گراف پوچساز گروه‌های آبلی

سعید صفائیان* و ثریا برزگر
دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی

دریافت: ۹۸/۰۴/۱۵ پذیرش: ۹۸/۱۱/۱۳

چکیده

در مرجع [۱۹] مفهوم گراف پوچساز ایده‌آل به مدول‌ها تعمیم داده شده است. از آن‌جایی که گروه‌های آبلی دقیقاً $\mathbb{Z}$- مدول‌ها هستند، در این مقاله گراف پوچساز $\mathbb{Z}$- مدول‌ها (گروه‌های آبلی) بررسی خواهند شد. گراف پوچساز یک گروه آبلی مانند M را با نماد AG(M) نمایش می‌دهیم. در این راستا نشان خواهیم داد، گراف AG(M) تهی است اگر و تنها اگر $M\cong\mathbb{Z}$ یا M یک گروه آبلی ساده باشد. علاوه بر این تمام گروه‌های آبلی متناهی- تولید شده که گراف پوچساز آنها کامل، دوبخشی یا دوبخشی کامل هستند، مشخص خواهند شد. همچنین در مرجع [۱۱] نویسندگان گراف مقسوم‌علیه صفرگروه‌های آبلی را مطرح و مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله ما الگوریتمی بر اساس نرم‌افزار میپل ارائه خواهیم داد که گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف پوچساز یک گروه آبلی دوری را هم‌زمان رسم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: مدول، گراف زیر مدول پوچساز، گراف‌های کامل، گراف‌های کامل دوبخشی.

۱. مقدمه

در سرتاسر این مقاله حلقه‌ها جابجایی و یکدار و مدول‌ها، مدول‌ها، راست یکانی در نظر گرفته می‌شوند. برای یک R-مدول M و زیر مجموعهٔ X از M، $ann(X)=\{r\in R|\ Xr=0\}$ علاوه بر این، برای هر زیرمدول N از M $(N:M)=\{r\in R|\ Mr\subseteq N\}$ گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقهٔ جابه‌جایی مانند R، که با نماد $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، برای اولین بار توسط بک در سال ۱۹۸۸در مرجع [۱۲] معرفی شد. پس از آن محققان زیادی سعی کردند که ارتباط بین خواص جبری حلقهٔ R و خواص گرافی $\Gamma(R)$ مورد بررسی قرار دهند. در مرجع [۲۰]، نویسندگان به یک R- مدول مانند M گرافی را نسبت دادند که دقیقاً تعمیم گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ها است. این گراف با نماد $\Gamma(M)$ نمایش داده شده است.

در مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴]، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی به گراف پوچساز ایده‌ال حلقه‌های جابه‌جایی تعمیم داده شده است. (دو ایدال I و J مجاور هستند در صورتی که IJ=0). در [۱۹]، نویسنده، یک گراف را به R- مدول M نسبت می‌دهد که با $AG(M_R)$ نمایش داده می‌شود. در واقع گراف $AG(M_R)$ تعمیمی از گراف پوچساز ایده‌ال حلقه‌های جابه‌جایی است. در آن مقاله، گراف $AG(M_R)$ به صورت زیر تعریف شده است: فرض کنید M یک R- مدول و N و K دو زیرمدول از M باشند. گوییم، $N*K=0$ در صورتی که $N(K:M)=0$ یا $K(N:M)=0$. زیرمدول N را یک زیرمدول پوچساز نامیم هرگاه زیرمدول ناصفری مانند K از M موجود باشد به طوری که $N*K=0$. مجموعهٔ تمام زیرمدول‌های پوچساز M را با A(M) نمایش می‌دهیم و منظور از $A^*(M)$، عبارت است از $A(M)\setminus\{0\}$. همچنین S(M) را مجموعهٔ تمام زیرمدول‌های M در نظر می‌گیریم. گراف پوچساز یک R- مدول M، یک گراف غیرجهت‌دار است با مجموعه گره‌های $A^*(M)$ و دو عنصر N و K متعلق به $A^*(M)$ را مجاور گوییم، هرگاه $N*K=0$ برای جزئیات

*نویسندهٔ مسئول safaeeyan@yu.ac.ir

بیشتر مرجع [۱۹] را ببینید. یک دور از طول n در G یک مسیر به فرم x_1-x_2-...-x_n-x_1 است، جایی که برای $i\neq j$، $x_i\neq x_j$. کمر G را با gr(G) نمایش می‌دهیم که عبارت است از طول کوتاه‌ترین دور در G، در صورتی که G شامل یک دور باشد در غیر این صورت $gr(G)=\infty$. یک گراف کامل است در صورتی که هر دو گرهٔ متمایز آن مجاور باشند. یک گراف کامل با n گره را با K_n نمایش می‌دهیم. یک زیر گراف کامل، زیرگرافی است که به عنوان گراف کامل باشد. گراف G را دو بخشی گوییم، در صورتی که مجموعه گره‌های G اجتماع دو زیرمجموعهٔ متمایز غیر تهی V_1 و V_2 باشد، به طوری که هیچ عضوی از V_1 و V_2 به ترتیب با هیچ عضو دیگری از V_1 و V_2 مجاور نباشد. فرض کنید $K_{m,n}$ ، نمایش گراف کامل دو بخشی روی زیر مجموعه‌های متمایز غیر تهی V_1 و V_2 باشد به طوری که $|V_2| = m$ و $|V_1| = n$ (در این‌جا m و n می‌توانند اعداد اصلی نامتناهی باشند.) گراف $K_{1,n}$ را یک گراف ستاره می‌نامیم. اگر M یک گروه آبلی باشد برای هر $x \in M$ مرتبهٔ x را با نماد $\mathbf{o(x)}$ نمایش می‌دهیم.

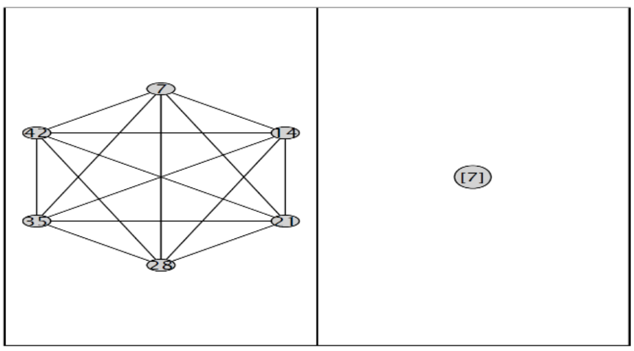
اصطلاحات بیان نشده و تمام نتایج پایه‌ای روی حلقه‌ها، مدول‌ها و گراف‌ها که در نتایج استفاده شده‌اند را می‌توان در مراجع [۶]، [۹]، [۱۵]، [۱۶] و [۲۰] یافت. در دهه‌های اخیر گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی توسط نویسنده‌هایی مورد مطالعه قرار گرفتند. برای مثال [۲-۵]، [۷]، [۸] و [۱۷] را ببینید. در [۱۱] و [۲۰] نویسندگان دو گراف متفاوت را به یک R- مدول M نسبت می‌دهد و گراف مقسوم‌علیه صفر گروه‌های آبلی را در مطالعه می‌کند.

۲. گراف پوچساز گروه‌های آبلی

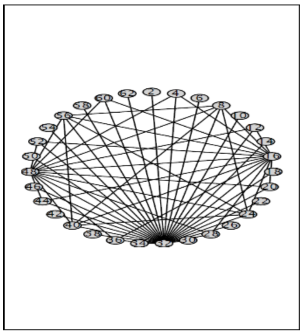
فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. در این بخش گراف پوچساز منتسب به M را که با نماد AG(M) نمایش داده می‌شود را مجدد تعریف کرده و شرط لازم و کافی برای این‌که AG(M) یک گراف تهی، یا یک گراف متناهی باشد را با استفاده از خواص گروه‌های آبلی به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. زیرگروه N از M را پوچساز می‌نامیم، هرگاه زیر گروه نا صفر K از M موجود باشد به طوری که $N*K=0$. مجموعهٔ تمام زیرگروه‌های پوچساز M را با نماد A(M) نمایش داده و $A^*(M)=A(M)\setminus\{0\}$ در نظر گرفته می‌شود. گراف پوچساز M را با نماد AG(M) نمایش می‌دهیم. AG(M) گرافی ساده و بدون طوق با مجموعه گره‌های $A^*(M)$ است و دو گره متمایز N و K در $A^*(M)$ را مجاور نامیم هرگاه $N*K=0$.

