مجتمع‌های ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی نظیر به گراف‌های مسیر

سمیه مرادی؛ دانشگاه ایلام، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

شناخت مجتمع‌های ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی به واسطهٔ خواص جبری و توپولوژیکی‌ای که دارند از جمله مسائل مهم در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی به‌شمار می‌رود. در این راستا معرفی خانواده‌هایی از مجتمع‌های ساده‌گون با این خاصیت بسیار مورد توجه است. در این مقاله مجتمع ساده‌گون استنلی-ریزنر نظیر به ایده‌آل t-خوشه‌ای گراف‌های مکمل مسیر بررسی شده است. برای این خانواده از مجتمع‌های ساده‌گون، مجموعهٔ رویه‌های آن‌ها را به‌طور دقیق مشخص کرده و با استفاده از این موضوع نشان می‌دهیم این دسته از مجتمع‌های ساده‌گون دارای خاصیت تجزیه‌پذیری رأسی هستند. در واقع با توجه به محض بودن آن ها ثابت می‌شود که حلقهٔ استنلی-ریزنر آن‌ها دارای خاصیت کوهن-مکالی است. از آن‌جاکه ۲-خوشه ایده‌آل‌ها همان ایده‌آل‌های یالی گراف‌ها هستند، این دسته از مجتمع‌های ساده‌گون شامل خانوادهٔ مجتمع‌های ساده‌گون مستقل‌های گراف مکمل مسیر هستند. در پایان به‌عنوان نتیجه نشان می‌دهیم که ایده‌آل t-مستقل‌های گراف مکمل مسیر یک ایده‌آل جداشوندهٔ رأسی است و جداساز بتی آن را ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل t-خوشه‌ای، تجزیه‌پذیری رأسی، گراف مسیر، مجتمع ساده‌گون.

مقدمه

تجزیه‌پذیری رأسی یک مجتمع ساده‌گون مفهومی ترکیبیاتی توپولوژیکی است که با خواص جبری حلقه استنلی-ریزنر نظیر به مجتمع ساده‌گون در ارتباط است. اولین بار در سال ۱۹۸۰ پرووان و بیلرا مفهوم k –تجزیه‌پذیری را برای مجتمع‌های ساده‌گون محض معرفی کردند که در حالت $k = 0$ این مفهوم با عنوان تجزیه‌پذیری رأسی شناخته می‌شود [۹]. هم‌چنین بیورنر و واچس مفهوم تجزیه‌پذیری رأسی را به مجتمع‌های ساده‌گون غیرمحض توسیع دادند [۳]، [۴]. مجتمع‌های ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی دارای خاصیت‌های مهمی مانند پوسته‌پذیری و کوهن-مکالی دنباله‌ای هستند. هم‌چنین هر مجتمع ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی محض، کوهن-مکالی است. با توجه به این‌که مجتمع‌های ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی به شکل بازگشتی تعریف می‌شوند، به‌عنوان کلاس خوش‌رفتاری از مجتمع‌های ساده‌گون شناخته می‌شوند و در مقاله‌های تحقیقاتی متعددی بررسی شده‌اند (به‌عنوان نمونه به [۱]، [۲]، [۵]، [۶]، [۹]، [۱۰] مراجعه شود). به‌واسطهٔ خواص جالبی که مجتمع‌های ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی دارند ارائهٔ یک دسته‌بندی از این مجتمع‌های ساده‌گون بسیار مورد توجه محققان است. اما معرفی و دسته‌بندی دقیق تمام مجتمع‌های ساده‌گونی که دارای این ویژگی هستند، امری آسان نیست. از این‌رو، در این راستا ارائه‌ی خانواده‌هایی از مجتمع‌های ساده‌گون با این ویژگی از جمله مسایل مورد توجه است. اخیراً برخی دسته‌بندی‌ها از این مجتمع‌های ساده‌گون در برخی مقالات تحقیقاتی ارائه شده است. وودروف [۱۲] و داچترمن و انگستروم [۵] با استفاده از ابزار توپولوژی ترکیبیاتی نشان دادند که مجتمع ساده‌گون مستقل‌های هر گراف وتری، تجزیه‌پذیر رأسی است. هم‌چنین ثابت شد که مجتمع ساده‌گون

*نویسنده مسئول so.moradi@ilam.ac.ir

مستقل‌های هر گراف کاملاً تاردار شده تجزیه‌پذیر رأسی است [۵]. بیرمن و ون تویل ساختار گراف کاملاً تاردار شده را به مجتمع‌های ساده‌گون توسیع داده و به هر مجتمع ساده‌گون دلخواه با یک رنگ‌آمیزی دلخواه یک مجتمع ساده‌گون تجزیه‌پذیر رأسی نظیر کردند [۱]. هم‌چنین گراف‌های دوبخشی که مجتمع ساده‌گون مستقل‌های آن‌ها خاصیت تجزیه‌پذیری رأسی دارد، بررسی شده‌اند [۱۰]. در این مقاله خاصیت تجزیه‌پذیری رأسی را برای خانوادهٔ مجتمع‌های ساده‌گون استنلی-ریزنر نظیر به ایده‌آل t-خوشه‌ای گراف‌های مکمل مسیر بررسی می‌کنیم. ایده‌آل t-خوشه‌ای گراف ساده G که با $K_t(G)$ نشان داده می‌شود [۷]، که در واقع تعمیمی از مفهوم ایده‌آل یالی گراف‌ها است و نشان داده شده است که مجتمع ساده‌گون استنلی-ریزنر نظیر به ایده‌آل $K_t(G)$ زمانی که G گراف مکمل مسیر است، دارای خاصیت پوسته‌پذیری است. در این مقاله نشان می‌دهیم که این مجتمع‌های ساده‌گون دارای خاصیت تجزیه‌پذیری رأسی نیز هستند.

ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم مرتبط با موضوع می‌پردازیم. در سراسر این مقاله G گرافی ساده با مجموعهٔ رأسی $V(G)$ و مجموعهٔ یالی $E(G)$ است. برای مجموعهٔ $A \subseteq V(G)$، زیرگراف القایی G روی مجموعهٔ A که آن را با $G[A]$ نشان می‌دهیم، زیرگرافی از G است که مجموعهٔ رأسی آن A است و دو رأس x و y در $G[A]$ مجاورند هر گاه در G مجاور باشند. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعهٔ $A \subseteq V(G)$ را یک خوشه از گراف G نامند، هر گاه برای هر دو رأس متمایز $x, y \in A$ داشته باشیم $\{x, y\} \in E(G)$ یا به‌عبارت دیگر زیرگراف القایی $G[A]$ گرافی کامل باشد. هم‌چنین زیرمجموعهٔ $A \subseteq V(G)$ را یک مجموعهٔ مستقل گراف G نامند، هرگاه برای هر دو رأس متمایز $x, y \in A$ داشته باشیم $\{x, y\} \notin E(G)$، یا به‌عبارت دیگر زیرگراف القایی $G[A]$ گرافی گسسته متشکل از رئوس تنها باشد. گراف G با مجموعهٔ رأسی $\{x_1, \dots, x_n\}$ و مجموعهٔ یالی $\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}\}$ گراف مسیر با n رأس نامیده می‌شود و با $P_n: x_1, \dots, x_n$ نشان داده می‌شود. مجتمع ساده‌گون Δ با مجموعهٔ رأسی $\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X است که دارای این خواص است:

۱. برای هر $1 \leq i \leq n$، $\{x_i\} \in \Delta$،
۲. اگر $F \in \Delta$ و $G \subseteq F$، آنگاه $G \in \Delta$.

هر عضو مجتمع ساده‌گون Δ یک وجه نامیده می‌شود و هر وجه بیشین Δ تحت رابطهٔ شمول یک رویهٔ Δ نامیده می‌شود. مجموعهٔ تمام رویه‌های Δ با $\mathcal{F}(\Delta)$ نشان داده می‌شود. هرگاه $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_m\}$، آن‌گاه Δ را با

$$\Delta = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$$

نشان می‌دهیم. مجتمع ساده‌گون Δ را محض گویند هر گاه تمام رویه‌های آن هم اندازه باشند.

فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت

$$\Delta_G = \{F \subseteq V(G): \text{ یک مجموعه‌ی مستقل } G \text{ است } F\}$$

یک مجتمع ساده‌گون است که آن را مجتمع ساده‌گون مستقل‌های گراف G می‌نامیم.

فرض کنید Δ یک مجتمع ساده‌گون و F وجهی از آن باشد. مجتمع ساده‌گون حذف F از Δ که با $Del_\Delta(F)$ نشان داده می‌شود بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$Del_\Delta(F) = \{G \in \Delta: G \cap F = \emptyset\}.$$

هم‌چنین مجتمع ساده‌گون اتصال F در Δ بدین‌صورت است:

$$Lk_\Delta(F) = \{G \in \Delta: G \cap F = \emptyset, G \cup F \in \Delta\}.$$

هر گاه $F = \{x\}$، آن‌گاه $Del_\Delta(F)$ و $Lk_\Delta(F)$ را به‌ترتیب با $Del_\Delta(x)$ و $Lk_\Delta(x)$ نشان می‌دهیم.

مجتمع ساده‌گون Δ با مجموعهٔ رأسی X را تجزیه‌پذیر رأسی گویند، هر گاه $\Delta=\emptyset$ یا $\Delta=\langle X\rangle$ و یا راس $x\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که

۱. $Del_\Delta(x)$ و $Lk_\Delta(x)$ تجزیه‌پذیر رأسی باشند.

۲. هر رویه از $Del_\Delta(x)$ یک رویه از Δ باشد.

هر رأس از Δ که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق کند را یک رأس شکافنده برای Δ نامند.

