حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته

سمیه نعمتی*؛ دانشگاه مازندران، دانشکدهٔ علوم ریاضی،گروه ریاضی، بابلسر، ایران
یدالله اردوخانی؛ دانشگاه الزهرا، دانشکدهٔ علوم ریاضی،گروه ریاضی، تهران، ایران

دریافت ۹۶/۰۸/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۲/۰۳

چکیده

در این مقاله، با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته به حل عددی دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری می‌پردازیم. ابتدا به معرفی حساب کسری و توابع کلاهی بهبود یافته می‌پردازیم. انتگرال کسری از نوع ریمان-لیوویل و مشتق کسری از نوع کاپوتو در نظر گرفته می‌شوند. سپس، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری، حاصل‌ضرب و ماتریس عملیاتی تأخیری برای بردار توابع پایه‌ای مورد نظر معرفی می‌شوند. برای حل مسئله کنترل بهینه، توابع موجود در مسئله با استفاده از توابع پایه‌ای تقریب زده می‌شوند. با استفاده از خواص توابع کلاهی بهبود یافته و ماتریس‌های عملیاتی معرفی شده، دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی حاصل می‌شود. با حل دستگاه حاصل، ضرایب مجهول توابع وضعیت و ورودی کنترل تعیین شده و با جای‌گذاری این مقادیر، تقریبی از جواب مسئله حاصل می‌شود. در پایان، چند مثال عددی گوناگون از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری برای تأیید دقت و کارآیی روش پیشنهادی در نظر گرفته می‌شود.

واژه‌ای کلیدی: مسئلهٔ کنترل بهینه کسری تأخیری، توابع کلاهی بهبود یافته، انتگرال ریمان-لیوویل، مشتق کاپوتو، ماتریس عملیاتی انتگرال، ماتریس عملیاتی حاصلضرب، ماتریس عملیاتی تأخیر

مقدمه

در دهه‌های اخیر، موضوع حساب کسری که شامل نظریه‌های مشتقات و انتگرال‌ها از هر مرتبهٔ دلخواه غیرصحیحی است، به‌طور گسترده در توصیف بسیاری از پدیده‌های جهان واقعی مانند: آب‌شناسی [1]، مدل انتقال گرما [2]، مدل ویسکوالاستیسیته پویا [3]، مالی [4]، کنترل موتور و دما [5] و پدیده‌های دیگر [6]-[8]، استفاده شده است. بنابراین، معرفی روش‌هایی برای تعیین جواب‌های مدل‌های با مرتبهٔ کسری اهمیت زیادی دارد. اغلب، این مدل‌ها شامل معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل کسری هستند. تعیین جواب‌های تحلیلی برای این دسته از معادلات دشوار و یا غیرممکن است. از این‌رو، روش‌های عددی بسیاری برای یافتن تقریبی از جواب آن‌ها معرفی شده‌اند. برخی از این روش‌ها، روش طیفی تاو [9]، روش تبدیل سومودو[۱] [10]، روش موجک‌ها [11]، روش عناصر متناهی [12] و روش هم‌محلی [13]، [14] هستند.

تعریف کلی یک مسئله کنترل بهینه به کمینه‌سازی یک تابعی روی مجموعه‌ای از متغیرهای کنترل و وضعیت، که به آن شاخص عملکرد گفته می‌شود، تحت محدودیت‌های دینامیکی روی وضعیت‌ها و کنترل‌ها اشاره دارد. برخی از

*نویسنده مسئول s.nemati@umz.ac.ir

1. Sumudu

معادلات دیفرانسیل کسری وجود دارند که به‌عنوان محدودیت‌های دینامیکی استفاده می‌شوند و منجر به مسئلهٔ کنترل بهینه کسری می‌شوند. مسائل کنترل بهینه کسری به‌دلیل کاربرد در مهندسی و فیزیک توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. به‌عنوان مثال، نشان داده شده است که مواد با اثرات حافظه‌ای و موروثی، و فرآیندهای دینامیکی شامل پخش گاز و هدایت گرما، در ناحیهٔ متخلخل فراکتال با استفاده از مدل‌های مرتبه کسری مناسب‌تر از مدل‌های مرتبه صحیح مدل‌بندی می‌شوند [15]. کاربردهای دیگری از مسائل کنترل بهینه کسری را می‌توان در [16]-[18] یافت. اکثر مسائل کنترل بهینه کسری دارای جواب‌های تحلیلی و دقیق نیستند، بنابراین روش‌های عددی باید برای حل این‌گونه مسائل معرفی و انتخاب شوند. کارهای زیادی در زمینهٔ کنترل بهینهٔ سیستم‌های دینامیکی از مرتبه صحیح انجام شده است (مانند [19]-[21]). با وجود کاربردهای وسیع مسائل کنترل بهینه کسری، اخیراً، برخی از محققان سعی کرده‌اند به گسترش روش‌های عددی برای حل این نوع از مسائل بپردازند که از بین آن‌ها می‌توان به‌روش‌های بیان شده در [22]-[34] اشاره کرد.

نظریه معادلات دیفرانسیل تأخیری که در بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی مانند ارتباطات، سیستم‌های قدرت، حمل و نقل، بیولوژی، الکترونیک و شیمی کاربرد دارد (به [۳۵]، [۳۶] مراجعه شود)، اولین بار در سال ۱۹۷۷ میلادی در [۳۷] معرفی شد. مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری یک مسئله کنترل بهینه است که در آن شاخص عملکرد تحت معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری در نظر گرفته می‌شود [۳۸]-[۴۰]. در [۴۱] یک روش عددی بر اساس چندجمله‌ای‌های برنشتاین[1] برای حل مسئله کنترل بهینه کسری که در آن تأخیر در تابع وضعیت ظاهر می‌شود، معرفی شده است. درحالی‌که، نویسندگان در [۴۲] یک تکنیک عددی برای حل مسئله کنترل بهینه که در آن تأخیر هم در تابع وضعیت و هم در کنترل رخ می‌دهد پیشنهاد کرده‌اند. از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های لژاندر[2] در [۴۳] برای حل این نوع از مسائل استفاده شده است. در آخر، در [۴۴] یک روش عددی، با استفاده از پایه موجک‌های برنولی[3] برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه شده است. در روش‌های ذکر شده، شاخص عملکرد مربعی در نظر گرفته شده است.

