حلقه‌های نیم‌آرمنداریز و نیم‌مک‌کوی

شروین صاحبی*
دانشگاه آزاد واحد تهران مرکزی

دریافت: ۹۷/۱۲/۰۱ پذیرش: ۹۸/۱۲/۱۱

چکیده

در این مقاله حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) که زیررده‌ای از رده حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) می‌باشند را معرفی و ویژگی‌های آنها را بررسی می‌کنیم. حلقهٔ R را نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) می‌نامیم اگر $\overline{R} = \frac{R}{J(R)}$ آرمنداریز (به ترتیب، مک‌کوی) باشد. در این راستا ثابت می‌کنیم که حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی) به طور اکید بین رده حلقه‌های شبه دوگان یکطرفه و رده حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) قرار می‌گیرند. همچنین نشان می‌دهیم که حلقهٔ R، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی) است اگر و فقط اگر $R[[x]]$ حلقهٔ نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی) باشد اگر و فقط اگر برای هر عضو خودتوان $e \in R$، حلقه eRe ، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی) باشد اگر و فقط اگر حلقه ماتریس‌های $n \times n$ بالامثلثی، نیم‌آرمنداریز (نیم‌مک‌کوی) باشد. اما برای هر حلقه R و $\mathrm{n}>1$ با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که حلقهٔ $\mathrm{M_n(R)}$، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) نمی‌باشد و این بدان معنی است که خاصیت نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) از حلقه‌ها موریتا پایا نیست.

واژه‌های کلیدی: حلقهٔ J-آرمنداریز، حلقهٔ J-مک‌کوی، حلقهٔ شبه دو، رادیکال جیکوبسن.

مقدمه

در سراسر این مقاله R یک حلقه شرکت‌پذیر و یکدار است که لزوما جابه جایی فرض نمی شود. برای حلقه R، مجموعه عضوهای پوچتوان، رادیکال جیکوبسن، حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و حلقه ماتریس‌های $n \times n$ بالامثلثی را بترتیب با نمادهای $Nil(R)$، $J(R)$، $M_n(R)$ و $T_n(R)$ نمایش می‌دهیم. در سال ۱۹۹۷، رج و چاواریا حلقه‌های آرمنداریز را معرفی کردند. حلقه R، آرمنداریز نامیده می‌شود هر گاه برای هر دو چندجمله‌ای

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad \text{و} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شودکه برای هر i و j ، $a_{\mathrm{i}}\mathrm{b_j} = 0$. انتخاب نام آرمنداریز به این دلیل است که آرمنداریز برای اولین بار نشان داد که حلقه‌های کاهشی (حلقه‌هایی که به جز صفر عضو پوچتوان دیگری ندارند) در شرط فوق صدق می‌کنند. تحقیق‌های متعددی در مورد حلقه‌های آرمنداریز انجام شده است [۱،۲،۳،۴،۵]. در این راستا حلقه‌های آرمنداریز

*نویسندهٔ مسئول sahebi@iauctb.ac.ir

به شکل‌های متفاوتی تعمیم داده شده‌اند [۶،۷]. لیو و ژاو حلقهٔ R را آرمنداریز ضعیف نامیدند هرگاه برای هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شود که برای هر i و j، $a_i b_j \in Nil(R)$ [۷]. در سال ۲۰۱۷، ثنایی و همکارانش حلقهٔ R را J-آرمنداریز نامیدند هر گاه برای هر دو چند جمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شود که برای هر i و j، $a_i b_j \in J(R)$ [۸].

با توجه به تعریفی که توسط رج و چاواریا ارائه شد، حلقه R مک‌کوی راست نامیده می‌شود هر گاه برای هر دو چندجمله‌ای