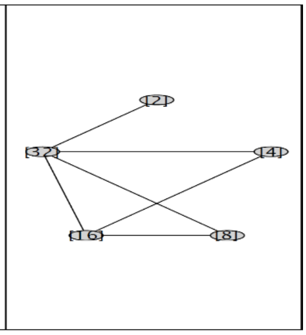
مثال ۲.۲: در شکل‌های زیر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(M)$ و گراف پوچساز AG(M) چند گروه آبلی رسم شده‌اند.



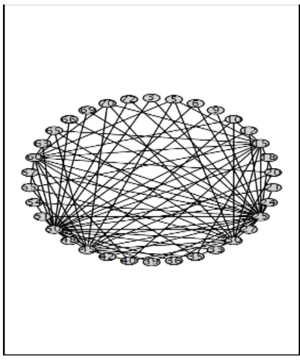
$\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ $AG(\mathbb{Z}_{49})$



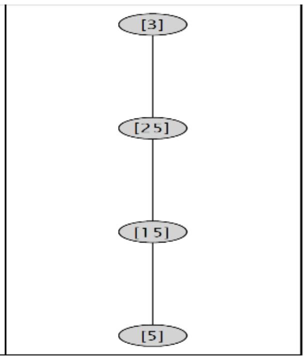
$\Gamma(\mathbb{Z}_{64})$



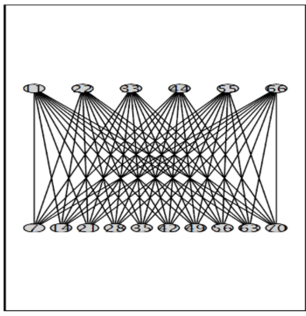
$AG(\mathbb{Z}_{64})$



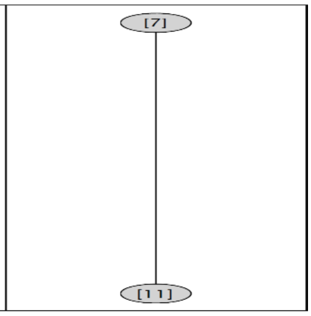
$\Gamma(\mathbb{Z}_{75})$



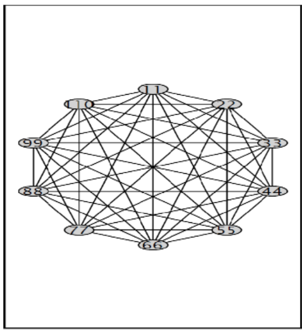
$AG(\mathbb{Z}_{75})$



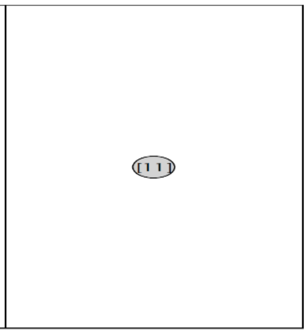
$\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$



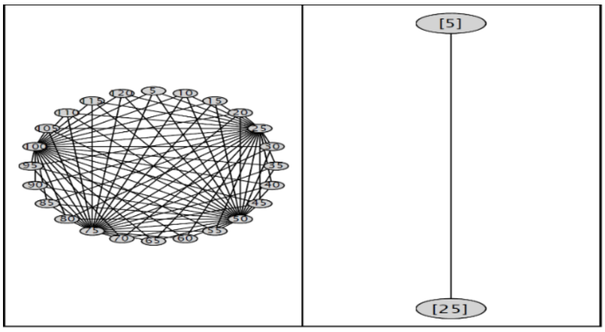
$AG(\mathbb{Z}_{77})$



$\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$



$AG(\mathbb{Z}_{121})$



$\Gamma(\mathbb{Z}_{125})$ $AG(\mathbb{Z}_{125})$

نکته: به راحتی می‌توان نشان داد که اگر M و N دو گروه آبلی یک‌ریخت باشند، آن‌گاه AG(M) و AG(N) نیز با هم یک‌ریخت هستند یا به عبارت دیگر تابعی دوسویی مانند $f{:}A^*(M)\rightarrow A^*(N)$ موجود است به طوری که اگر B_1 و B_2 دو گره مجاور در AG(M) باشند، آن‌گاه $f(B_1)$ و $f(B_2)$ دو گره مجاور در AG(N) هستند.

گزاره ۲.۳. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. در این صورت $AG(M)=\emptyset$ اگر و تنها اگر $M\cong\mathbb{Z}$ یا برای عدد اول p، $M\cong\mathbb{Z}_p$.

اثبات: طبق گزاره ۲.۵ از مرجع [۱۹]، برای یک گروه آبلی M ، گراف AG(M) تهی است اگر و تنها اگر ann(M) ایده‌ال اول $\mathbb{Z}$ و $M\notin A^*(M)$. دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: فرض کنید $ann(M)=\{0\}$. در این صورت ابتدا نشان می‌دهیم که مرتبهٔ هر عضو غیر صفر M نامتناهی است. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $0\neq a\in M$ و برای عدد صحیح مثبت n، داریم $o(a)=n$. قرار دهید $A=\langle a\rangle$. طبق فرض، (A:M) ایده‌ال غیر صفر $\mathbb{Z}$ است. فرض کنید $(A:M)=k\mathbb{Z}$. بنابراین $Mk\subseteq A$ و از این رو برای هر $x\in M$، $xkn=|A|.xk=0$. بنابراین $kn\in ann(M)$. این یک تناقض است. بنابراین برای هر عضو غیر صفر $t\in\mathbb{Z}$، $Mt\cong M$. اکنون نشان می‌دهیم که M یک گروه دوری نامتناهی است. برای این منظور، فرض کنید $0\neq g\in M$. قرار دهید $G=\langle g\rangle$. با استفاده از فرض برای عدد صحیح غیر صفر t، داریم $(G:M)=t\mathbb{Z}$. چون $ann(M)=\{0\}$، پس Mt یک زیر گروه غیر صفر از گروه دوری نامتناهی G است. بنابراین Mt و از این رو M گروه‌های دوری نامتناهی هستند.

حالت دوم: فرض کنید به ازای عدد اولی مانند $p\in\mathbb{Z}$، $ann(M)=p\mathbb{Z}$. چون $p\mathbb{Z}$ ایده‌ال ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است، برای هر عضو غیر صفر $x\in\mathbb{Z}$، $ann(x)=ann(\langle x\rangle)=p\mathbb{Z}$. بنابراین $\langle x\rangle=\mathbb{Z}_p$ پس یک زیر گروه سادهٔ M است. این نتیجه می‌دهد که M یک $\mathbb{Z}$ - نیم‌ساده است. اگر N یک زیر گروه غیر بدیهی از M باشد، یک زیر گروه K از M وجود دارد به طوری که $M=N\oplus K$. از این رو طبق گزارهٔ ۲.۶ از مرجع [۱۹]، N و K دو گرهٔ مجاور در AG(M) هستند که یک تناقض است. بنابراین M یک گروه ساده است که $ann(M)=p\mathbb{Z}$، از این رو $M\cong\mathbb{Z}_p$. ■

یادآوری: گروه آبلی M را کاهش یافته می‌گوییم در صورتی که زیرگروه بخش‌پذیر نداشته باشد.