در این مقاله، مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\min J = \int_0^{t_f} h(t, x(t), u(t))dt, \quad (۱)$$

با شرایط

$$\begin{aligned} &D^{\alpha} x(t) = c(t)x(t) + d(t)u(t) + e(t)x(t-\mu) + f(t)u(t-\delta) + g(t), \\ &x(t) = a(t), \quad t \in [-\mu, 0], \\ &u(t) = b(t), \quad t \in [-\delta, 0], \\ &D^{(i)} x(0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{aligned} \quad (۲)$$

و

$$0 \le t \le t_f \ \ ,0 < \mu, \delta < t_f \ \ ,n-1 < \alpha \le n .$$

در این‌جا، مشتق در مفهوم کاپوتو فرض می‌شود. ابتدا شکل انتگرالی محدودیت دینامیکی در (۲) را در مفهوم ریمان-لیویل به‌دست می‌آوریم. سپس، با استفاده از تقریب متغیرهای وضعیت، کنترل و هم‌چنین دیگر توابع موجود در محدودیت دینامیکی (۲) بر اساس توابع کلاهی بهبود یافته، استفاده از ماتریس‌های عملیاتی این توابع، روش

1. Bernstein
2. Legendre
3. Bernoulli

انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر و در آخر، روش ضرایب لاگرانژ، مسئله به حل دستگاهی از معادلات جبری کاهش می‌یابد. توابع کلاهی بهبود یافته برای حل برخی از معادلات از جمله، معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی [45]، معادلات انتگرال ولترای استراتونویچ[1] [46]، معادلات انتگرال ولترا-فردهلم [47]، دستگاهی از معادلات انتگرال ولترای خطی استراتونویچ و هم‌چنین برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [49]، استفاده شده‌اند و نشان داده شده که تقریب توابع با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته نسبت به توابع کلاهی دارای میزان همگرایی بیش‌تری است.

در این مقاله، ابتدا مقدماتی از حساب کسری و سپس خواص توابع کلاهی بهبود یافته در بخش دوم بیان می‌شود. در بخش سوم، به معرفی ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری، حاصل‌ضرب و تأخیر توابع کلاهی بهبود یافته می‌پردازیم. بخش چهارم به بیان یک تکنیک عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری به شکل (۱) تحت شرایط (۲) اختصاص می‌یابد. برای نشان دادن کارآیی و دقت روش، مثال‌هایی در بخش پنجم در نظر گرفته می‌شود. در آخر، در بخش ششم به بیان نتایج می‌پردازیم.

مفاهیم اساسی

عملگرهای انتگرال و مشتق کسری

در این بخش به صورت مختصر به مرور برخی از مفاهیم اولیه در حساب کسری پرداخته می‌شود . انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو دو تعریف از پر استفاده‌ترین تعاریف انتگرال‌ها و مشتقات کسری هستند.

تعریف ۱. عملگر انتگرال ریمان-لیوویل I^{α} از مرتبه $\alpha \geq 0$ بدین‌صورت تعریف می‌شود [50]:

$$\mathrm{I}^{\alpha} y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau)d\tau, & \alpha>0,\\ y(t), & \alpha=0,\end{cases} \tag{۳}$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

تابع گامای اویلر است.

تعریف ۲. فرض کنید $\alpha > 0$، $n-1<\alpha \leq n$، $n \in \mathbb{N}$ و y یک تابع پیوسته حقیقی مقدار تعریف شده روی $[0,\infty)$ باشد، آن‌گاه مشتق کسری کاپوتو بدین‌صورت تعریف می‌شود [50]

$$D^{\alpha}\big(y(t)\big)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}\mathrm{y}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو در خاصیت (۴) صدق می‌کنند:

$$I^{\alpha}(D^{\alpha}y(t))=y(t)-\sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!},\quad n-1<\alpha\leq n,\ t>0. \tag{۴}$$

توابع کلاهی بهبود یافته و خواص آن‌ها

توابع کلاهی بهبود یافته $\{\psi_i(t)\}_{i=0}^{n}$ روی بازه $[0,t_f]$ به‌صورت (۵) تعریف می‌شوند [45]. در واقع بازهٔ مذکور به n زیربازه $[ih,(i+1)h]$ برای $i=0,1,2,\dots,n-1$ تقسیم می‌شود که در آن $n\geq 2$، $h=\frac{t_f}{n}$ و n یک عدد صحیح زوج است.

---

1 Stratonovich

$$\psi_0(t)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(t-h)(t-2h), & 0\le t\le 2h,\\ 0, & \text{در غیر این‌صورت},\end{cases}\qquad (۵)$$

اگر i فرد باشد و $1\le i\le n-1$، داریم

$$\psi_i(t)=\begin{cases}\frac{-1}{h^2}(t-(i-1)h)(t-(i+1)h), & (i-1)h\le t\le (i+1)h,\\ 0, & \text{در غیر این‌صورت},\end{cases}\qquad (۶)$$

اگر i زوج باشد و $2\le i\le n-2$، داریم:

$$\psi_i(t)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(t-(i-1)h)(t-(i-2)h), & (i-2)h\le t\le ih,\\ \frac{1}{2h^2}(t-(i+1)h)(t-(i+2)h), & ih\le t\le (i+2)h,\\ 0, & \text{در غیر این‌صورت},\end{cases}\qquad (۷)$$

و

$$\psi_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}\left(t-\left(t_f-h\right)\right)\left(t-\left(t_f-2h\right)\right), & t_f-2\mathrm{h}\le \mathrm{t}\le t_f,\\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}.\end{cases}\qquad (۸)$$

توابع کلاهی بهبود یافته در فضای $L^2[0,t_f]$ مستقل خطی هستند. هم‌چنین، با استفاده از تعریف این توابع، خواص زیر برقرار است:

$$\psi_i(jh)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\psi_i(t)=1,$$

$$\psi_i(t)\psi_j(t)=\begin{cases}0, & |i-j|\ge 3 \text{ اگر } i \text{ زوج باشد و},\\ 0, & |i-j|\ge 2 \text{ اگر } i \text{ فرد باشد و}.\end{cases}$$

یک تابع دلخواه $\mathrm{y}\in \mathrm{L}^2[0,t_f]$ را می‌توان با استفاده از ترکیب خطی توابع کلاهی بهبود یافته به‌صورت (۹) تقریب زد،

$$\mathrm{y}(\mathrm{t})>\mathrm{y}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i\psi_i(t)=A^T\Psi(t),\qquad (۹)$$

که در آن

$$\Psi(\mathrm{t})=[\psi_0(t),\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)]^T,\qquad (۱۰)$$

$$A=[a_0,a_1,\ldots,a_n]^T,\qquad (۱۱)$$

به‌طوری‌که $a_i=y(ih)$.

ماتریس‌های عملیاتی توابع کلاهی بهبود یافته

در این بخش به معرفی ماتریس‌های عملیاتی انتگرال‌گیری کسری، حاصلضرب و تأخیر توابع کلاهی بهبود یافته می‌پردازیم.