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \text{ و } f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شودکه عضو مخالف صفر r در R موجود است بطوری که برای هر i، $a_i r = 0$. حلقه‌های مک‌کوی چپ به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین حلقه R، مک‌کوی نامیده می‌شود هرگاه مک‌کوی چپ و راست باشد. واضح است که هر حلقه آرمنداریز مک‌کوی است. برای مشاهدهٔ ویژگی‌های بیشتری از حلقه‌های مک‌کوی می‌توانید از مراجع [۹،۱۰،۱۱] استفاده کنید. انتخاب نام مک‌کوی به این دلیل است که مک‌کوی برای اولین بار نشان داد حلقه‌های جابه‌جایی در شرط فوق صدق می‌کنند [۱۱]. در این راستا حلقه‌های مک‌کوی راست به شکل‌های متفاوتی تعمیم داده شده‌اند. کامیلو و همکارانش R را NC- مک‌کوی راست نامیدند؛ هرگاه برای هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شود که عضو ناصفر r در R موجود است به طوری که $f(x)r \in Nil(R)$ [۱۲]. حلقه‌های NC-مک‌کوی چپ به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین حلقه R، NC-مک‌کوی نامیده می‌شود هر گاه NC-مک‌کوی چپ و راست باشد. در سال ۲۰۱۶، وحدانی و همکارانش حلقه R را J-مک‌کوی راست نامیدند هر گاه برای هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در $R[x]$ از $f(x)g(x) = 0$ نتیجه شود که عضو مخالف صفر r در R موجود است بطوری که برای هر i، $a_i r \in J(R)$ [۱۳]. حلقه‌های J-مک‌کوی چپ به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین حلقه R، J- مک‌کوی نامیده می‌شود هر گاه J- مک‌کوی چپ و راست باشد. به وضوح، حلقه‌های آرمنداریز ضعیف (به ترتیب، NC- مک کوی)، J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک کوی) می‌باشند. زیرا اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ دو چندجمله‌ای دلخواه در $R[x]$-{0} باشند به طوری که $f(x)g(x)=0$. بنابراین برای هر t در R داریم $tf(x)g(x)=0$ و چون R یک حلقهٔ آرمنداریز ضعیف (به ترتیب، NC- مک‌کوی) است پس برای هر i وj، $ta_i b_j \in Nil(R)$ (به ترتیب، عضو مخالف صفر r در R موجود است به طوری که $tf(x)r \in Nil(R)$) و بنابراین $1 - ta_i b_j \in U(R)$ (به ترتیب، $1 - ta_i r \in U(R)$)، لذا $a_i b_j \in J(R)$ (به ترتیب، $a_i r \in J(R)$). توجه کنید که برای حلقه‌های آرتینی مفاهیم حلقه‌های آرمنداریز ضعیف (به ترتیب، NC- مک‌کوی) و J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) یکسان هستند.

در این مقاله با انگیزه از نتایج فوق، زیرکلاسی از حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) را معرفی می‌کنیم. حلقهٔ R را نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی) می‌نامیم اگر $\overline{R} = \frac{R}{J(R)}$ آرمنداریز (به ترتیب، مک‌کوی) باشد. به وضوح، حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی)، J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) می‌باشند. همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌های شبه‌دوگان چپ (راست)، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) هستند و مثالی وجود دارد که نشان می‌دهد

حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) لزوماً شبه‌دوگان چپ (راست) نیستند. لذا حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) به طور اکید بین کلاس حلقه‌های شبه دو و کلاس حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) قرار می‌گیرند.

۱. حلقه‌های نیم‌آرمنداریز و نیم‌مک‌کوی

در این بخش حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی) را به عنوان زیرکلاسی از حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی) معرفی و ویژگی‌های آنها را با توجه به ساختارهای استاندارد نظیر حاصلضرب مستقیم حلقه‌ها، حلقه‌های خارج قسمتی، زیر حلقه‌ها، حلقه ماتریس‌ها، حلقه‌های کنج (حلقه‌های eRe برای عضو خودتوان e در R)، حلقه‌های چندجمله‌ای و ... بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. حلقهٔ R را نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) می‌نامیم اگر $\bar{R} = \frac{R}{J(R)}$ آرمنداریز (به ترتیب، مک‌کوی راست) باشد. یعنی برای هر دو چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a_i} x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} \bar{b_j} x^j$ در $\bar{R}[x]$ از $f(x)g(x) = \bar{0}$ نتیجه شود که برای هر i و j، $a_i b_j \in J(R)$ (به ترتیب، عضو مخالف صفر r در R موجود است به طوری که برای هر i، $a_i r \in J(R)$).
حلقه‌های نیم‌مک‌کوی چپ به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین حلقهٔ R، نیم‌مک‌کوی نامیده می‌شود هر گاه نیم‌مک‌کوی چپ و راست باشد. بنا به تعریف به وضوح، هر حلقه نیم‌آرمنداریز، نیم‌مک‌کوی است. طبق [۱۴، قضیه۲] حلقه‌های برگشت‌پذیر، مک‌کوی می‌باشند. لذا اگر $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقهٔ برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه R یک حلقه نیم‌مک‌کوی است. همچنین به وضوح، حلقه‌های موضعی، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) و حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست)، J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی راست) هستند. اما مثال زیر نشان می‌دهد که حلقه‌های J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی راست) لزومی ندارد که نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) باشند.