نتیجه ۲.۴. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد به طوری که $AG(M)=\phi$. در این صورت M یک گروه کاهش یافته است.

اثبات: طبق گزارهٔ قبل برهان واضح است.■

گزاره ۲.۵. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد به طوری که $AG(M)\neq\phi$. در این صورت M در شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی زیرگروه‌هایش صدق می‌کند اگر و تنها اگر AG(M) در شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی گره‌هایش صدق کند.

اثبات: طبق گزارهٔ ۲.۵ از مرجع [۱۹]، گراف AG(M) غیر تهی است اگر و تنها اگر یا ann(M) ایده‌ال اول R نباشد یا $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$. (جایی که S(M) مجموعهٔ تمام زیرگروه‌های M است) اگر $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$ برهان کامل است. اکنون فرض کنید برای عدد غیر اول $n\in\mathbb{Z}$ داریم $ann(M)=n\mathbb{Z}$. در این‌صورت $a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{۱\}$ وجود دارند به طوری که n=ab. واضح است که Ma و Mb زیرگروه‌های غیر صفر M هستند به طوری که $Ma(Mb:M)=\{0\}$ پس $Ma\in A^*(M)$. با استفاده از فرض، Ma در شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی زیرگروه‌هایش صدق می‌کند. از طرف دیگر نگاشت $f: M\to Ma$ با ضابطه، f(m)=ma، برای هر $m\in M$، یک همریختی پوشای گروهی است. بنابراین $M/\ker f\cong Ma$ و از این رو $M/\ker f$ در شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی زیرگروه‌هایش صدق می‌کند. اگر $\ker f=\{0\}$، آن‌گاه $M\cong Ma$ و از این رو ann(M)=ann(Ma). پس $b\in ann(Ma)=ann(M)$، که یک تناقض است. می‌دانیم که $\ker f=\{x\in M \mid xa=0\}$ یک زیر گروه از M است. از آن‌جا که $Ma(\ker f:M)=M(\ker f:M)a\subseteq(\ker f)a=\{0\}$, پس $\ker f\in A^*(M)$. بنابراین هم $\ker f$ و هم $M/\ker f$ در شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی زیر گروه هایشان صدق می‌کنند. بنابراین M نیز چنین است.■

یادآوری: یک R- مدول M را که دارای سری ترکیب می‌باشد، یک R- مدول از طول متناهی می‌نامیم. می‌دانیم که یک R- مدول با طول متناهی است اگر و تنها اگر هم در شرط زنجیر صعودی و هم در شرط زنجیر نزولی روی زیر مدول‌هایش صدق کند. از آن‌جایی که گروه‌های آبلی ساده، دقیقاً به ازای عدد اولی مانند، با $\mathbb{Z}_p$ یک‌ریخت هستند، به وضوح گروه‌های آبلی با طول متناهی، خود گروه‌های متناهی هستند.

قضیه ۲.۶. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد به طوری که $AG(M)\neq\phi$. در این صورت موارد زیر معادل هستند.

۱. M یک گروه متناهی است.

۲. M تعداد متناهی زیر گروه دارد.

۳. گراف AG(M) یک گراف متناهی است.

اثبات: ۲→۱ و ۳→۲ واضح هستند.

۱→۳: اگر AG(M) یک گراف متناهی باشد، آن‌گاه AG(M) هم در شرط زنجیر صعودی و هم در شرط زنجیر نزولی روی گروه‌هایش صدق می‌کند. طبق گزارهٔ ۲.۵، M یک گروه آبلی با طول متناهی است. بنابراین M یک گروه متناهی است.■

۳. گراف‌های کامل

در این بخش، گراف پوچ‌ساز دو دسته مهم از گروه‌های آبلی، یعنی گروه‌های آبلی نیم‌ساده همگن(هر مجموع مستقیم از گروه‌های آبلی ساده‌ی یکریخت) و گروه‌های آبلی بخش‌پذیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در انتها مشخص می‌کنیم شرط لازم و کافی برای اینکه گراف پوچساز یک گروه آبلی مانند M کامل باشد آن است که M در یکی از این دو دسته از گروه‌های آبلی قرار گیرد.

گزاره ۳.۱. فرض کنید p عددی اول و I یک مجموعهٔ اندیس‌گزار با $|I|\geq ۲$ باشد. قرار دهید $M=\oplus_I \mathbb{Z}_p$. در این صورت AG(M) یک گراف کامل است و $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$.

اثبات: واضح است که برای هر زیر گروه غیر بدیهی سره N از M، $p\mathbb{Z}\subseteq(N:M)\neq\mathbb{Z}$ و از آن‌جا که $p\mathbb{Z}$ ایده‌ال ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است، پس $p\mathbb{Z}=(N:M)$. با توجه به این‌که M یک $\mathbb{Z}$- مدول نیم‌ساده است، طبق لم ۲.۹ از مرجع [۶]، برای هر

زیرگروه K از M، یک زیرمجموعهٔ J از I وجود دارد به طوری که $K \cong \bigoplus_J \mathbb{Z}_p$. فرض کنید N یک زیرگروه سره از M باشد، در این صورت برای هر زیرگروه K از M داریم، $K(N:M)=K\,p\mathbb{Z}=\{0\}$ و در نتیجه $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$. فرض کنید A و B دو زیرگروه متمایز غیر صفر از M با شند به طوری که A یا B سره باشند. پس یا $(A:M)=p\mathbb{Z}$ یا $(B:M)=p\mathbb{Z}$ و از این‌رو $A*B=0$.■

لم زیر یک دسته‌بندی ساده و جدید برای گروه‌های بخش‌پذیر است.

لم ۳.۲. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. برای هر زیرگروه سرهٔ N از M، $(N:M)=0$.

۲. M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است.

اثبات: ۲←۱: ابتدا نشان می‌دهیم، برای هر عدد صحیح مثبت n، $Mn=M$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد به طوری که $Mn\neq M$. اگر $Mn=\{0\}$، بنابراین $n\in(\{0\}:M)=\{0\}$. این تناقض است. بنابراین $Mn\neq 0$. از طرف دیگر $n\in(Mn:M)$. بنابر فرض $(Mn:M)=\{0\}$ و در نتیجه $n=0$. این یک تناقض است. بنابراین برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $Mn=M$، این بدان معناست که M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است.

۱←۲: فرض کنید M یک گروه بخش‌پذیر، K یک زیرگروه سره از M و $t\in(K:M)$ باشد. اگر t غیر صفر باشد، آن‌گاه $M=Mt\subseteq K$، که یک تناقض است. بنابراین $(K:M)=\{0\}$.■

نتیجه۳.۳. فرض کنید M یک گروه بخش‌پذیر باشد. در این صورت AG(M) یک گراف کامل است و $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$.

اثبات: با استفاده از لم بالا، برای هر زیرگروه N از M، $(N:M)=0$. بنابراین برای هر زیرگروه N و K داریم، $N*K=0$.■

گزاره ۳.۴. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. به ازای عدد اولی مانند p، $M\cong\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

۲. هر زیرگروه سره از M متناهی است و هیچ کران بالایی برای مرتبهٔ تمام عناصر M موجود نیست.

اثبات: ۲←۱: با استفاده از خواص $\mathbb{Z}_{p^\infty}$، واضح است.

۱←۲: ادعا می‌کنیم که برای هر زیر گروه سره N از M، $(N:M)=\{0\}$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید N یک زیرگروه سره از M باشد به طوری که $0\neq t\in(N:M)$. در این صورت برای هر $m\in M$، داریم $mt\in N$ و در نتیجه $m\,t\,|N|=0$. از این‌رو برای هر $m\in M$ داریم $O(m)\,|\,t\,|N|$. بنابراین $t\,|N|$ یک کران بالا برای مرتبهٔ عناصر است. این با فرض در تناقض است. بنابراین ادعا ثابت شد. اکنون طبق لم ۳.۲ ، M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است. بنابراین برای مجموعهٔ اندیس‌گزار I و زیرمجموعهٔ P از اعداد اول داریم $M\cong(\bigoplus_I\mathbb{Q})\oplus(\bigoplus_{p\in P}\mathbb{Z}_{p^\infty})$. اما طبق فرض، هر زیر گروه سره از M متناهی است از این رو $I=\phi$ و به ازای عدد اولی مانند p، $P=\{p\}$. بنابراین $M\cong\mathbb{Z}_{p^\infty}$. ■

در ادامهٔ بخش، گروه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف‌های پوچ‌ساز آنها کامل است.