ماتریس عملیاتی انتگرال کسری

با استفاده از تعریف عملگر انتگرال ریمان-لیوویل در (۳) داریم

$$I^{\alpha}\psi_i(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\psi_i(\tau)\,d\tau. \qquad (۱۲)$$

اکنون بسط تابع $I^{\alpha}\psi_i(t)$ را با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$I^{\alpha}\psi_i(t)\simeq\sum_{j=0}^{n}\gamma_{ij}\psi_i(\tau), \qquad i=0,1,\dots,n,$$

که در آن ضرایب γ_{ij} مقدار $I^{\alpha}\psi_i(t)$ در نقطه jh هستند. بنابراین، با استفاده از (۱۲) داریم:

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{jh}(jh-\tau)^{\alpha-1}\psi_i(\tau)\,d\tau, \qquad i,j=0,1,2,\dots,n. \qquad (۱۳)$$

از معادلات (۵)-(۸)، ملاحظه می‌شود که $\psi_i(t)$ برای $i=0,1,2,\dots,n$، یک چندجمله‌ای قطعه‌ای از درجهٔ دو است، به‌همین دلیل قسمت انتگرالی (۱۳) به‌راحتی قابل محاسبه است.

با جای‌گذاری (۵) در (۱۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\gamma_{0j}=\begin{cases}0, & j=0,\\[2ex] \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}[\alpha(3+2\alpha)], & j=1,\\[2ex] \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}[j^{\alpha+1}(2j-6-3\alpha)+2j^{\alpha}(1+\alpha)(2+\alpha) \\ \quad -(j-2)^{\alpha+1}(2j-2+\alpha)], & j>1.\end{cases} \qquad (۱۴)$$

با در نظر گرفتن تعریف $\psi_i(t)$ برای i های فرد نتیجه می‌گیریم

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & j<i,\\[2ex] \dfrac{2h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}(1+\alpha), & j=i,\\[2ex] \dfrac{2h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}[(j-i-1)^{\alpha+1}(j-i+1+\alpha) \\ \quad -(j-i+1)^{\alpha+1}(j-i-1-\alpha)], & j>i,\end{cases} \qquad (۱۵)$$

و هم‌چنین به‌ازای i زوج داریم

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & j<i-1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}(-\alpha), & j=i-1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\left[2^{\alpha+1}(2-\alpha)\right], & j=i,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}[3^{\alpha+1}(4-\alpha)-6(2+\alpha)], & j=i+1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}[(j-i+2)^{\alpha+1}(2j-2i+2-\alpha)-6(j-i)^{\alpha+1} & \\ \times(2+\alpha)-(j-i-2)^{\alpha+1}(2j-2i-2+\alpha)], & j>i+1.\end{cases} \tag{۱۶}$$

با توجه به مطالب بیان شده، قضیهٔ ۱برقرار است.

قضیهٔ ۱: فرض کنید $\Psi(t)$ بردار توابع کلاهی بهبود یافته در (۱۰) و $\alpha>0$ باشد، آن‌گاه

$$I^{\alpha}\Psi(t)>P^{(\alpha)}\Psi(t), \tag{۱۷}$$

به‌طوری‌که $P^{(\alpha)}$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبهٔ $(n+1)\times(n+1)$ است که به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$P^{(\alpha)}=\frac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\begin{bmatrix}0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n\\ 0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-2} & \eta_{n-1}\\ 0 & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{n-3} & \xi_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{n-4} & \eta_{n-3}\\ 0 & 0 & 0 & \xi_{-1} & \xi_0 & \dots & \xi_{n-5} & \xi_{n-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_0 & \eta_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{-1} & \xi_0\end{bmatrix},$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha(3+2\alpha),\\
&\beta_k = k^{\alpha+1}(2k-6-3\alpha)+2k^{\alpha}(1+\alpha)(2+\alpha)-(k-2)^{\alpha+1}(2k-2+\alpha),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=2,3,\ldots,n,\\
&\eta_0 = 4(1+\alpha),\\
&\eta_k = 4[(k-1)^{\alpha+1}(k+1+\alpha)-(k+1)^{\alpha+1}(k-1-\alpha)],\ \ k=1,2,\ldots,n-1,\\
&\xi_{-1} = -\alpha,\\
&\xi_0 = 2^{\alpha+1}(2-\alpha),\\
&\xi_1 = 3^{\alpha+1}(4-\alpha)-6(2+\alpha),\\
&\xi_k = (k+2)^{\alpha+1}(2k+2-\alpha)-6k^{\alpha+1}(2+\alpha)-(k-2)^{\alpha+1}(2k-2+\alpha),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=2,3,\ldots,n-2.
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

اثبات: با معرفی $\mathrm{k}=\mathrm{j}-\mathrm{i}$ در معادلات (۱۴)-(۱۶)، رابطهٔ (۱۷) با درایه‌های ماتریس $P^{(\alpha)}$ که در (۱۸) داده شده است به‌دست می‌آید.

اگر تابع y توسط توابع کلاهی بهبود یافته به‌صورت معادلهٔ (۹) تقریب زده شود، آن‌گاه می‌توان $I^{\alpha}y(t)$ را با استفاده از (۱۷) بدین‌صورت تقریب زد:

$$I^{\alpha}y(t) > I^{\alpha}y_n(t) > A^T P^{(\alpha)}\Psi(t).$$

ماتریس عملیاتی حاصلضرب

اگر بردارهای $\Psi(t)$ و A به‌ترتیب به‌صورت (۱۰) و (۱۱) تعریف شوند، آن‌گاه داریم [45]:

$$\Psi(t)\Psi^T(t)A > \tilde{A}\Psi(t), \tag{۱۹}$$

که در آن $\tilde{A}$ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب از مرتبهٔ $n+1$ است که بدین‌صورت داده می‌شود:

$$\widetilde{A} = diag(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

ماتریس عملیاتی تأخیر

به‌منظور معرفی ماتریس عملیاتی تأخیر، هر یک از توابع $\psi_i(t-\mu)$ را که در آن $\mu > 0$ است، با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته تقریب می‌زنیم. بنابراین، با جای‌گذاری $\psi_i(t-\mu)$ به‌جای y در (۹) داریم:

$$\psi_i(t-\mu) > \sum_{j=0}^{n}\psi_i(jh-\mu)\psi_j(t).$$

با در نظر گرفتن بردار پایه‌ای $\Psi(t)$ داریم:

$$\Psi(t-\mu) > R_{\mu}\Psi(t), \tag{۲۰}$$

که در آن R_{μ} ماتریس عملیاتی تأخیر نامیده می‌شود و یک ماتریس از مرتبهٔ $(n+1)\times(n+1)$ بدین‌صورت است:

$$R_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \psi_0(h-\mu) & \psi_0(2h-\mu) & \cdots & \psi_0(nh-\mu) \\ 0 & \psi_1(h-\mu) & \psi_1(2h-\mu) & \ldots & \psi_1(nh-\mu) \\ 0 & \psi_2(h-\mu) & \psi_2(2h-\mu) & \cdots & \psi_2(nh-\mu) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \psi_n(h-\mu) & \psi_n(2h-\mu) & \cdots & \psi_n(nh-\mu) \end{bmatrix}.$$