مثال ۱.۱. فرض کنید $\mathbb{Z}_{(3)}$ حلقه موضعی از اعداد صحیح توسط ایده‌ال اول <۳> باشد. حلقهٔ کواترنیون‌های Q روی $\mathbb{Z}_{(3)}$ را که یک R- مدول آزاد با پایهٔ 1, i, j, k می‌باشد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Q = \{\mathbb{Z}_{(3)} + \mathbb{Z}_{(3)}\,\mathrm{i} + \mathbb{Z}_{(3)}\mathrm{j} + \mathbb{Z}_{(3)}\,\mathrm{k} \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji\}.$$

در این صورت Q یک دامنهٔ ناجابه‌جایی است و بنابراین J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی راست) است. ادعا می‌کنیم J(Q)=3Q. برای این منظور اگر $t = t_0 + t_1 i + t_2 j + t_3 k \in 3Q$ آن‌گاه $t_0,\ t_1,\ t_2, t_3 \in 3\mathbb{Z}_{(3)} = J(\mathbb{Z}_{(3)})$ و بنابراین خواهیم داشت $1 - t_0 \in U(\mathbb{Z}_{(3)})$.

پس

$$(1 - t_0 + t_1 i + t_2 j + t_3 k)(1 - t_0 - t_1 i - t_2 j - t_3 k) = (1 - t_0)^2 + {t_1}^2 + {t_2}^2 + {t_3}^2 \in U(Q)$$

و از آن‌جا $1-t\in U(Q)$ و بنابراین $3Q\subseteq J(Q)$. از طرفی $\frac{Q}{3Q}$ یک حلقهٔ ساده است پس $J\left(\frac{Q}{3\mathrm{Q}}\right)=0$ و این نتیجه می‌دهد که $J(Q)\subseteq 3Q$. توجه کنید که $\frac{\mathbb{Z}_{(3)}}{3\mathbb{Z}_{(3)}}\cong\mathbb{Z}_3$. اما با در نظر گرفتن نگاشت زیر

$$\emptyset:\frac{Q}{3\mathrm{Q}}\to \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_3)$$

$$\emptyset(t_0+t_1i+t_2j+t_3k+3Q)=t_0\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که $\frac{Q}{\mathrm{J(Q)}}$ با $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ یک‌ریخت است که آرمنداریز (مک‌کوی راست) نمی‌باشد [تذکر ۳،۱، ۵]. بنابراین Q نیم آرمنداریز (به ترتیب، نیم مک‌کوی راست) نیست.

فرض کنید برای هر $t\in I$ ، R_t یک حلقه باشد. توجه کنید که $\prod_{t\in I}\frac{R_t}{J(R_t)}\cong\frac{\prod_{t\in I}R_t}{J(\prod_{t\in I}R_t)}$بنابراین حاصل‌ضرب حلقه‌های R_{t}، $t\in I$، $\prod_{t\in I}\mathrm{R_t}$یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) می‌باشد اگر و فقط اگر برای هر $t\in I$، R_{t} یک حلقهٔ نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) باشد از آن‌جا که برای هر حلقه R و n>1 حلقه $\mathrm{M_n(R)}$ ، J- آرمنداریز (به ترتیب، J- مک‌کوی راست) نیست [۵، تذکر ۳،۱] ، لذا نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) نیز نمی‌باشد و این بدان معنی است که خاصیت نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) از حلقه‌ها موریتا پایا نیست.

گزاره ۱.۱. برای حلقه R موارد زیر معادل‌اند:

(۱) R یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است.

(۲) R[[x]] یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است.

(۳) برای هر عضو خودتوان e در R، eRe یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است.

(۴) $T_n(R)$ یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است.