قضیه ۳.۵: فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. گراف AG(M) یک گراف کامل با مجموعه گره‌های $S(M)\setminus\{0\}$ است.

۲. یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف. M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است.

ب. عدد اول p و مجموعهٔ اندیس‌گزار I موجود است به طوری که $M\cong\bigoplus_I \mathbb{Z}_p$.

اثبات: ۲←۱: فرض کنید M بخش‌پذیر نباشد. بنا بر لم ۳.۲، زیرگروه سره‌ای مانند N از M موجود است به طوری که $(N:M)=n\mathbb{Z}$ یک ایده‌ال غیر صفر از Z است. ابتدا نشان می‌دهیم که $Mn=0$. برای این منظور، اگر $N=\{0\}$، به وضوح $Mn\subseteq N=\{0\}$. فرض کنید $N\neq\{0\}$. بنا بر فرض $M\in A^*(M)$ و گراف $AG(M)$ یک گراف کامل است، لذا $M*N=0$. بنابراین $M(N:M)=\{0\}$ یا $N(M:M)=\{0\}$. چون $(M:M)=\mathbb{Z}$ و $N\neq\{0\}$، بنابراین $N(M:M)\neq\{0\}$ و این نتیجه می‌دهد که $M(N:M)=M(n\mathbb{Z})=0$. لذا $Mn=0$.

حال ادعا می‌کنیم که عدد اولی مانند p موجود است به طوری که $Mp=0$. اگر این ادعا ثابت شود، می‌توان نتیجه گرفت که، $p\mathbb{Z}\subseteq ann(M)$. چون $p\mathbb{Z}$ یک ایده‌ال ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است و $M\neq 0$، بنابراین $pZ=ann(M)$. این نتیجه می‌دهد که M یک Z- مدول نیم‌ساده است به طوری که برای هر عضو غیر صفر $m\in M$ داریم $ann_Z(m)=p\mathbb{Z}$ یا به عبارت دیگر برای هر عضو غیر صفر $m\in M$ داریم $mZ\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong\mathbb{Z}_p$. بنابراین برای یک مجموعهٔ اندیس‌گزار مانند I داریم $M\cong\bigoplus_I \mathbb{Z}_p$، این همان هدف مطلوب ماست. اکنون به اثبات ادعا می‌پردازیم. چون n یک عدد صحیح مثبت است، اعداد اول $p_1, p_2, \ldots, p_m$ موجود هستند به طوری که $n=p_1 p_2\ldots p_m$. حال نشان می‌دهیم که به ازای یک $1\leq j\leq m$، داریم پس $Mp_j=0$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید به ازای هر $1\leq j\leq m$، $Mp_j \neq \{0\}$. اگر برای $1\leq i\leq m$، Mp_i یک زیرگروه سره از M باشد، از آن‌جایی که $M, Mp_i \in S(M)\setminus\{0\}$ و گراف $AG(M)$ یک گراف کامل است، پس $M*Mp_i=0$. چون $Mp_i\,(M:M)$ غیر صفر است، پس $M(Mp_i:M)=0$. از طرفی می‌دانیم که $p_i\in(Mp_i:M)$، پس $Mp_i = 0$ که این تناقض با فرض خلف دارد. بنابراین برای هر $1\leq i\leq m$ داریم $Mp_i=M$. اما از طرفی می‌دانیم که

$$\{0\}=Mn=Mp_1 p_2\ldots p_m=(M p_1)\, p_2 p_3\ldots p_m=(Mp_2)\ldots p_m=M.$$

این یک تناقض است. تناقض از آنجا حاصل شد که فرض کردیم برای هر $1\leq j\leq m$ ، داریم $Mp_j \neq 0$. از این رو ادعا ثابت شد. ■

۱ → ۲ : طبق نتیجه ۲.۵ و گزاره ۳.۱ برهان واضح است.

نتیجه ۳.۶: فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است.

۲. گراف پوچساز M یک گراف کامل است و M شامل یک زیرگروه بخش‌پذیر است.

اثبات: ۲ → ۱: طبق نتیجه واضح است

۱ → ۲: فرض کنید D یک زیر گروه بخش‌پذیر از گروه آبلی M باشد. به وضوح D یک گروه ساده نیست. فرض کنید N یک زیرگروه سره از D باشد. با استفاده از لم ۳.۲، $(D:N)=0$. از آن‌جایی که $(D:M)\subseteq(D:N)$ ، بنابراین $(D:M)=0$. این نتیجه می‌دهد که برای هر زیرگروه غیر صفر K از M، $K(D:M)=0$ و در نتیجه $A^*(M)=S(M)\setminus\{0\}$. حال بنا بر قضیهٔ ۳.۵، یا M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است یا M یک گروه آبلی نیم‌ساده است. از آن‌جایی که گروه‌های آبلی نیم‌ساده، دارای زیرگروه بخش‌پذیری نیستند، بنابراین M یک گروه آبلی بخش‌پذیر است. ■

۴. گراف‌های دو بخشی

این بخش را به مطالعهٔ گروه‌هایی که گراف پوچ‌سازشان دو بخشی است اختصاص می‌دهیم. ابتدا، شرط لازم و کافی برای این‌که گراف پوچ‌ساز یک گروه آبلی متناهی، ستاره یا دو بخشی باشد را به‌دست می‌آوریم. گروه‌های آبلی متناهی تولید شده را که گراف پوچ‌سازشان، گرافی دوبخشی است دسته‌بندی می‌کنیم. با یک لم شروع می‌کنیم که نقش مهمی را در این بخش ایفا می‌کند.

لم ۴.۱: فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $\bar{x}\mathbb{Z}$ یک زیرگروه از $\mathbb{Z}_n$ باشد. در این صورت $(\bar{x}\mathbb{Z}:\mathbb{Z}_n)=d\mathbb{Z}$ جایی که $(x,n)=d$

اثبات: فرض کنید $c\in(\bar{x}\mathbb{Z}:\mathbb{Z}_n)$. در این صورت برای $b\in\mathbb{Z}$، $n\mid c-xb$. چون d هم n و هم x را عاد می‌کند، لذا d عنصر c را نیز عاد می‌کند. به عکس، عناصر p و q متعلق به $\mathbb{Z}$ موجود هستند به طوری که $xp+nq=d$. لذا برای هر $y\in\mathbb{Z}_n$ داریم

$$dy = xpy + nqy = xpy \in x\mathbb{Z}.$$

این همان نتیجهٔ مطلوب است. ■

قضیه ۴.۲: فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. $AG(M)$ یک گراف ستارهٔ متناهی است.

۲. یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

الف. برای اعداد اول متمایز p و q، $M\cong\mathbb{Z}_{pq}$.

ب. به ازای عدد اولی p و اعدد صحیح $۳\leq n\leq ۴$، $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}$.

اثبات: ۲←۱: فرض کنید $AG(M)$ یک گراف ستارهٔ متناهی باشد. بنا بر قضیه ۲.۶، M یک گروه آبلی متناهی است. بنابراین اعداد اول $p_۱, p_۲, \ldots, p_m$ و اعداد صحیح مثبت $\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m$ موجود هستند به طوری که

$$M\cong\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}.$$

اثبات را طی سه گام ادامه می‌دهیم.