اگر تابع y توسط توابع کلاهی بهبود یافته به‌صورت معادله (۹) تقریب زده شود، آن‌گاه می‌توان $y(t-\mu)$ را با استفاده از (۲۰) بدین‌صورت تقریب زد:

$$y(t-\mu) > A^T R_\mu \Psi(t).$$

حل عددی مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری

در این بخش، به حل عددی مسائل کنترل بهینه به‌صورت (۱)-(۲) با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته می‌پردازیم. برای رسیدن به این هدف، توابع x، u، c، d، e، f و g را با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته، به‌ترتیب، بدین‌صورت تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned}
x(t) &> \sum_{i=0}^{n} x_i \psi_i(t) = X^T \Psi(t),\\
u(t) &> \sum_{i=0}^{n} u_i \psi_i(t) = U^T \Psi(t),\\
c(t) &> \sum_{i=0}^{n} c_i \psi_i(t) = C^T \Psi(t),\\
d(t) &> \sum_{i=0}^{n} d_i \psi_i(t) = D^T \Psi(t),\\
e(t) &> \sum_{i=0}^{n} e_i \psi_i(t) = E^T \Psi(t),\\
f(t) &> \sum_{i=0}^{n} f_i \psi_i(t) = F^T \Psi(t),\\
g(t) &> \sum_{i=0}^{n} g_i \psi_i(t) = G^T \Psi(t),
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

به‌طوری‌که درایه‌های بردارهای X و U مجهول و درایه‌های بردارهای C، D، E، F و G معلوم هستند که با جای‌گذاری توابع متناظر در (۹) حاصل می‌شوند. با جای‌گذاری تقریب‌های توابع x و u در شاخص عملکرد J، تقریبی از آن بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$J[X,U] > \int_0^{t_f} h(t, X^T\Psi(t), U^T\Psi(t))dt. \tag{۲۲}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر برای انتگرال (۲۲)، داریم

$$J[X,U] = \frac{t_f}{2}\sum_{k=1}^{m}\omega_k h\left(\frac{t_f}{2}(\tau_k+1), X^T\Psi\left(\frac{t_f}{2}(\tau_k+1)\right), U^T\Psi\left(\frac{t_f}{2}(\tau_k+1)\right)\right), \tag{۲۳}$$

که در آن τ_k، $k=1,2,\ldots,m$، صفرهای چندجمله‌ای لژاندر از درجهٔ m و ω_kها وزن‌های متناظر هستند [51].

حال متغیر وضعیت تأخیری $x(t-\mu)$ و متغیر کنترل تأخیری $u(t-\delta)$ با استفاده از (۲۰) و (۲۱) به‌صورت (۲۴) تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
x(t-\mu) &> X^T\Psi(t-\mu) > X^T R_\mu \Psi(t),\\
u(t-\delta) &> U^T\Psi(t-\delta) > U^T R_\delta \Psi(t).
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

از طرف دیگر، با اعمال انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبهٔ α روی سیستم دینامیکی (۲) و با استفاده از خاصیت بیان شده در (۴)، داریم:

$$x(t)-x_0(t)=I^{\alpha}[c(t)x(t)+d(t)u(t)+e(t)x(t-\mu)+f(t)u(t-\delta)+g(t)], \qquad (۲۵)$$

که در آن $x_0(t)=a(0)+\sum_{i=1}^{n-1}x_0^i\frac{t^i}{i!}$.

اکنون با جای‌گذاری تقریب‌های (۲۱) و (۲۴) در (۲۵) تقریبی از سیستم دینامیکی در (۲) به‌صورت (۲۶) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}X^T\Psi(t)-A^T\Psi(t)=I^{\alpha}[&X^T\Psi(t)\Psi^T(t)C+U^T\Psi(t)\Psi^T(t)D\\&+X^TR_{\mu}\Psi(t)\Psi^T(t)E+U^TR_{\delta}\Psi(t)\Psi^T(t)F+G^T\Psi(t)],\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که در آن A بردار ضرایب تقریب تابع $x_0(t)$ بر اساس توابع کلاهی بهبود یافته است که با جای‌گزینی تابع $x_0(t)$ در (۹) به‌دست می‌آید. با استفاده از (۱۷) و (۱۹) در (۲۶) داریم:

$$\begin{aligned}X^T\Psi(t)-A^T\Psi(t)=&X^T\tilde{C}P^{(\alpha)}\Psi(t)+U^T\tilde{D}P^{(\alpha)}\Psi(t)+X^TR_{\mu}\tilde{E}\Psi(t)\\&+U^TR_{\delta}\tilde{F}P^{(\alpha)}\Psi(t)+G^TP^{(\alpha)}\Psi(t).\end{aligned}$$

با توجه به استقلال خطی توابع کلاهی بهبود یافته، سیستم دینامیکی در (۲) به دستگاهی از معادلات جبری خطی بدین‌صورت کاهش می‌یابد:

$$X^T-A^T-X^T\tilde{C}P^{(\alpha)}-U^T\tilde{D}P^{(\alpha)}-X^TR_{\mu}\tilde{E}-U^TR_{\delta}\tilde{F}P^{(\alpha)}-G^TP^{(\alpha)}=0.$$

از طرف دیگر، با توجه به شرط اولیه برای تابع u در (۲) و تقریب این تابع در معادله (۲۱) داریم

$$u(0)=b(0)>U^T\Psi(0),$$

و یا

$$U^T\Psi(0)-b(0)=0.$$

اکنون، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}J^*[X,U,\lambda_1,\lambda_2]=J[X,U]+[&X^T-A^T-X^T\tilde{C}P^{(\alpha)}-U^T\tilde{D}P^{(\alpha)}-X^TR_{\mu}\tilde{E}\\&-U^TR_{\delta}\tilde{F}P^{(\alpha)}-G^TP^{(\alpha)}]\lambda_1+[U^T\Psi(0)-b(0)]\lambda_2.\end{aligned}$$

که در آن λ_2 ضریب لاگرانژ مجهول و λ_1 بردار ضرایب لاگرانژ مجهول به شکل

$$\lambda_1=[\lambda_{1,0},\lambda_{1,1},\lambda_{1,2},\ldots,\lambda_{1,n}]^T,$$

است. با توجه به روش ضرایب لاگرانژ، شرایط بهینگی شاخص عملکرد (۱) تحت شرایط (۲) به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial J^*[X,U,\lambda_1,\lambda_2]}{\partial X}=0, &&\frac{\partial J^*[X,U,\lambda_1,\lambda_2]}{\partial U}=0,\\&\frac{\partial J^*[X,U,\lambda_1,\lambda_2]}{\partial \lambda_1}=0, &&\frac{\partial J^*[X,U,\lambda_1,\lambda_2]}{\partial \lambda_2}=0.\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

مجهول‌های X، U، λ_1 و λ_2 با حل دستگاه معادلات (۲۷) حاصل می‌شوند. با جای‌گذاری تقریب‌های تابع وضعیت $x(t)>X^T\Psi(t)$ و تابع کنترل ورودی $u(t)>U^T\Psi(t)$ در (۲۳)، تقریبی از شاخص عملکرد بهینه حاصل می‌شود.