اثبات: از آن‌جا که $\frac{T_n(R)}{J(T_n(R))}\cong\frac{R}{J(R)}\times\frac{R}{J(R)}\times\ldots\times\frac{R}{J(R)}$ و $\frac{eRe}{\mathrm{J(eRe)}}\cong\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{J(R)}}$ و $\frac{R[[x]]}{\mathrm{J(R[[x]]}}\cong\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{J(R)}}$ پس گزاره برقرار است.

یادآوری می‌کنیم که حلقه R را آبلی می‌نامیم هر گاه خودتوان‌های آن مرکزی باشند. حلقه‌های آرمنداریز آبلی می‌باشند [۴، لم ۷]، اما حلقه‌های نیم‌آرمنداریز لزوماً آبلی نیستند. برای مثال، فرض کنید F یک میدان باشد. در این صورت طبق گزاره ۳،۲، $\mathrm{R}=\mathrm{T}_2(\mathrm{F})$ نیم‌آرمنداریز است ولی آبلی نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که حلقهٔ چندجمله‌ای از حلقه‌های نیم‌آرمنداریز در حالت کلی نیم‌آرمنداریز نیست.

مثال ۱.۲. فرض کنید F یک میدان، $\mathrm{R}=M_2(\mathrm{F})$ و $R_1=R[[t]]$ و $S=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i\in R_1|a_0\in kI\ ,k\in F\}$ جایی که I ماتریس همانی است. از آن‌جا که $J(S)=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i\in R_1|a_0=0\}$ پس $\frac{S}{\mathrm{J(S)}}=\{k(e_{11}+e_{22})|k\in F\}$ یک حلقهٔ بخشی است و بنابراین S یک حلقهٔ موضعی و بنابراین نیم‌آرمنداریز است. حال نشان می‌دهیم که S[x] (حلقهٔ

چندجمله‌ای‌ها روی S) نیم‌آرمنداریز نیست. برای این منظور $f(y)=e_{11}tx-e_{12}txy$ و $g(y)=e_{21}tx+e_{11}txy$ را در S[x])[y]) در نظر می‌گیریم. واضح است که $(e_{11}tx)^2$ متعلق به J(s[x]) نیست و بنابراین S[x] نیم‌آرمنداریز نمی‌باشد.

نتیجه ۱.۱. در حالت کلی یک زیرحلقه از حلقه‌های نیم‌آرمنداریز، نیم‌آرمنداریز نیست.

گزاره ۱.۲. فرض کنید R یک حلقه و J(R) [x]=J(R[x]). در این صورت، R یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است اگر و فقط اگر R[x] یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) باشد.

اثبات: تابع $\varphi: R[x]\to \frac{R}{J(R)}[x]$ را با ضابطهٔ $\varphi(f(x))=f(x)+J(R[x])$ در نظر می‌گیریم. به وضوح ϕ یک همریختی پوشاست و $\ker\varphi=J(R)[x]=J(R[x])$. پس $\frac{R[x]}{J(R[x])}\cong\left(\frac{R}{J(R)}\right)[x]$. بنا به [۱، قضیهٔ ۲] (به ترتیب، [۱۵، قضیهٔ ۱]) حلقهٔ R آرمنداریز (به ترتیب، مک‌کوی) است اگر و فقط اگر R[x] آرمنداریز (به ترتیب، مک‌کوی) باشد و بنابراین حکم برقرار است.

گزاره ۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌الی از آن باشد به طوری که $I\subseteq J(R)$. در این صورت، R یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است اگر و فقط اگر $\frac{R}{I}$ یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) باشد.

اثبات: از آن‌جا که $I\subseteq J(R)$، پس $J\left(\frac{R}{I}\right)=\frac{J(R)}{I}$. چون $\frac{R}{J(R)}\cong\frac{\frac{R}{I}}{J(\frac{R}{I})}$، بنابراین حکم برقرار است.

فرض کنید R, S دو حلقه و M یک (R,S)- دو مدول باشد (یعنی M یک R- مدول چپ و یک S− مدول راست باشد و برای هر $r\in R$، $m\in M$ و $s\in S$، (rm)s=r(ms)). در این صورت قرار می‌دهیم: $T=\begin{pmatrix}R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix} r\in R, m\in M, s\in S\right\}$ و ضرب در T را با استفاده از ضرب معمولی در ماتریس‌ها به صورت $\begin{pmatrix}r_1 & m_1\\ 0 & s_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_2 & m_2\\ 0 & s_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1r_2 & r_1m_2+m_1s_2\\ 0 & s_1s_2\end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. این ساختار از حلقه، حلقهٔ بالامثلثی T نامیده می‌شود.