گام اول: نشان می‌دهیم که $m\leq ۲$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $m\geq ۳$ قرار دهید.

$$N_۱ = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}\oplus\{0\}\oplus\cdots\oplus\{0\},\qquad N_۲ = \{0\}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}}\oplus\{0\}\cdots\oplus\{0\}$$ و

$$N_۳ = \{0\}\oplus\{0\}\oplus\mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}}\oplus\{0\}\oplus\cdots\oplus\{0\}.$$

واضح است که $N_۱$ ، $N_۲$ و $N_۳$ سه زیرگروه دو به دو مجزا از M هستند. لذا این سه گروه در $AG(M)$ دو به دو با هم مجاور هستند. این در تناقض با ستاره بودن گراف $AG(M)$ است.

گام دوم: در این مرحله نشان می‌دهیم، برای عدد اولی مانند p و اعداد صحیح مثبت n و m، $AG(\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\mathbb{Z}_{p^m})$ هیچ گاه گراف ستاره نیست. در جهت اثبات این ادعا، اگر $n=m\geq ۱$، آن‌گاه زیرگروه‌های $N_۱$ ، $N_۲$ و $N_۳$ از M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $N_۱= Z_{p^n}\oplus\{0\}$، $N_۲=\{0\}\oplus Z_{p^n}$ و $N_۳=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{Z}_{p^n}\}$. واضح است که $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ سه زیرگروه متمایز از M هستند که دو به دو اشتراک صفر دارند. لذا $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ سه زیرگروه از $AG(M)$ هستند

که دو به دو با هم مجاور هستند. این در تناقض با ستاره بودن گراف $AG(M)$ است، حال، فرض کنید که $m>n\geq 1$. در این حالت زیرگروه‌های N_1 ، N_2 ، N_3 و N_4 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $N_1=\{0\}\oplus <p>$، $N_2=\mathbb{Z}_{p^n} \oplus\{0\}$ و $N_3=\{0\} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$ و $N_4=\mathbb{Z}_{p^n} \oplus <p^{m-n}>$ واضح است که $(N_1: M)=p^n\mathbb{Z}$, لذا $(N_1: M) = 0$ N_4 . پس N_1 و N_4 در $AG(M)$ مجاور هستند. از طرف دیگر $N_1 \cap N_2 =\{0\}$. از این‌رو N_2 و N_1 نیز در $AG(M)$ مجاور هستند. اما $N_2 \cap N_3 =\{0\}$ در نتیجه N_3 و N_2 در $AG(M)$ مجاور هستند. این به وضوح نشان می‌دهد که در گراف $AG(M)$، داریم $\deg(N_1) \geq 2$ و $\deg(N_2) \geq 2$. این در تناقض با فرض ستاره بودن گراف $AG(M)$ است.

بنابراین با استفاده از گام‌های اول و دوم به این نتیجه رسیدیم که، اگر گراف پوچساز یک گروه آبلی مانند M، گراف ستارهٔ متناهی باشد، آن‌گاه یا به ازای اعداد اول متمایز p و q و اعداد صحیح مثبت n و m، $M\cong \mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{q^m}$ یا به ازای عدد اول p و عدد صحیح مثبت، n ، $M\cong \mathbb{Z}_{p^n}$.

گام سوم: در این مرحله نشان خواهیم داد که، برای اعداد اول متمایز p و q و اعداد صحیح مثبت n و m، که $m+n\geq 3$، گراف پوچساز گروه آبلی $\mathbb{Z}_{p^n}\oplus \mathbb{Z}_{q^m}$ هیچ‌گاه ستاره نیست. فرض کنید N یک زیر گروه سره از $M=\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{q^m}$ باشد. اعداد صحیح $0\leq r\leq n$ و $0\leq s\leq m$ موجود هستند به طوری که $N=<p^r q^s>$. با استفاده از لم ۴.۱، داریم:

$$(N:M)=\left(p^rq^s \mathbb{Z} : \mathbb{Z}_{p^n}\oplus \mathbb{Z}_{q^m} \right)=(p^r q^s :p^n q^m)\mathbb{Z}=p^rq^s\mathbb{Z}.$$

بنابراین، با فرض $K= <p^{n-r} q^{m-s}>$ داریم $N*K=0$ و در نتیجه N یک گره از گراف $AG(M)$ است. با این استدلال، می‌توان نتیجه رفت که تمام زیرگروه‌های غیربدیهی از M، گره‌هایی از گراف پوچساز هستند. از طرف دیگر به وضوح M گره‌ای از گراف $AG(M)$ نیست. اگر گراف پوچساز M ستاره باشد، گره‌ای مانند N در $AG(M)$ موجود است که با تمام گره‌های دیگر مجاور است. فرض کنید $N=<p^r q^s>$ جایی که $0\leq r\leq n$ و $0\leq s\leq m$ به وضوح $N\neq<p>$ و $N\neq<q>$، این بدان علت است که، اگر $N=<p>$ یا $N=<q>$ پس $<p>*<q>=0$ و در نتیجه $<p>q\mathbb{Z}=0$. از این رو $p^m q^n \mid pq$. از آن‌جا که $n+m\geq 3$، این یک تناقض است. از طرفی می‌دانیم $N*<p> =0$ و $N*<q> =0$. این دو نتیجه می‌دهند که $<p^r q^s>pZ=0$ و $<p^r q^s>qZ=0$. بنابراین $p^n q^m \mid p^{r+1} q^s$ و $p^n q^m \mid p^r q^{s+1}$. این یک تناقض است.

با یک جمع‌بندی مجدد، به این روشن‌گری خواهیم رسید که، اگر گراف پوچساز یک گروه آبلی مانند M، ستارهٔ متناهی باشد، دو حالت بیشتر حادث نخواهد شد.

۱. برای اعداد اول متمایز p و q ، $M\cong\mathbb{Z}_{pq}\cong \mathbb{Z}_p\oplus \mathbb{Z}_q$ یا

۲. برای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n، $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}$. در حالت دوم، اگر $n\geq 5$، آنگاه سه زیرگروه $N_1= <p^{n-1}>$، $N_2=<p^{n-2}>$ و $N_3=<p^{n-3}>$، گره‌های متمایزی از گراف $AG(M)$ هستند که دو به دو با هم مجاور هستند. این تناقض با فرض ستاره بودن گراف $AG(M)$ دارد. پس در حالت دوم $n\leq 4$. اگر $n=1$ یا $n=2$، آن‌گاه به ترتیب $AG(M)$ یک گراف تهی یا یک گراف تک‌نقطه‌ای است. از این رو $3\leq n\leq 4$.

$1\longrightarrow 2$: به وضوح گراف پوچساز $\mathbb{Z}_{pq}$ (p و q اعداد اول متمایز) یک گراف با دو گره و یک لبه است و اگر p عددی اول باشد آن‌گاه گراف پوچساز $\mathbb{Z}_{p^3}$ یک گراف با دو گره و یک لبه و برای عدد اول p، $\mathbb{Z}_{p^4}$ یک گراف ستاره با سه گره و دو لبه است. ■

در ادامه این بخش سعی خود را معطوف به مشخص‌سازی گروه‌های آبلی (متناهی تولید شده) می‌کنیم که گراف پوچساز آنها، یک گراف دو بخشی یا دو بخشی کامل است.

گزاره ۴.۳. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. AG(M) یک گراف دو بخشی متناهی است.

۲. یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

الف. برای اعداد متمایز p و q، M با $\mathbb{Z}_{pq}$ یکریخت است.

ب. برای اعداد متمایز p و q، M با $\mathbb{Z}_{pq^{۲}}$ یکریخت است.

ج. برای عدد اول p و عدد صحیح مثبت $۳\leq n\leq ۴$ M با $\mathbb{Z}_{p^n}$ یکریخت است.