مثال‌های عددی

در این بخش، به‌منظور نشان دادن دقت و کارآیی روش پیشنهادی، چند نوع مختلف از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری را در نظر می‌گیریم و این روش را برای حل آن‌ها اعمال می‌کنیم. قابل ذکر است که در همهٔ مثال‌های این بخش برای انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر از $m=10$ استفاده شده است. برنامه‌های مربوط به این مثال‌ها با نرم‌افزار متمتیکا نوشته و اجرا شده‌اند. هم‌چنین، برای حل دستگاه معادلات حاصل از روش تکراری نیوتن استفاده شده است.

مثال ۱: مسئله کنترل بهینه کسری (۲۸) که در آن هیچ تأخیری رخ نمی‌دهد را در نظر می‌گیریم [24]:

$$\min \quad J=\int_0^1\left[\left(x(t)-t^2\right)^2+\left(u(t)+t^4-\frac{20t^{9/10}}{9\Gamma(9/10)}\right)^2\right]dt, \qquad (۲۸)$$

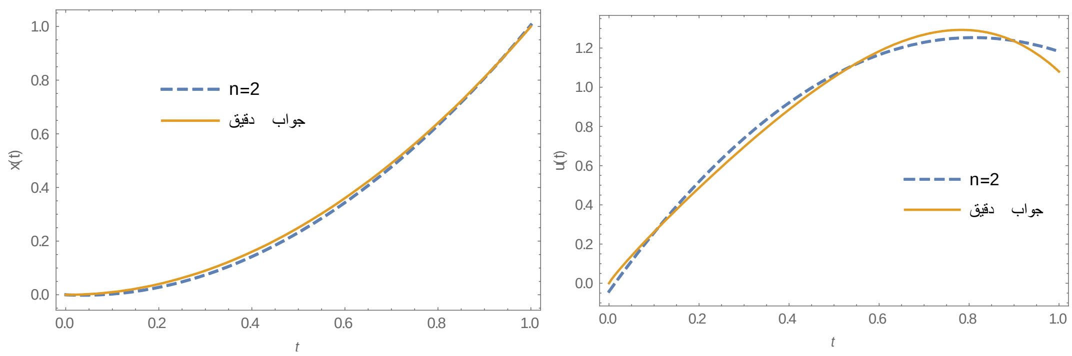
با شرایط

$$\begin{aligned} &D^{1.1}x(t)=t^2x(t)+u(t),\\ &x(0)=x'(0)=0. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

توابع $x(t)=t^2$ و $u(t)=t^4+\frac{20}{9\Gamma(\frac{9}{10})}t^{9/10}$ کمینه‌کنندهٔ شاخص عملکرد J هستند و مقدار کمینهٔ $J=0$ است. با استفاده از روش پیشنهادی و با مقادیر مختلف n مسئلهٔ (۲۸)-(۲۹) را حل می‌کنیم. مقادیر تقریبی J حاصل از روش بیان شده در این مقاله و جواب حاصل از روش ارائه شده در [24] با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و با $m=8$، در جدول ۱ گزارش شده‌اند. با قرار دادن $n=2$ مقدار تقریبی $J=1.314e-3$ حاصل می‌شود. نمودار جواب‌های تقریبی برای توابع u و x با $n=2$ به‌همراه جواب‌های دقیق آن‌ها در شکل ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱. مقایسه مقادیر تقریبی شاخص عملکرد J به‌ازای مقادیر مختلف n با روش [۲۴] برای مثال ۱ با $\alpha=1$

روش توابع کلاهی بهبود یافته							روش لژاندر [24]
n							m
4	8	16	32	64	128	258	8
۳/۶۶۳e-۵	۱/۴۸۶e-۶	۱/۲۹۱e-۷	۱/۶۹۴e-۸	۲/۴۰۶e-۹	۳/۴۱۲e-۱۰	۶/۳۳۸e-۱۱	7.034e-8



شکل ۱. مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی تابع کنترل u (سمت راست) و تابع وضعیت x (سمت چپ) با استفاده از $n=2$ برای مثال ۱

مثال ۲: مسئله کنترل بهینه کسری زیر که در آن تأخیر در تابع وضعیت وجود دارد را در نظر می‌گیریم [42]-[44]، [52].

$$\min \quad J=\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2(t)+u^2(t))dt,$$

با سیستم دینامیکی

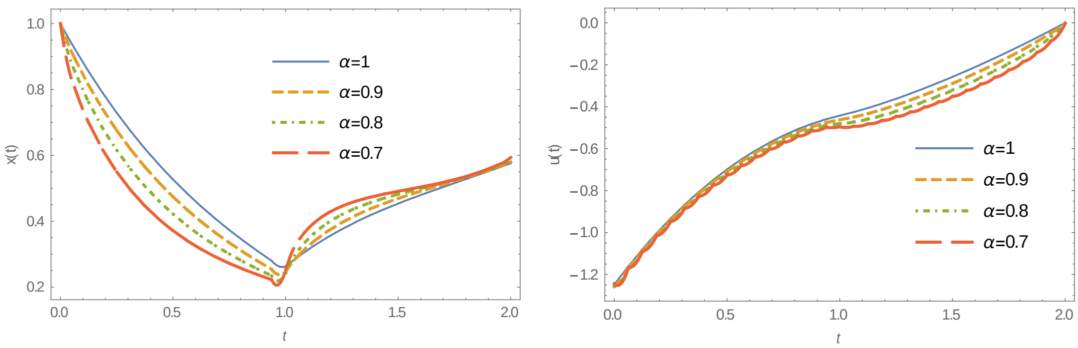
$$D^{\alpha}x(t)=x(t-1)+u(t), \qquad 0<\alpha\le 1,$$
$$x(t)=1, \qquad t\in[-1,0],$$

که در آن $0\le t\le 2$ و در $t<-1$، $x(t)=0$.

جواب‌های عددی با استفاده از روش حاضر با n های مختلف و با $\alpha=1$ به‌همراه نتایج عددی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین [42]، چندجمله‌ای‌های لژاندر [43]، موجک‌های برنولی [44] و توابع هایبرید بلاک-پالس و لژاندر [52]، در جدول ۲ نمایش داده شده است. هم‌چنین، جواب‌های عددی با $n=64$ و مقادیر مختلف α برای تابع کنترل ورودی u و تابع وضعیت x در شکل ۲ رسم شده‌اند.

