  $W^{2,2}(\Omega)$  با نرم  $\|u\| = \|\Delta u\|_2$  بدین صورت معرفی می‌شود:

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)\}$$

که یک فضای باناخ انعکاسی است و با ضرب داخلی  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$  یک فضای هیلبرت است. قابلیت‌های نشان دادن فضاهای سوبولوف معرفی شده در فضاهای لبگ اهمیت اساسی در ادامه بحث خواهند داشت که به صورت خلاصه به آن‌ها می‌پردازیم.

درحالتی که  $N > 2$ ،  $H_0^1(\Omega)$  تحت یک عملگر فشرده در فضای  $L^q(\Omega)$  می‌نشیند که در آن

$$1 \leq q < 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

وجود این نگاشت همانی فشرده را با نماد  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  نمایش می‌دهیم. بنا براین به ازای یک  $0 < c$  که مستقل از انتخاب  $u \in H_0^1(\Omega)$  باشد، داریم:

$$\|u\|_q \leq c \|\nabla u\|_2 \quad (۲)$$

به ازای  $q = 2$ ، کوچکترین مقدار  $c$  که در رابطه (۱) صدق می‌کند (ثابت نشان دادن سوبولوف) همان مجذور معکوس اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاس با شرایط دیریکله است یعنی  $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$  که:

$$\mu_1 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}; 0 \neq u \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

هم‌چنین  $H^2(\Omega)$  با نگاشت همانی فشرده در فضای  $L^q(\Omega)$  می‌نشیند.

در این مقاله با توجه به ضرورت معنادار بودن جملات موجود در معادله، اگر با مسئله مرتبه چهار مواجه باشیم، فضای هیلبرت  $X := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  را به منزله فضای زمینه برای تحقیق وجود جواب با نرم زیر در نظر می‌گیریم؛

$$\|u\| = \|u\|_X = \left( \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

که با توجه نتایج اولیه مقاله [۷]، از آن جاکه

$$\inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2) \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}; 0 \neq u \in H^2(\Omega) \right\} = \mu_1(\mu_1 - c)$$

از این رو، ثابت نشانیدن سوبولوف در نشانیدن  $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$  عبارت است از  $\frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mu_1-c)}}$  یعنی به‌ازای هر  $u \in X$

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mu_1-c)}} \|u\|. \quad (۳)$$

علاوه بر این، واضح است که  $X$  به‌شکل پیوسته‌ای در  $H_0^1(\Omega)$  می‌نشیند. از این رو، با در نظر داشتن نابرابری (۱) به‌ازای  $q = 2$  و (۲)، به‌ازای هر  $u \in X$  داریم:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\mu_1 - c} \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2) dx. \quad (۴)$$

**تعریف ۱.** تابع  $u \in X$  را جواب ضعیف مسئله  $(P_1)$  گوییم، هرگاه به‌ازای هر  $v \in X$  داشته باشیم:

$$\int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - c \nabla u \nabla v) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u) \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad (۵)$$

به‌طور مشابه  $u \in H_0^1(\Omega)$  را جواب ضعیف مسئله  $(P_2)$  گوییم، هرگاه به‌ازای هر  $v \in H_0^1(\Omega)$  داشته باشیم:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u) \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} f(x, u) v dx,$$

**تعریف ۲.** مقدار  $\lambda \in \mathbb{R}$  را مقدار ویژه مسئل  $G(P)$  می‌نامیم؛ هرگاه به‌ازای این مقدار از  $\lambda$  دارای حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی مثل  $u$  باشد که در این صورت  $u$  را نیز بردار ویژه نظیر  $\lambda$  می‌نامیم.