گزاره ۱.۴. فرض کنید R و S دو حلقه، M یک (R,S)-دو مدول و T حلقهٔ بالامثلثی $\begin{pmatrix}R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}$ باشد. در این صورت، R و S حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) هستند اگر و فقط اگر T یک حلقه نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) باشد.

اثبات: از آن‌جا که $\frac{T}{J(T)}\cong\frac{R}{J(R)}\times\frac{S}{J(S)}$، بنابراین حکم برقرار است.

حلقهٔ R را شبه-دو راست (به ترتیب، چپ) می‌نامیم هرگاه هر ایده‌ال راست (به ترتیب، چپ) ماکسیمال، یک ایده‌ال دوطرفه باشد. اگر R یک حلقه شبه-دو راست (چپ) باشد آن‌گاه طبق [۱۶، گزاره ۴,۳]، $\frac{R}{J(R)}$ حلقهٔ کاهشی است. و چون حلقه‌های کاهشی آرمنداریز می‌باشند بنابراین R یک حلقهٔ نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) می‌باشد ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. برای نمونه، دامنه ابتدایی راست R را در نظر بگیرید به طوری که حلقهٔ بخشی نباشد (به عنوان مثال، جبر آزاد $R=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$). در این صورت R، نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست) است اما طبق [۱۶، گزارهٔ ۴,۱]، R شبه- دو راست نیست. بنابراین کلاس حلقه‌های نیم‌آرمنداریز (به ترتیب، نیم‌مک‌کوی راست)، بین کلاس حلقه‌های شبه-دو راست (چپ) و کلاس حلقه‌های J- آرمنداریز (J- مک‌کوی) قرار می‌گیرد.

References

1. D. D. Anderson, V. Camillo, Armendariz rings and Gaussian rings, Comm. Algebra 26 (1998), no. 7, 2265-2272.

2. E. P. Armendariz, A Note on Extensions of Baer and p.p-rings, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470-473.

3. C. Huh, Y. Lee, A. Smoktunowicz, Armendariz rings and semicommutative rings, Comm. Algebra 30 (2002), no. 2, 751-761.

4. N. K. Kim, Y. Lee, Armendariz rings and reduced rings, J. Algebra. 223 (2000), no.2, 477-488.

5. M. B. Rege, S. Chhawchharia, Armendariz rings, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. 73 (1997), 14-17.

6. Ch. Y. Hong, N. k. Kim, T. K. Kwak, On Skew Armendariz rings, Comm. Algebra 31(2003), no.1, 103-122.

7. Z. Liu, R. Zhao, On weak Armendariz rings, Comm. Algebra 34 (2006), no. 7, 2607-2616.

8. M. Sannaei, Sh. Sahebi, H. H.S. Javadi, J-Armendariz rings, Journal of Mathematical extension, 12 (2017), no. 2, 65-74 .

9. M. Baser, T. K. Kwak, Y. Lee., The McCoy condition on skew polynomial rings. Comm. Algebra 37 (2009), no.11, 4026-4037.

10. M. T. Kosan, Extention of rings having McCoy condition, Canad. Math. Bull. 2 (2009), 267-272.

11. N. H. McCoy, Remarks on divisors of zero, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 286-295.

12. V. Camillo, T. K. Kwak, Y. Lee., On a generalization of McCoy rings, J. Korean Math.Soc. 50 (2013), no.5, 959-972.

13. M. Vahdani, Sh, Sahebi, H. H. S. Javadi, On a generalization of NC-McCoy rings, Miskolc Mathematical Notes, 18 (2017), no. 1, 337-345.

14. P.P Nielsen, Semi-commutativity and the McCoy condition, J. Algebra, 98, (2006), 134-141.

15. Z. Lei, J. Chen, Z. Ying, A question on McCoy rings, Bull. Austral. Math. Soc., 76 (2007), 137-141.

16. T.Y. Lam, A. S. Dugas, Quasi-duo rings and stable range descent, J. Appl. Algebra. 195, 3, (2005), 243-259.