جدول ۲. مقادیر تقریبی J به ازای مقادیر مختلف n و مقایسه آنها با روش‌های موجود دیگر برای مثال ۲ با $\alpha=1$

روش	توابع کلاهی بهبود یافته								
n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲
J	۱/۲۱۱۶	۰/۶۸۷۵	۰/۶۵۸۵	۰/۶۴۰۴	۰/۶۳۱۲	۰/۶۲۶۶	۰/۶۲۴۳	۰/۶۲۳۱	۰/۶۲۲۵
روش	چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۴۲] ($m=$۶)		چندجمله‌ای‌های لژاندر [۴۳] ($M=$۶)		موجک‌های برنولی [۴۴] ($M=$۶، $k=$۲)		هایبرید لژاندر [۵۲] ($M=$۴، $K=$۴)		
J	۰/۶۳۸۱		۰/۴۷۲۷		۰/۳۰۴۸		۰/۸۵۱۲		



شکل ۲. جواب‌های تقریبی تابع کنترل u (سمت راست) و تابع وضعیت x (سمت چپ) به ازای مقادیر a=1, 0.9,0.8, 0.7 با استفاده از n=64 برای مثال ۲

مثال ۳: در این مثال، یک مسئله کنترل بهینه کسری بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود که در آن تأخیر در کنترل ورودی رخ می‌دهد [43]، [53].

$$\min \quad J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} (x^2(t)+u^2(t))dt,$$

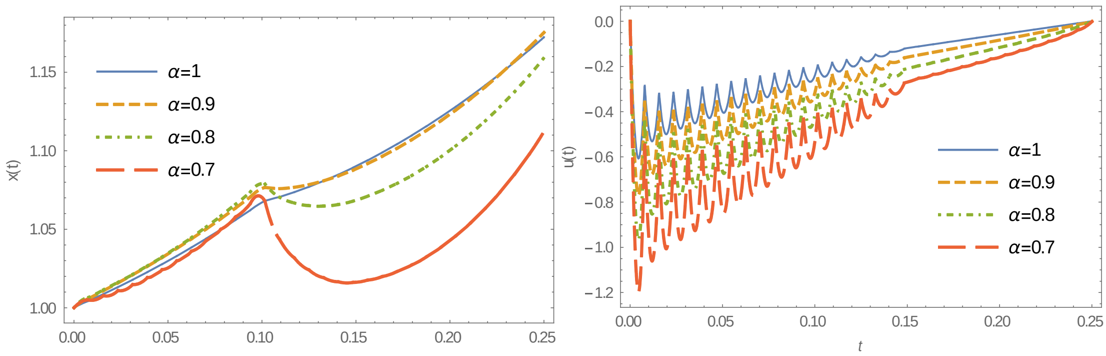
با شرایط

$$D^{\alpha}x(t)=x(t)+u(t-0.1)+u(t), \quad 0\le t\le \frac{1}{4}, \quad 0<\alpha\le 1,$$
$$x(0)=1,$$
$$u(t)=0, \quad t\in[-0.1,0].$$

جواب‌های حاصل از روش پیشنهادی در این مقاله برای J با استفاده از مقادیر مختلف n به‌ازای $\alpha=1$، در جدول ۳ نشان داده شده است. روش‌هایی که از قبل برای این مسئله پیشنهاد شده‌اند، روش چندجمله‌ای‌های لژاندر [43] و روش تقریب کم‌ترین مربعات بر اساس منحنی‌های بزیر[1] [53] هستند. در روش چندجمله‌ای‌های لژاندر با $M=7$ مقدار تقریبی $J=0.0143671$ و در روش دوم مقدار $J=0.1565867$ حاصل شده است. چنان‌که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، جواب حاصل از روش توابع کلاهی بهبود یافته و جواب روش ارائه شده در [53] تقریباً مطابقت دارند. هم‌چنین، نمودار جواب‌های تقریبی حاصل از $n=64$ و $\alpha=1,0.9,0.8,0.7$ برای تابع کنترل u و تابع وضعیت x در شکل ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۳. مقادیر تقریبی شاخص عملکرد J به ازای مقادیر مختلف n و با $\alpha=1$ برای مثال ۳

n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲
J	۰/۱۵۶۷	۰/۱۵۵۳	۰/۱۵۵۰	۰/۱۵۳۸	۰/۱۵۴۰	۰/۱۵۳۷	۰/۱۵۳۷	۰/۱۵۳۶	۰/۱۵۳۶



شکل ۳. جواب‌های تقریبی تابع کنترل u (سمت راست) و تابع وضعیت x (سمت چپ) به‌ازای مقادیر $a=1,0.9,0.8,0.7$ با استفاده از $n=64$ برای مثال ۳

مثال ۴: در این مثال، مسئلهٔ کنترل بهینه کسری زیر با تأخیر در کنترل و وضعیت را در نظر می‌گیریم [42]، [44]، [54]

$$\min \quad J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t)+\frac{1}{2}u^2(t))dt,$$

با شرایط

$$D^\alpha x(t)=-x(t)+x(t-\frac{1}{3})+u(t)-\frac{1}{2}u(t-\frac{2}{3}),\quad 0<\alpha\le 1,$$

$$x(t)=1,\quad t\in[-\frac{1}{3},0],$$

$$u(t)=0,\quad t\in[-\frac{2}{3},0],$$

که در آن $0\le t\le 1$ و $x(t)=0,\ t<-\frac{1}{3}$.

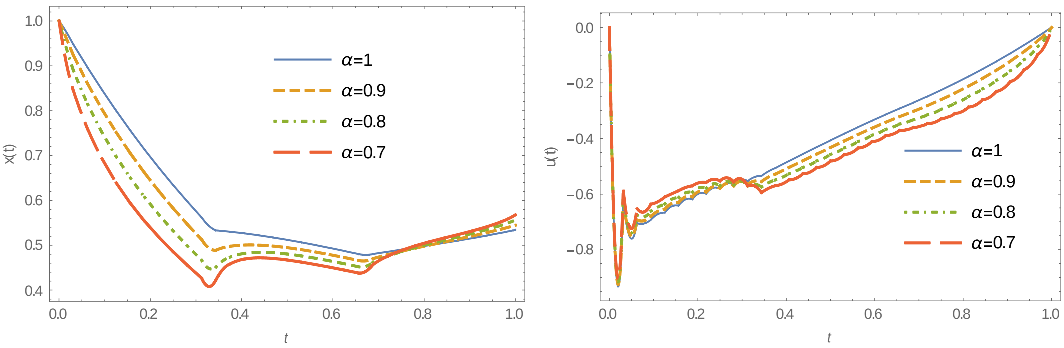
نتایج عددی برای J با مقادیر مختلف n برای $\alpha=1$ با استفاده از روش توابع کلاهی بهبود یافته به‌همراه نتایج حاصل از روش‌های چندجمله‌ای‌های برنشتاین [42]، توابع هایبرید بلاک‌پالس و برنولی [54] و موجک‌های برنولی [44]، در جدول ۴ مشاهده می‌شود. با در نظر گرفتن مقادیر جدول می‌توان دریافت که مقدار کمینه تا سه رقم با

1. Bezier

معنای درست $J=0.234$ است. به‌علاوه، نمودارهای جواب‌های تقریبی حاصل از $n=64$ و $\alpha=1,0.9,0.8,0.7$ برای تابع کنترل u و تابع وضعیت x در شکل ۴ مشاهده می‌شود.