## نتایج اصلی

در ابتدا توابع  $a, b_{\varepsilon}, e_{\lambda, \varepsilon}$  را به‌صورت نگاشت‌هایی از  $X \times X$  به  $\mathbb{R}$  با ضوابط زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_{\varepsilon}(u, v) = \varepsilon \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u) \nabla u \nabla v dx,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - c \nabla u \nabla v) dx,$$

$$e_{\lambda, \varepsilon}(u, v) = \lambda \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} f(x, u) v dx.$$

بنا بر فرض (III) واضح است که عبارت  $\int_{\Omega} f(x, u) v dx$  خوش تعریف است؛ در واقع،

$$\int_{\Omega} |f(x, u) v| dx \leq \int_{\Omega} (r(x) v + v^2) dx \leq (\|r\|_2 + 1) \|v\|_2 < \infty.$$

از آن‌جاکه توابع  $a, b_{\varepsilon}, e_{\lambda, \varepsilon}$  نسبت به مؤلفه دوم خود خطی و پیوسته هستند، بنا براین به‌ازای هر  $u \in X$

$a(u, \cdot), b_{\varepsilon}(u, \cdot), e_{\lambda, \varepsilon}(u, \cdot) \in X^*$ . در نتیجه طبق قضیه نمایش ریس روی فضاهای هیلبرت، به‌ازای هر  $u \in X$

توابع  $A(u), B_{\varepsilon}(u), E_{\lambda, \varepsilon}(u) \in X^*$  چنان موجودند که به‌ازای هر  $v \in X$  داشته باشیم:

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle, b_{\varepsilon}(u, v) = \langle B_{\varepsilon}(u), v \rangle \text{ و } e_{\lambda, \varepsilon}(u, v) = \langle E_{\lambda, \varepsilon}(u), v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - c \nabla u \nabla v) dx.$$

حال نگاشت به‌ازای اسکالر غیر صفر  $t$ ، نگاشت  $S_t: X \rightarrow X$  را با ضابطه (۶) در نظر بگیرید،

$$S_t(u) = u - t(A(u) + B_\varepsilon(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(u)). \quad (۶)$$

گزاره ۱. عدد حقیقی  $t$  چنان یافت می‌شود که نگاشت  $S_t$  تعریف شده در (۶) انقباضی باشد.

اثبات. برای هر  $u, v \in X$  داریم:

$$\begin{aligned} \|S_t(u) - S_t(v)\|^2 &= \langle S_t(u) - S_t(v), S_t(u) - S_t(v) \rangle \\ &= \|u - v\|^2 - 2t \langle A(u) - A(v), u - v \rangle + 2t \langle E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v \rangle \\ &\quad - 2t \langle B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v \rangle \\ &\quad - 2t^2 \langle A(u) - A(v), E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v) \rangle \\ &\quad + 2t^2 \langle A(u) - A(v), B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v) \rangle \\ &\quad - 2t^2 \langle E(u) - E(v), B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v) \rangle \\ &\quad + t^2 \|A(u) - A(v)\|^2 + t^2 \|E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v)\|^2 \\ &\quad + t^2 \|B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v)\|^2; \end{aligned}$$

و علاوه بر این داریم،

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = a(u - v, u - v) = \|u - v\|^2.$$

با استفاده از نامساوی هولدر، خاصیت (V) و نابرابری (۳) داریم،

$$\begin{aligned} \langle E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v \rangle &= \lambda \int_{\Omega} |u - v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} (f(x, u) - f(x, v))(u - v) dx \\ &\leq \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)} \|u - v\|^2; \end{aligned}$$

که  $h^+ = \text{esssup}_{x \in \Omega} (h(x))$

هم‌چنین با توجه به خاصیت (I) می‌توان نتیجه گرفت،

$$\langle B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v \rangle = \varepsilon \int_{\Omega} (\varphi(x, \nabla u) \nabla u - \varphi(x, \nabla v) \nabla v) (\nabla u - \nabla v) dx \geq 0.$$

از نامساوی (4) داریم،

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx$$

و از این رو،  $\|\Delta u\|_2 \leq \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 - c}} \|u\|$ ؛ حال از این نتیجه و نامساوی (۴) تخمین زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \|A(u) - A(v)\| &= \sup_{\|w\| \leq 1} |a(u - v, w)| \leq \|\Delta u - \Delta v\|_2 \|\Delta w\|_2 + c \|\nabla u - \nabla v\|_2 \|\nabla w\|_2 \\ &\leq \left( \frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c} \right) \|u - v\| \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\|E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v)\| = \sup_{\|w\| \leq 1} |e_{\lambda,\varepsilon}(u, w) - e_{\lambda,\varepsilon}(v, w)| \leq (\lambda + \varepsilon h^+) \|u - v\|_2 \|w\|_2$$

$$\leq \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)} \|u - v\|,$$

و علاوه بر این بادر نظر داشتن فرض (II) داریم:

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v)\| &= \sup_{\|w\| \leq 1} \int_{\Omega} |\varphi(x, \nabla u) \nabla u - \varphi(x, \nabla v) \nabla v| |\nabla w| dx \\ &\leq \varepsilon \|\varphi(x, \nabla u) \nabla u - \varphi(x, \nabla v) \nabla v\|_2 \|\nabla w\|_2 \\ &= \varepsilon \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \varphi(x, \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \|\nabla w\|_2 \\ &\leq \varepsilon \kappa \sqrt{N} \|\nabla u - \nabla v\|_2 \leq \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{N}}{\mu_1 - c} \|u - v\|. \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\|S_t(u) - S_t(v)\|^2 \leq (1 - tp_{\lambda, \varepsilon} + t^2 q_{\lambda, \varepsilon}) \|u - v\|^2 := \Theta_{\lambda, \varepsilon}(t) \|u - v\|^2; \quad (V)$$

$$\begin{aligned} \text{که در آن } p_{\lambda, \varepsilon} &= 2 \left( 1 + \frac{\lambda + \varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1 - c)} \right) \text{ و} \\ q_{\lambda, \varepsilon} &= 2(\mu_1 + c) \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2} + 2(\mu_1 + c) \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{N}}{(\mu_1 - c)^2} + 2 \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2} \varepsilon \kappa \sqrt{N} + \left( \frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c} \right)^2 \\ &\quad + \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)^2}{\mu_1^2(\mu_1 - c)^2} + \left( \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{N}}{\mu_1 - c} \right)^2. \end{aligned}$$

از آن جاکه  $\Theta_{\lambda, \varepsilon}(0) = \Theta_{\lambda, \varepsilon}\left(\frac{p_{\lambda, \varepsilon}}{q_{\lambda, \varepsilon}}\right) = 1$  می‌توان  $t_0$  را چنان یافت که  $\Theta_{\lambda, \varepsilon}(t_0) < 1$  و به‌ازای این مقدار از  $t$ ،  $S_t$  انقباضی باشد.

**قضیه ۱.** به‌ازای هر  $0 < \varepsilon, \lambda$  مسئله  $(P_1)$  دارای جواب ضعیف یکتا و نابدیهی است.

**اثبات.** طبق گزاره قبل  $t_0$  را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که  $S_{t_0}$  تعریف شده در (۶) انقباضی باشد. از این رو، طبق قضیه نقطه ثابت باناخ، دارای نقطه ثابت یکتا مثل  $u_0$  است یعنی  $S_{t_0}(u_0) = u_0$  و بنا بر این

$$A(u_0) + B_\varepsilon(u_0) = E_{\lambda, \varepsilon}(u_0).$$

در نتیجه برای هر  $v \in X$  داریم:  $\langle A(u_0), v \rangle + \langle B_\varepsilon(u_0), v \rangle = \langle E_{\lambda, \varepsilon}(u_0), v \rangle$  که معادل با رابطه (۵) بوده و لذا  $u_0$  جواب ضعیف مسئله  $(P_1)$  خواهد شد و با توجه به فرض (V) در حالتی که  $0 \neq \varepsilon$  این جواب غیربدیهی است.

**تبصره ۱.** باید توجه داشت که این نقطه ثابت مستقل از  $t$  است که به‌ازای آن  $S_t$  انقباضی است. در واقع اگر  $t_1$  و  $t_2$  پارامترهایی باشند که  $S_{t_1}$  و  $S_{t_2}$  دارای به‌ترتیب نقاط ثابت  $u_1$  و  $u_2$  باشند یعنی  $S_{t_1}(u_1) = u_1$  و  $S_{t_2}(u_2) = u_2$  آن‌گاه  $A(u_1) + B_\varepsilon(u_1) - E_{\lambda, \varepsilon}(u_1) = 0$  و از این رو،

$$S_{t_2}(u_1) = u_1 + t_2 \left( A(u_1) + B_\varepsilon(u_1) - E_{\lambda, \varepsilon}(u_1) \right) = u_1.$$

که نشان می‌دهد  $u_1$  نقطه ثابت  $S_{t_2}$  نیز هست که با یکتایی نقطه ثابت  $S_{t_2}$  در تناقض است مگر این‌که  $u_1 = u_2$ .