اثبات: ۲⟵۱: از آنجا که AG(M) یک گراف دو بخشی است، طول هر دور در AG(M) زوج است. بنابراین طبق گزارهٔ ۲.۷ از مرجع [۱۹] ، یا $gr\big(AG(M)\big)=۴$ یا $gr\big(AG(M)\big)=\infty$. طبق قضیهٔ ۲.۶، M یک گروه آبلی متناهی است. بنابراین اعداد اول $p_{۱}\ ,\ p_{۲}\ ,\dots,\ p_m$ و اعداد صحیح مثبت $\boxtimes_1, \boxtimes_2, \dots, \boxtimes_m$ وجود دارند به طوری که

$$M \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}.$$

با تحلیل مشابه با برهان حالت (۱) از قضیهٔ ۴.۲، نشان داده می‌شود که، برهان در حالت طبیعی در پنج گام اتفاق می‌افتد.

گام اول: برای عدد اول p و عدد صحیح مثبت $n\geq ۱$ ، $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}\oplus \mathbb{Z}_{p^n}$. فرض کنید چنین باشد. قرار دهید:

$N_1= \mathbb{Z}_{p^n}\oplus\{0\}$، $N_2=\{0\}\oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ و $N_3=\big\{(k,k)\big|k\in\mathbb{Z}_{p^n}\big\}$. واضح است که N_1 ، N_2 و N_3 سه زیرگروه متمایز از M هستند که در AG(M) مجاور هستند. پس AG(M) شامل یک مثلث است، که یک تناقض است.

گام دوم: در این مرحله نشان می‌دهیم که برای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n، M هیچ‌گاه با $\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\mathbb{Z}_{p^{2n}}$ یک‌ریخت نیست. برای این هدف، ابتدا فرض کنید $n=۱$ و $M\cong\mathbb{Z}_p\oplus \mathbb{Z}_{p^{۳}}$. اگر قرار دهیم $N_{۱}=\{0\}\oplus \mathbb{Z}_{p^{۳}}$، $N_2= \mathbb{Z}_p \oplus\{0\}$ و $N_{۳}=\{0\}\oplus<p>$، آنگاه از این‌که $N_{۱}\cap N_{۲}=\{0\}$، $N_{۱}\cap N_{۳}=\{0\}$ و $(N_{۳}:M) = p\mathbb{Z}$ می‌توان نتیجه گرفت که $N_{۱}* N_{۲}=0$ ، $N_{۱}* N_{۳}=0$ و $N_{۲}* N_{۳}=0$. این نتیجه می‌دهد که گراف شامل یک مثلث است که تناقض با فرض است. اکنون فرض می‌کنیم $n\geq ۲$. اگر قرار دهیم $N_{۱}=<p>\oplus\{0\}$، $N_{۲}=\{0\}\oplus <p^n>$ و $N_{۳}=\{0\}\oplus <p^{n+۱}>$، آن‌گاه به وضوح از این‌که $N_{۱}\cap N_{۲}=N_{۱}\cap N_{۳}=\{0\}$ و $(N_{۳}:M)=p^{n+۱}\mathbb{Z}$، می‌توان نتیجه گرفت که $N_{۱}* N_{۲}=N_{۱}* N_{۳}=0$ و $N_{۲}(N_{۳}:M)=N_{۲}\ p^{n+۱}\ \mathbb{Z}=0$. در نتیجه $N_{۱}$ ، $N_{۲}$ و $N_{۳}$ سه گره در AG(M) هستند که دو به دو مجاور هستند. این یک تناقض است.

گام سوم: در این مرحله نشان خواهیم داد که برای عدد اول p و عدد صحیح مثبت m و n که $m>n\geq ۱$ ، M با $\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\ \mathbb{Z}_{p^m}$ یک‌ریخت نیست. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $M\cong Z_{p^n}\oplus Z_{p^m}$. قرار دهیم $N_1=<p>\oplus\{0\}$، $N_{۲}=<0>\oplus <p^{m-n}>$ و $N_{۳}=<0> \oplus<p^n>$. به وضوح $\big(N_{۳}:\mathbb{Z}_{p^n}\oplus \mathbb{Z}_{p^m}\big)=p^n\mathbb{Z}$ و $N_{۱}\cap N_{۲}=N_{۱}\cap N_{۳}=\{0\}$. بنابراین با استفاده از لم ۱.۳ از مرجع [۲۰] ، $N_{۱}* N_{۲}=N_{۱}\ *N_{۳}=N_{۲}* N_{۳}=\{0\}$ یعنی گراف AG(M) شامل مثلث $N_{۲}— N_{۱}— N_{۳}— N_{۲}$است. این یک تناقض است. تنها دو حالت باقی می‌ماند. یا اینکه به ازای اعداد اول متمایز p و q و اعداد صحیح مثبت m و n ، داریم $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}\oplus \mathbb{Z}_{q^m}$ یا به ازای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n ، $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}$.

گام چهارم: فرض کنید به ازای اعداد اول متمایز p و q و اعداد صحیح مثبت m و n داریم $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\mathbb{Z}_{q^m}$. ادعا می‌کنیم که $m\leq ۲$ و $n\leq ۲$. علاوه بر آن اگر $m=۲$ یا $n=۲$، آنگاه $m\neq n$ با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $m>۲$ یا $n>۲$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، فرض کنید $m\geq ۳$. قرار می‌دهیم $N_1=<p^nq>$، $N_۲=<p^n q^{m-۱}>$ و $N_۳=<q^m>$. واضح است که $N_۱$ و $N_۲$ و $N_۳$ سه زیر گروه متمایز از M هستند. با استفاده از لم ۴.۱ داریم $(N_۱:M)=p^nq\mathbb{Z}$، $(N_۲:M)=p^n q^{m-۱}\mathbb{Z}$ و $(N_۳:M)=q^m\mathbb{Z}$. بنابراین $N_۱*N_۲=N_۱*N_۳=N_۲*N_۳=0$. از این رو سه گره $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ در $AG(M)$ دو به دو مجاور هستند. این یک تناقض است. اگر $M\cong\mathbb{Z}_{p^۲}\oplus\mathbb{Z}_{q^۲}$، آن‌گاه مجدداً با فرض $N_۱=<pq>$، $N_۲=<p^۲q>$ و $N_۳=<pq^۲>$، به این نتیجه می‌رسیم که گراف $AG(M)$ شامل یک مثلث است. بنابراین حتما $M\cong\mathbb{Z}_{pq}$ یا $M\cong\mathbb{Z}_{pq^۲}$، برای اعداد اول متمایز p و q.

گام پنجم: فرض کنید به ازای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n، $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}$. چون $AG(\mathbb{Z}_p)=\phi$ و $AG(\mathbb{Z}_{p^۲})$ تنها دارای یک گره است، پس $n\geq ۳$. اگر $n\geq ۵$، آنگاه سه زیر گروه $N_1=<p^{n-۱}>$، $N_2=<p^{n-۲}>$ و $N_۳=<p^{n-۳}>$ سه گره متمایز در $AG(M)$ هستند که دو به دو مجاور هستند. این یک تناقض است از این رو $۳\leq n\leq ۴$ و حکم کامل است.

نتیجهٔ بعدی گروه‌های آبلی متناهیا تولید شده را مشخص می‌کند که گراف پوچسازشان یا گراف ستاره است یا گراف دوبخشی متناهی است.

۱$\rightarrow$۲ : واضح است. ■

قضیه۴.۴. فرض کنید M یک گروه آبلی نامتناهی تولید شده باشد. موارد زیر معادل هستند.

۱. $AG(M)$ یک گراف ستاره نامتناهی است.

۲. $AG(M)$ یک گراف دوبخشی نامتناهی است.

۳. برای عدد اول p، $M\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$.

اثبات:

۲$\rightarrow$۱ : واضح است.