جدول ۴. مقادیر تقریبی J به‌ازای مقادیر مختلف n و مقایسه آن‌ها با روش‌های موجود دیگر برای مثال ۴ با $\alpha=1$

روش	توابع کلاهی بهبود یافته								
n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲
J	۰/۲۹۵۴	۰/۲۲۱۹	۰/۲۵۰۳	۰/۲۳۱۴	۰/۲۳۸۶	۰/۲۳۳۸	۰/۲۳۵۶	۰/۲۳۴۴	۰/۲۳۴۸
روش	چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۴۲] ($m=$۶)			هایبرید بلاک‌پالس و برنولی [۵۴] ($M=$۹، $N=$۳)			موجک‌های برنولی [۴۴] ($M=$۶، $k=$۲)		
J	۰/۳۹۵۶			۰/۳۷۳۱			۰/۱۰۲۷		



شکل ۴. جواب‌های تقریبی تابع کنترل u (سمت راست) و تابع وضعیت x (سمت چپ) به ازای مقادیر $\alpha=1,0.9,0.8,0.7$ با استفاده از $n=64$ برای مثال ۴

در آخر، مدت زمان مصرفی بر حسب ثانیه توسط پردازنده برای حل دستگاه معادلات غیرخطی حاصل از اجرای روش پیشنهادی در این مقاله برای مثال‌های ۱-۴، در جدول ۵ مشاهده می‌شود.

جدول ۵. زمان مصرفی برحسب ثانیه توسط پردازنده برای مثال‌های ۱-۴

n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲
مثال ۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۶	۰/۰۴۷	۰/۱۰۹	۰/۴۶۹	۱/۸۷۵	۱۰/۶۰۹	—
مثال ۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۵	۰/۰۴۷	۰/۱۸۷	۰/۸۲۸	۴/۴۵۳	۲۹/۱۷۲
مثال ۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۵	۰/۰۹۴	۰/۴۰۶	۱/۸۶۰	۱۱/۴۸۵	۷۹/۸۶۴
مثال ۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۶	۰/۰۳۱	۰/۱۱۰	۰/۴۶۸	۲/۷۰۷	۱۵/۶۰۹	۱۰۹/۷۱۸

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی بر اساس توابع کلاهی بهبود یافته برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری داده شده است. استفاده از ماتریس‌های عملیاتی توابع پایه‌ای به‌همراه روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر و روش ضرایب لاگرانژ، مسئله مورد نظر را به حل دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی کاهش می‌دهد. با حل دستگاه حاصل، جواب‌های تقریبی برای تابع کنترل ورودی و تابع وضعیت حاصل می‌شود. با جای‌گذاری تقریب‌های به‌دست آمده در شاخص عملکرد، تقریبی از آن حاصل می‌شود. روش پیشنهادی روی چند نوع مختلف از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری اعمال شده است. به‌منظور نشان دادن دقت بالای روش، در مثال اول مسئله‌ای در نظر گرفته شد که در آن هیچ تأخیری رخ نداده و جواب تحلیلی آن موجود است. با مقایسه جواب‌های حاصل از روش پیشنهادی با جواب دقیق

و مقایسه آن با روش داده شده بر اساس چندجمله‌ای‌های لژاندر در [24]، دقت بالای روش توابع کلاهی بهبود یافته تأیید می‌شود. هم‌چنین، جواب‌هایی که در مثال‌های ۲-۴ به‌دست آمده نشان‌دهندهٔ همگرایی این جواب‌ها است. با مقایسهٔ نمودار جواب‌های تقریبی توابع u و x حاصل از روش پیشنهادی در این مقاله با روش‌های داده شده در [43] و [44]، مشاهده می‌شود که بر خلاف روش‌های مذکور، جواب‌های روش توابع کلاهی بهبود یافته در شرایط اولیه صدق می‌کنند. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع کلاهی بهبود یافته یک ماتریس بالا هسنبرگی و ماتریس‌های عملیاتی حاصلضرب و تأخیر این توابع تنک هستند. به‌همین دلیل، هزینه محاسباتی روش پیشنهادی کم است. برای تأیید این نکته، زمان انجام محاسبات برای حل مثال‌های ۱-۴ در جدول ۵ نمایش داده شده است.

منابع

1. Benson D.A., Meerschaert M. M., Revielle, J., "Fractional calculus in hydrologic modeling: a numerical perspective", Adv. Water Resour., 51 (2013) 479-497.
2. Sierociuk D., Dzielinski A., Sarwas G., Petras I., Podlubny I., Skovranek T., "Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus", Phil. Trans. R. Soc. A, 371 (2013) 20120146.
3. Larsson S., Racheva M., Saedpanah F., "Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity", Comput. Method. Appl. Mech. Eng., 283 (2015) 196-209.
4. Jiang Y., Wang X., Wang Y., "On a stochastic heat equation with first order fractional noises and applications to finance", J. Math. Anal. Appl., 396 (2012) 656-669.
5. Bohannan G., "Analog fractional order controller in temperature and motor control applications", J. Vib. Control, 14 (2008) 1487-1498.
6. Jiang Y. L., Ding X. L., "Waveform relaxation methods for fractional differential equations with the Caputo derivatives", J. Comput. Appl. Math., 238 (2013) 51-67.
7. Das, S., "Fractional Calculus for System Identification and Controls", Springer, New York, (2008).
8. Irandoust-Pakchin S., Dehghan M., Abdi-Mazraeh S., Lakestani M., "Numerical solution for a class of fractional convection diffusion equations using the flatlet oblique multiwavelets", J. Vib. Control, 20 (2014) 913-924.
9. Bhrawy A. H., Doha E. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., "A spectral tau algorithm based on Jacobi operational matrix for numerical solution of time fractional diffusion-wave equations", J. Comput. Phys., 293 (2015) 142-156.