چنان که مشاهده شد، به‌ازای هر  $0 < \varepsilon$ ، تمام اعداد بازه  $(0, +\infty)$  مقادیر ویژه مسئله  $(P_1)$  محسوب می‌شوند و این در حالی است که اگر  $\varepsilon = 0$  کوچک‌ترین مقدار ویژه عبارت است از  $\mu_1(\mu_1 - c)$ . در واقع اگر  $\varepsilon = 0$  تمام مراحل گزاره ۱ باز هم برقرار است، اما در این حالت نمی‌توان در پایان اثبات قضیه ۱ نتیجه گرفت که این جواب نابدیهی است. **مثال ۳.** معادله  $\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}((1 + |\nabla u|)^{-\frac{1}{2}} \nabla u) = \lambda u + \varepsilon \cos u$  در حالت  $\varepsilon \neq 0$  با شرایط مرزی ناویر، دارای جواب ضعیف یکتا نابدیهی است. صحت خواص (I) و (II) در مورد تابع  $\varphi$  در نظر گرفته شده در این مثال، در مثال‌های ۱ و ۲ از بخش ۱ به اثبات رسید.

**قضیه ۲.** به‌ازای هر  $0 < \varepsilon, \lambda$  مسئله  $(P_2)$  دارای جواب ضعیف یکتا و نابدیهی است. **اثبات.** در روند بررسی این قضیه، فضای  $X$  را فضای هیلبرت  $H_0^1(\Omega)$  با نرم  $\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)^{1/2}$  در نظر می‌گیریم و با تعریف نگاشت‌های  $b_{\varepsilon}$  و  $e_{\lambda, \varepsilon}$  همانند قبل و قرار دادن  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$  نگاشت  $S_t$  با ضابطه (۶) را تعریف می‌کنیم. مشابه آن‌چه در اثبات گزاره ۱، نشان داده شد؛ ثابت می‌کنیم به‌ازای یک  $t$  مناسب  $S_t$  انقباضی خواهد شد. برای این منظور با توجه به ملاحظات این قضیه داریم،  $\|A(u) - A(v)\| \leq \|u - v\|$ ،

$$\langle E_{\lambda, \varepsilon}(u) - E_{\lambda, \varepsilon}(v), u - v \rangle \leq (\lambda + \varepsilon h^+) \|u - v\|$$

$$\begin{aligned} & \text{و علاوه بر این، } \|B_{\varepsilon}(u) - B_{\varepsilon}(v)\| \leq \varepsilon \kappa \sqrt{N} \|u - v\|, \text{ بنابراین در این حالت داریم،} \\ \|S(u) - S(v)\|^2 & \leq (1 - 2t(\lambda + \varepsilon h^+) + t^2(2(\lambda + \varepsilon h^+ + \varepsilon \kappa \sqrt{N}) + 1 + (\lambda + \varepsilon h^+ + \varepsilon \kappa \sqrt{N})^2)) \\ & := (1 - tp_{\lambda, \varepsilon} + t^2 q_{\lambda, \varepsilon}) \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

که استدلالی مشابه با قضیه ۱، اثبات را تمام می‌کند.