۳$\rightarrow$۲: از آنجا که M یک گروه آبلی متناهی تولید شده است، بنابراین اعداد اول متمایز، $p_۱, p_۲,\dots, p_m$ و اعداد صحیح مثبت، $\boxtimes_۱, \boxtimes_۲,\dots, \boxtimes_m$ موجود هستند به طوری که $M\cong Z_{p_1^{\alpha_1}}\oplus Z_{p_2^{\alpha_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p_m^{\alpha_m}}\oplus\mathbb{Z}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}$، جایی که $\text{rank } M=n$. چون $AG(M)\cong AG(Z_{p_1^{\alpha_1}}\oplus Z_{p_2^{\alpha_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p_m^{\alpha_m}}\oplus\mathbb{Z}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z})$ پس بدون کاسته شدن از کلیت مساله، فرض کنید $M=Z_{p_1^{\alpha_1}}\oplus Z_{p_2^{\alpha_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p_m^{\alpha_m}}\oplus\mathbb{Z}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z})$. به وضوح $m+n\leq ۲$ این بدان علت است که اگر A و B و C سه زیرگروه متمایز از M باشند به طوری که دو به دو دارای اشتراک صفر باشند، آن‌گاه A و B و C سه گره از $AG(M)$ خواهند بود که در این گراف دو به دو مجاور هستند، و این در تناقض است با فرض دو بخشی بودن گراف $AG(M)$. چون $AG(M)$ یک گراف نامتناهی است، پس M نیز یک گروه آبلی نامتناهی است، بنابراین دو حالت بیشتر برای M ممکن نیست. یا $M=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ یا به ازای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n، $M=\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\mathbb{Z}$. اگر $M=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$، آن‌گاه با قرار دادن $N_۱=<0>\oplus ۲\mathbb{Z}$، $N_۲=<0>\oplus ۳\mathbb{Z}$ و $N_۳=<0>\oplus ۵\mathbb{Z}$ خواهیم داشت

$(N_1:M)=(N_2:M)=(N_3:M)=\{0\}$ ، از این رو N_1 و N_2 و N_3 سه گره در $AG(M)$ خواهند بود که دو به دو مجاور هستند. این یک تناقض خواهد بود. بنابراین $M\cong\mathbb{Z}_{p^n}\oplus\mathbb{Z}$. در این حالت، اگر $n\geq 2$ ، آنگاه با قرار دادن

$$N_1=<p>\oplus\{0\}\ ،\ N_2=<p^2>\oplus\{0\}\ \text{و}\ N_3=\{0\}\oplus Z$$

خواهیم داشت $N_1\cap N_3=N_2\cap N_3=\{0\}$ و $(N_1:M)=(N_2:M)=\{0\}$. از این رو N_1 ، N_2 و N_3 سه گره متمایز در $AG(M)$ هستند که دو به دو مجاور هستند. و این با فرض دو بخشی بودن $AG(M)$ در تناقض است. بنابراین $M\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$.

۱→۳: فرض کنید برای یک عدد اول مانند p ، $M\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$. چون گراف $AG(M)\cong AG(\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})$ ، بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنید $M=\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$. چون M یک گروه آبلی متناهی تولید شده است و $\mathbb{Z}$ یک حلقه نوتری است. بنابراین M نیز یک $\mathbb{Z}$- مدول نوتری است. از این رو تمام زیرگروه‌های M متناهی تولید شده هستند. بنا براین هر زیر گروه از M، یا با $\mathbb{Z}_p\oplus\{0\}$ یا با $\{0\}\oplus\mathbb{Z}$ یا با $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ یکریخت است. در گام‌های زیر برای هر زیر گروه A از M ، $(A:M)$ را محاسبه می‌کنیم. قرار دهید $N=\mathbb{Z}_p\oplus<0>$.

گام اول: فرض کنید A یک زیر گروه از M باشد به طوری که $A\cong\mathbb{Z}_p\oplus<0>$ و $f:\mathbb{Z}_p\oplus<0>\to A$ یک یکریحتی گروهی باشد. بنابراین عناصر $a\in\mathbb{Z}_p$ و $b\in\mathbb{Z}$ موجود هستند به طوری که $f(1,0)=(a,b)$. چون $O\big(f(1,0)\big)=O\big((1,0)\big)=p$ (اگر M یک گروه باشد برای هر $x\in M$ مرتبه x را با نماد $O(x)$ نمایش می‌دهیم) پس $p(a,b)=0$ و در نتیجه $b=0$ و $a\neq 0$. از طرف دیگر

$$A=<((a,0))>=\{n(a,0)|n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_p\oplus\{0\}=N$$

و در نتیجه $(A:M)=(N:M)=\{0\}$.

گام دوم: فرض کنید A یک زیر گروه از M باشد به طوری که $A\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ و $f:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}\to A$ یک یکریختی گروه‌های آبلی باشد. بنابراین عناصر a و d متعلق به $\mathbb{Z}_p$ و عناصر b و c متعلق به $\mathbb{Z}$ موجود هستند به‌طوری که $f(1,0)=(a,b)$ و $f(0,1)=(d,c)$. از آنجایی که $O\big((1,0)\big)=p$ ، از این رو $O(a,b)=p$ و در نتیجه $b=0$. از آنجایی که مجموعه $\{(1,0),(0,1)\}$ گروه آبلی $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ را تولید می‌کند، بنابراین $\{(a,0),(d,c)\}$ نیز گروه آبلی A را تولید می‌کند. بنابراین خواهیم داشت

$$A=<(a,0),(d,c)>=\{n(a,0)+m(d,c)|m,n\in\mathbb{Z}\}=\{(na+md,mc)|m,n\in\mathbb{Z}\}.$$

حال ادعا می‌کنیم $(A:M)=c\mathbb{Z}$. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $k\in(A:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})$. چون $k(0,1)\in A$، بنابراین اعداد صحیح m و n موجود هستند به طوری که $(0,k)=(na+md,mc)$. بنابراین $k=mc\in c\mathbb{Z}$.

بعکس، فرض کنید (x,y) عضوی دلخواه از $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$باشد. به وضوح $cx-yd\in\mathbb{Z}_p=<a>$. بنابراین عدد صحیحی مانند n موجود است به طوری که $cx-yd=na$. این نتیجه می‌دهد که $c(x,y)=(cx,cy)=(na+yd,cy)\in A$. این بدان معناست که $c\in(A:M)$. پس $\big(A:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}\big)=c\mathbb{Z}$.

گام سوم: فرض کنید A یک زیر گروه از M باشد به طوری که $A\cong<0>\oplus\mathbb{Z}$ و $f:<0>\oplus\mathbb{Z}\to A$ یک یکریختی گروه‌های آبلی باشد. عناصر $a\in\mathbb{Z}_p$ و $b\in\mathbb{Z}$ موجود هستند به طوری که $f\big((0,1)\big)=(a,b)$. چون $O(0,1)=O((a,b))$، به وضوح $b\neq 0$. ادعا می‌کنیم که $\big(A:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}\big)=pb\mathbb{Z}$. برای اثبات این ادعا، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: فرض کنید $a=0$. در این حالت

$$A=\langle(0,b)\rangle=\{n(0,b)|n\in\mathbb{Z}\}=\{(0,nb)|n\in\mathbb{Z}\}=\langle 0\rangle\oplus b\mathbb{Z},$$

در نتیجه $(A:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=(\langle 0\rangle+b\mathbb{Z}:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=pb\mathbb{Z}$.