10. Darzi R., Mohammadzade B., Mousavi S., Beheshti R., "Sumudu transform method for solving fractional differential equations and fractional diffusion-wave equation", J. Math. Comput., Sci., 6 (2013) 79-84.
11. Heydari M. H., Hooshmandasl M. R., Mohammadi F., Cattani C., "Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integro-differential equations", Commun, Nonlinear Sci. Numer. Simul., 19(1) (2014) 37-48.
12. Ma J., Liu J., Zhou Z., "Convergence analysis of moving finite element methods for space fractional differential equations", J. Comput. Appl. Math., 255 (2014) 661-670.
13. Bhrawy A. H., Baleanu D., Assas L., "Efficient generalized Laguerre-spectral methods for solving multi-term fractional differential equations on the half line", J. Vib. Control, 20 (2013) 973-985.
14. Bhrawy A. H., Doha E. H., Ezz-Eldien S. S., Gorder R.A. V., "A new Jacobi spectral collocation method for solving 1+1 fractional Schrödinger equations and fractional coupled Schrödinger systems", Eur. Phys. J. Plus, 129(12) (2014) 1-21.
15. Zamani M., Karimi-Ghartemani M., Sadati N., "FOPID controller design for robust performance using particle swarm optimization", J. Frac. Calc. Appl. Anal., 10 (2007) 169-188.
16. Bohannan G. W., "Analog fractional order controller in temperature and motor control applications", J. Vib. Control, 14 (2008) 1487-1498.
17. Jesus I. S., Machado J.A.T., "Fractional control of heat diffusion systems", Nonlinear Dyn., 54(3) (2008) 263-282.
18. Suarez IJ., Vinagre BM., Chen YQ., "A fractional adaptation scheme for lateral control of an AGV", J. Vib. Control, 14 (2008)1499-1511.
19. Bryson A. E., Ho Y. C., "Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control2", Blaisdell Publishing Company, Waltham, (1975).
20. Gregory J., Lin C., "Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory", Van Nostrand-Reinhold, South Carolina (1992).
21. Hestenes M. R., "Calculus of Variations and Optimal Control Theory"", Wiley, New York, (1966).
22. Jelicic Z. D., Petrovacki N., "Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems", Struct. Multidisc. Optim., 38 (2009) 571-581.
23. Biswas R. K., Sen S., "Fractional optimal control problems: a pseudo-state-space approach", J. Vib. Control 17(7) (2010) 1034–1041.

24. Lotfi A., Yousefi S. A., Dehghan Mehdi, "Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss quadrature rule", J. Comput. Appl. Math., 250 (2013) 143-160.

25. Alipour M., Rostamy D., Baleanu D., "Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices", J. Vib. Control, 19 (2013) 2523-2540.

26. Almeida R., Torres DFM., "A discrete method to solve fractional optimal control problems", Nonlinear Dyn., 80(4) (2015) 1811-1816.

27. Tohidi E., Nik HS., "A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems", Appl. Math. Model., 39(2) (2015) 455-465.

28. Hosseinpour S., Nazemi A., "Solving fractional optimal control problems with fixed or free final states by Haar wavelet collocation method", IMA J. Math. Control. I., 33(2) (2016) 543-561.

29. Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., Hafez R. M., "An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems", Adv. Differ. Equ., (2015), doi:10.1186/s13662-014-0344-z.

30. Bhrawy A. H., Doha E. H., Tenreiro Machado J. A., Ezz-Eldien S. S., "An efficient numerical scheme for solving multi-dimensional fractional optimal control problems with a quadratic performance index", Asian J. Control, 17(6) (2015) 2389-2402.

31. Ezz-Eldien S. S., Doha E. H., Baleanu D., Bhrawy A. H., "A numerical approach based on Legendre orthonormal polynomials for numerical solutions of fractional optimal control problems", J. Vib. Control, 23 (1) (2017) 16-30.

32. Keshavarz E., Ordokhani Y., Razzaghi M., "A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials", J. Vib. Control, 22 (18) (2016) 3889-3903.

33. Keshavarz E., Ordokhani Y., Razzaghi M., "Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations", Appl. Math. Model, 38 (24) (20014) 6038-6051.

34. Rabiei K., Ordokhani Y., Babolian E., "The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems", Nonlinear Dyn., 88 (2) (2017) 1013-1026.

35. Jamshidi M., Wang C. M., "A computational algorithm for large-scale nonlinear time-delay systems", IEEE Trans. Syst. Man Cybern, 14 (1984) 2-9.

36. Malek-Zavarei M., Jamshidi M., "Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications (North-Holland Systems and Control Series)", Elsevier Science, New York, (1987).
37. Driver R. D., "Ordinary and Delay Differential Equations, Applied Mathematical Sciences", Springer, New York, (1977).
38. Witayakiattilerd W., "Optimal regulation of impulsive fractional differential equation with delay and application to nonlinear fractional heat equation", J. Math. Res., 5(2) (2013) 94-106.
39. Wang Q., Chen F., Huang F., "Maximum principle for optimal control problem of stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motions", Optim. Control Appl. Meth., 37(1) (2016) 90-107.
40. Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., "Higher order fractional variational optimal control problems with delayed arguments", Appl. Math. Comput., 218 (2012) 9234-9240.
41. Safaie E., Farahi MH., Farmani Ardehaie M., "An approximate method for numerically solving multidimensional delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials", Comput. Appl. Math., 34 (3) (2015) 831-846.
42. Safaie E., Farahi MH., "An approximation method for numerical solution of multi-dimensional feedback delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials", Iran. J. Numer. Anal. Optim., 4 (2014) 77-94.
43. Bhrawy A. H., Ezz-Eldien S. S., "A new Legendre operational technique for delay fractional optimal control problems", Calcolo, 53 (4) (2016) 521-543.
44. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems", Nonlinear Dyn., 86 (3) (2016) 1649-1661.
45. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions", Appl. Math. Comput., 250 (2015) 805-816.
46. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Approximation solution of nonlinear Stratonovich Volterra integral equations by applying modification of hat functions", J. Comput. Appl. Math., 302 (2016) 272-284.
47. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations via modification of hat functions", Appl. Math. Comput., 280 (2016) 110-123.
48. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Solving system of linear Stratonovich Volterra integral equations via modification of hat functions", Appl. Math. Comput., 293 (2017) 254-264.

۴۹. میرزائی فرشید، حدادیان‌نژاد یوسفی الهام، "استفاده از ماتریس عملیاتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری"، پژوهش‌های ریاضی، جلد ۲، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۵.

50. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego, CA, (1999).

51. Devore R. A., Scott L. R., "Error bounds for Gaussian quadrature and weighted-L1 polynomial approximation", SIAM J. Numer. Anal, 21 (1984) 400-412.

52. Wang XT., "Numerical solutions of optimal control for time delay systems by hybrid of block-pulse functions and Legendre polynomials", Appl. Math. Comput. 184 (2007) 849-856.

53. Ghomanjani F., Farahi MH., Gachpazan M., "Optimal control of time-varying linear delay systems based on the Bezier curves", Comput., Appl. Math. 33(3) (2014) 687-715.

54. Haddadi N., Ordokhani Y., Razzaghi M., "Optimal control of delay systems by using a hybrid functions approximation", J. Optim. Theory Appl., 153 (2012) 338-356.