**تبصره ۲.** اگر در مسائل  $(P_1)$  و  $(P_2)$  به‌جای جمله  $\lambda u$  جمله  $\lambda g(u)$  قرار گیرد که  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  نگاشتی با خاصیت لیپشیتس است، تمام استدلال و تخمین‌های صورت گرفته در اثبات قضایا و گزاره‌های قبل، تنها با تغییر  $\lambda$  به  $\kappa_0 \lambda$  برقرار خواهد بود؛ که در آن  $\kappa_0$  ثابت لیپشیتس تابع  $g$  است؛ یعنی،  $|g(u) - g(v)| \leq \kappa_0 |u - v|$ . **قضیه ۳.** مفروضات (III)، (IV) و (V) را در نظر بگیرید. علاوه بر این فرض کنید:

$$g: X := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

تابعی لیپشیتس با ثابت لیپشیتس  $\kappa_0$  باشد، در این صورت اسکالره‌های  $\lambda^*$  و  $\mu$  چنان موجودند که به‌ازای هر  $\lambda \geq \lambda^*$  و  $\varepsilon > 0$ ، مسئله  $(P_3)$  دارای جواب نابدیهی باشد که،

$$(P_3): \begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x, u) + \mu u; & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0; & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**اثبات.** به‌ازای اسکالر غیرصفر  $t$ ، نگاشت  $T_t: X \rightarrow X$  را با ضابطه  $T_t(u) = S_t(u) + u$  در نظر بگیرید که در آن  $S_t$  با ضابطه (۶) معرفی شده است. در این صورت،

$$\|T_t(u) - T_t(v)\|^2 = \|S_t(u) - S_t(v)\|^2 + \|u - v\|^2 + 2 \langle S(u) - S(v), u - v \rangle. \quad (۸)$$

از طرفی داریم،

$$\begin{aligned} \langle S_t(u) - S_t(v), u - v \rangle &= \|u - v\|^2 - t \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \\ &\quad - t \langle B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v \rangle \\ &\quad + t \langle E_{\lambda, \varepsilon}(u) - E_{\lambda, \varepsilon}(v), u - v \rangle. \end{aligned}$$

که با توجه به محاسبات انجام شده در گزاره ۱ و با در نظر داشتن تبصره ۲ داریم:

$$\langle S_t(u) - S_t(v), u - v \rangle \leq \left(1 - t + t \frac{\kappa_0 \lambda + \varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1 - c)}\right) \|u - v\|^2. \quad (۹)$$

لذا با اعمال تخمین‌های (۷) و (۹) در (۸) به دست می‌آوریم،

$$\|T_t(u) - T_t(v)\|^2 \leq 4 - 4tp'_{\lambda, \varepsilon} + t^2 q'_{\lambda, \varepsilon} := \sigma_{\lambda, \varepsilon}(t)$$

$$\text{که } p'_{\lambda, \varepsilon} = \frac{\kappa_0 \lambda + \varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1 - c)} \text{ و}$$

$$\begin{aligned} q'_{\lambda, \varepsilon} &= 2(\mu_1 + c) \frac{(\kappa_0 \lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2} + 2(\mu_1 + c) \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{N}}{(\mu_1 - c)^2} + 2 \frac{(\kappa_0 \lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2} \varepsilon \kappa \sqrt{N} + \left(\frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(\kappa_0 \lambda + \varepsilon h^+)^2}{\mu_1^2(\mu_1 - c)^2} + \left(\frac{\varepsilon \kappa \sqrt{N}}{\mu_1 - c}\right)^2. \end{aligned}$$

با توجه به این که

$$\min_t \sigma_{\lambda, \varepsilon}(t) = \sigma_{\lambda, \varepsilon} \left( \frac{2p'_{\lambda, \varepsilon}}{q'_{\lambda, \varepsilon}} \right) = 4 \left( 1 - \frac{p'_{\lambda, \varepsilon}}{q'_{\lambda, \varepsilon}} \right)^2;$$

از این رو،  $\min_t \sigma_{\lambda, \varepsilon}(t) < 1$  اگر و فقط اگر  $\frac{3}{4} < \frac{p'_{\lambda, \varepsilon}}{q'_{\lambda, \varepsilon}}$  و از آن جاکه  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{p'_{\lambda, \varepsilon}}{q'_{\lambda, \varepsilon}} = 1$  پس به ازای  $\lambda$ های به قدر

$$\frac{3}{4} < \frac{p'_{\lambda, \varepsilon}}{q'_{\lambda, \varepsilon}} \text{ داریم } (\lambda \geq \lambda^*)$$