حالت دوم: فرض کنید $a\neq 0$. در این حالت بنابر الگوریتم تقسیم، برای هر $n\in\mathbb{Z}$ ، اعداد صحیح k و $0\leq t\leq p-1$ موجود هستند که $n=kp+t$. از این رو

$$A=\{n(a,b)\mid n\in\mathbb{Z}\}=\bigcup_{t=0}^{p-1}\{(ta,(kp+t)b)\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

حال فرض کنید $0\neq k\in(A:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})$. از این رو $k(0,1)=(0,k)\in A$. بنابراین اعداد صحیح $0\leq t\leq p-1$ و s موجود هستند به طوری که $(0,k)=(ta,(sp+t)b)$. اگر $t\neq 0$، آن‌گاه از این‌که $ta=0$ نتیجه می‌شود که $O(a)=p$ عدد t را عاد می‌کند و در نتیجه $p\leq t$، که یک تناقض است. بنابراین $k=spt$. از آن‌جا که p و b هر دو k را می‌شمارند، پس m نیز k را می‌شمارد و در نتیجه $k\in m\mathbb{Z}$. از طرف دیگر، می‌دانیم که اعداد صحیح c و d چنان موجود هستند که $m=pc$ و $m=bd$ از این رو برای هر $(x,y)\in\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ داریم $m(x,y)=(pcx,bdy)=(0,bdy)\in A$،
حال با استفاده از مراحل ۱ ، ۲ ،۳ به وضوح می‌دانیم که برای هر زیر گروه A از $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ که مخالف با $N=\langle 0\rangle\oplus\mathbb{Z}$ است، داریم $A(N:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=\{0\}$. این نتیجه می‌دهد که در گراف $AG(\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})$ تمام گره‌های مجزا از N با N مجاور هستند. حال نشان می‌دهیم هیچ دو گره مجزای A و B که هر دو با N نیز مخالف هستند با یکدیگر مجاور نیستند.
حالت اول: $A\cong\{0\}\oplus\mathbb{Z}\cong B$. آن‌گاه طبق گام سوم برای عدد غیر صفر b، $(B:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=pb\mathbb{Z}$. بنابراین $Apb=\{0\}$ و از این رو $\mathbb{Z}pb=\{0\}$، که تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $A\cong\{0\}\oplus\mathbb{Z}$ و $B\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$. بنابراین طبق گام دوم، $\mathbb{Z}c=\{0\}$ ، که یک تناقض است.

حالت سوم: فرض کنید $A\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$ و $B\cong\{0\}\oplus\mathbb{Z}$. آنگاه طبق گام سوم، برای عدد صحیح غیر صفر b، $(B:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=pb\mathbb{Z}$. بنابراین $Apb=\{0\}$ و از این رو $(\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})pb=\{0\}$، که یک تناقض است.

حالت چهارم: فرض کنید $A\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}\cong B$. آنگاه طبق گام دوم، برای عدد صحیح غیر صفر c، $(B:\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})=c\mathbb{Z}$. بنابراین $Ac=\{0\}$ و از این رو $(\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z})c=\{0\}$، که یک تناقض است. ■

بخش ۵. الگوریتم ترسم گراف مقسوم علیه صفر و گراف پوچ‌ساز گروه‌های دوری متناهی

در این بخش، با استفاده از نرم افزار میپل، برنامه‌ای ارائه می‌دهیم که برای یک گروه آبلی دوری متناهی $(\mathbb{Z}_n)$، گراف پوچ‌ساز و گراف مقسوم علیه صفر را هم‌زمان رسم و مقایسه می‌کند.

```
with(GraphTheory) : with(numtheory) :
CreateGraph := proc(n :: integer)
local A, B, L, H, G, k, i, j, VerNum;
 VerNum := 0;
G := Graph( ); i := 1;
  for i from 1 to n - 1do
     for j from  1 to n - 1do
          if (i.j mod n = 0 )  and not(evalb(i  in Vertices(G) ) ) then
               VerNum  := VerNum + 1;
               G := AddVertex(G, i);
          end if
end do;
end do;
       for i from 1 to n − 1 do
        for j from i to n - 1do
           if ( i.j mod n = 0) and (evalb(i  in Vertices(G) ) ) and (evalb(j
  in Vertices(G) ) ) and not (i = j) then
            G := AddEdge(G, {i, j});
      end if;
  end do;
end do;
 # draw grapgh Ghama(Z_n ) :
 A := DrawGraph(G);
 H := Graph( );
L := divisors(n);
  for i from 2 to nops(L) − 1 do
                  H := AddVertex(H, cat("[", L[i], "]"));
   end do;
       for i from 2 to nops(L) − 1 do
        for j from 2 to nops(L) − 1 do
           if ( L[i].L[j] mod n = 0) and  not (i = j) then
            H := AddEdge(H, {cat("[", L[i], "]"), cat("[", L[j], "]") });
      end if;
  end do;
end do;
 # draw grapgh G(Z_n ) :
B := DrawGraph(H) :
plots[display](Array( [A, B]));
end proc:
```

References

1. S. Akbari, G. Alipour, M. Behboodi,R. Nikandish, M. J. Nikmehr and F. Shaveisi The Classification of the annihilating-ideal graphs of commutative rings", Algebra Colloquim, (to appear).

2. S. Akbari, A. Mohammadian, “On zero-divisor graphs of finite rings”, J. Algebra 314 (2007), 168-184.

3. B. Allen, E. Martin, E. New, and D. Skabelund, Diameter, girth and cut vertices of the graphs of equivalence classes of Zero-divisors, Involveqes, Vol. 5, no. I, pp. 51-60, 2012.

4. D. F. Anderson, M. C. Axtell , and J. A. Sticklrs, " Zero-divisor graphs in commutative rings, in commutative Algebra, Noetherian and Non-Noetherian ring Perspectives", (M. Fontana, S-E. Kabbaj, B. Olberding, I. Swanson, Eds.) 23-45, Springer-Verlag, New York, 2011

5. D.F. Anderson, A. Frazier, A. Lanve, and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of commutative ring, II, in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 220, pp. 61-72, Dekker, New York, 2011

6. F.W. Anderson, K. R. Fuller, (1992). Ring and Category of Modules, New York Springer-Verlag

7. D. F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of Commutative ring. J. Algebra 217(1999), no.2, 434-447.

8. D. F. Anderson and S.B. Mullay, On the diameter and girth of a zero-divisor graph, J. pure Appl. Algebra 210 (2007), no.2, 543-550

9. M.F. Atiyah and I.G.Macdonald, (1969). Introduction to Commutative Algebra. University of Oxford, Addition Wesley publishing company

10. M. Baziar, E. Momtahan and S. Safaeeyan. A Zero-divisor Graph for Module with Respect To their (First) Dual. It Journal of Algebra and Its Applications Vol. 13, No. 6 (2013)

11. M. Baziar, E. Momtahan, S. Safaeeyan and N. Ranjbar. Zero-divisor graph of abelian groups. Journal of Algebra and Its Applications Vol. 13, No. 6 (2014).

12. I. Beck, Coloring of commutative rings, J. Algebra 116(1988), no. I, 208-226.

13. M.Behboodi and Z. Rakeei, The annihilating-ideal graph of commutative rings I, J. Algebra Appl. 10 (2011), no. 4, 727-739.

14. M. Behboodi and Z. Rakeei, The annihilating- ideal graph of commutative rings II, J. Algebra Apl. 10 (2011). No. 4, 740-753

15. T. Y. Lam, (1991). A first Course in Noncommutative Rings. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 131. New York/Berlin: Springer-Verlag.

16. T. Y. Lam, (1998). Lecture on modules and rings. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 139. New York/Berlin, Springer- Verlag

17. D. Lu and T.Wu, on bipartite zero-divisor graphs, Discrete Math. 309 (2009), no.4, 755- 762.

18. S. B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisors, Comm. Algebra 30 (2002), no.**7**, 3533-3558

19. S. Safaeeyan. Annihilating submodule graph for modules. *Tran. Comb*. **7**(2018), no.**1**, 1-12.

20. S. Safaeeyan, M. Baziar and E. Momtahan. A Generalization of the Zero-Divisor Graph for Modules. IJ. Korean Math. Soc. 51 (2014)

21. S. Spiroff and C. Wickham. A Zero Divisor Graph Determined by Equivalence Classes Of Zero Divisors. Comm. Algebra Vol. 39 N-7, 2338-2348 (2011).

22. D.B. West, Introduction to Graph Theory, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.