در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که  $t_0 > 0$  ای موجود است که  $0 < \sigma_{\lambda, \varepsilon}(t_0) < 1$  و بنا براین به ازای چنین  $t_0$  ای، طبق قضیه نقطه ثابت باناخ نگاشت  $T_{t_0}$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $u_0$  خواهد بود؛ یعنی  $T_{t_0}(u_0) = u_0$  و لذا  $S_{t_0}(u_0) = 0$ . بنا براین طبق تعریف نگاشت  $S_t$  داریم،

$$A(u_0) + B_\varepsilon(u_0) - E_{\lambda, \varepsilon}(u_0) = \frac{1}{t_0} u_0.$$

در نتیجه به ازای هر  $v \in X$  داریم،

$$\langle A(u_0), v \rangle + \langle B_\varepsilon(u_0), v \rangle = \langle E_{\lambda, \varepsilon}(u_0), v \rangle + \frac{1}{t_0} \langle u_0, v \rangle$$

که معادل با وجود جواب  $(P_3)$  به ازای  $\mu := \frac{1}{t_0}$  است.

**مثال ۴.** می‌توان ثابت کرد اسکالرهایی  $\lambda^*$  و  $\mu$  چنان موجودند که به ازای هر  $\lambda \geq \lambda^*$  و  $\varepsilon > 0$ ، معادله مرتبه چهار زیر با شرایط مرزی ناویر دارای جواب غیربدیهی باشد.

$$\Delta^2 u + \varepsilon \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|}} \right) = \lambda \sin u + \varepsilon \cos u + \mu u$$

**تبصره ۳.** نتیجه مشابه قضیه ۳ برای معادله مرتبه دوم

$$\Delta u + \varepsilon \operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u) \nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x, u) + \rho u$$

با شرایط دیریکله و با مفروضات مشابه آنچه در قضیه ۳ بیان شد، در فضای  $X = H_0^1(\Omega)$  قابل اثبات است.

### منابع

1. Drábek, Pavel, Jaroslav Milota, "Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations", Springer Science & Business Media (2013).
2. Rabinowitz, Paul H., ed. "Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations", No. 65. American Mathematical Soc. (1986).
3. Agarwal, Ravi P., Ghaemi M. B., Saiedinezhad S., "The Nehari manifold for the degenerate p-Laplacian quasilinear elliptic equations", *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 20.1 (2010) 37.
4. Bozhkov, Yuri, Enzo Mitidieri, "Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method", *Journal of Differential Equations* 190.1 (2003) 239-267.
5. De Nápoli, Pablo, María Cristina Mariani, "Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 54.7 (2003) 1205-1219.
6. Ouyang, Tiancheng, "On the positive solutions of semilinear equations  $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$  on the compact manifolds", *Transactions of the American Mathematical Society* 331.2 (1992) 503-527.
7. Lazer A. C., McKenna P. J., "Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis", *Siam Review* 32.4 (1990) 537-578.
8. Micheletti, Anna Maria, Angela Pistoia, "Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 31.7 (1998) 895-908.
9. Pu, Yang, Xing-Ping Wu, Chun-Lei Tang, "Fourth-order Navier boundary value problem with combined nonlinearities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 398.2 (2013) 798-813.
10. Xu, Jiafa, Wei Dong, Donal O'Regan, "Existence of weak solutions for a fourth-order Navier boundary value problem", *Applied Mathematics Letters* 37 (2014) 61-66.
11. Zeidler E., "Applied Functional Analysis: Applications in Mathematical Physics", Springer-Verlag, New York (1995).

12. Costea N., Mihailescu M., "On an eigenvalue problem involving variable exponent growth conditions", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.9 (2009) 4271-4278.
13. Brezis H., "Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications", Masson, Paris (1992).
14. Gilbarg D., Trudinger N., "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1983).
15. Micheletti A. M., Pistoia A., "Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem", *Nonlinear Anal.* 31 (1998) 895-908.
16. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: III: Variational Methods and Optimization", Springer Science & Business Media (2013).
17. Attouch, Hedy, Giuseppe Buttazzo, Gérard Michaille, "Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization", Society for Industrial and Applied Mathematics (2014).
18. Evans, Lawrence C., "Partial differential equations, volume 19 of.", *Graduate Studies in Mathematics* (1998) 22.