فرض کنید I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع از حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R=k[x_1,\dots,x_n]$ باشد که در اینجا k یک میدان است. مجتمع ساده‌گون استنلی-ریزنر نظیر به I که با Δ_I نشان داده می‌شود، مجتمع ساده‌گونی با مجموعه‌ی رأسی $V=\{x_i: x_i\notin I\}$ است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\Delta_I=\left\{\{x_{i_1},\dots,x_{i_r}\}: x_{i_1}\cdots x_{i_r}\notin I\right\}.$$

فرض کنید Δ_1 و Δ_2 دو مجتمع ساده‌گون با مجموعه‌های رأسی مجزا باشند. اتصال Δ_1 و Δ_2 که با $\Delta_1*\Delta_2$ نشان داده می‌شود به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_1*\Delta_2=\{F_1\cup F_2: F_1\in\Delta_1, F_2\in\Delta_2\}.$$

تجزیه‌پذیری رأسی مجتمع‌های ساده‌گون نظیر به گراف‌های مسیر

در این بخش برای مجتمع ساده‌گون استنلی-ریزنر نظیر به ایده‌آل $K_t(P_n^c)$، ابتدا شکل رویه‌ها را به‌طور دقیق مشخص کرده، سپس به‌کمک این موضوع خاصیت تجزیه‌پذیری رأسی را برای این دسته از مجتمع‌های ساده‌گون ثابت می‌کنیم. در این‌جا P_n^c مکمل گراف مسیر P_n است.

تعریف ۱. فرض کنید G یک گراف با مجموعهٔ رأسی $V(G)=\{x_1,\dots,x_n\}$ باشد. ایده‌آل t-خوشه‌ای G که با $K_t(G)$ نشان داده می‌شود، ایده‌آلی از حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R=k[x_1,\dots,x_n]$ روی میدان مفروض k است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$K_t(G)=\left(x_{i_1}\cdots x_{i_t}: \text{است } G \text{ یک خوشه از } \{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}\right).$$

نکته ۲. برای اعداد صحیح مثبت n و t، $x_{i_1}\cdots x_{i_t}$ یک عضو مولد کمین ایده‌آل $K_t(P_n^c)$ است اگر و تنها اگر $\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}$ یک مجموعهٔ مستقل t عضوی از گراف P_n باشد. از این‌رو، داریم $K_t(P_n^c)\neq 0$ اگر و تنها اگر $n\geq 2t-1$. هم‌چنین F وجهی از $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ است اگر و تنها اگر F شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی از گراف P_n نباشد.

لم ۳. برای اعداد صحیح مثبت n و t، اگر $n\geq 2t-1$، آن‌گاه مجتمع ساده‌گون $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ محض از بعد $2t-3$ است و اگر $n<2t-1$، آن‌گاه $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ محض از بعد $n-1$ است.

اثبات: به اثبات قضیه ۹.۲ از [۷] مراجعه شود.

لم بعد که نقشی اساسی در برهان قضیه ۶ دارد، شکل رویه‌های مجتمع ساده‌گون $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ را مشخص می‌کند.

لم ۴. فرض کنید n و t اعداد صحیح مثبت دلخواه باشند به‌طوری‌که $n\geq 2t-1$. در این صورت F یک رویه از $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ است اگر و تنها اگر $|F|=2t-2$ و هر مؤلفهٔ هم‌بندی زیرگراف القایی $P_n[F]$ یک مسیر با تعداد رأس‌های زوج باشد.

اثبات: فرض کنید $P_n: x_1,\dots,x_n$ گراف مسیر باشد. قرار می‌دهیم $\Delta=\Delta_{K_t(P_n^c)}$. فرض کنید F یک رویه از Δ

باشد. طبق لم ۳، $|F| = 2t - 2$. به‌وضوح هر مؤلفه‌ی هم‌بندی $P_n[F]$ یک مسیر است. فرض کنید $L: x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ یک مؤلفهٔ هم‌بندی گراف $P_n[F]$ باشد. داریم $k \leq 2t - 2 < n$. به برهان خلف فرض کنید k فرد باشد و $k = 2m - 1$ برای یک عدد صحیح $m \geq 1$. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول: فرض کنید $i = 0$. در این صورت گراف مسیر L به‌صورت $L: x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}$ است و داریم $x_{2m} \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus F$. ادعا می‌کنیم که مجموعهٔ $F \cup \{x_{2m}\}$ شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی گراف P_n نیست. به برهان خلف فرض کنید مجموعهٔ مستقل A از P_n موجود باشد به‌طوری‌که $|A| = t$ و $A \subseteq F \cup \{x_{2m}\}$. چون $F \in \Delta$، بنا به نکته ۲ داریم $A \nsubseteq F$. از این‌رو، $x_{2m} \in A$. از طرفی به‌راحتی می‌توان دید که

$$|A \cap \{x_1, x_2, \dots, x_{2m}\}| \leq m.$$

قرار می‌دهیم

$$A' = (A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{2m}\}) \cup \{x_1, x_3, \dots, x_{2m-1}\}.$$

داریم $|A'| \geq t$ و A' یک مجموعهٔ مستقل گراف P_n است و $A' \subseteq F$. از این‌رو، F شامل یک مجموعهٔ مستقل t عضوی P_n است که این با رویه بودن F در Δ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و $F \cup \{x_{2m}\}$ شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی گراف P_n نیست. در نتیجه داریم $F \cup \{x_{2m}\} \in \Delta$، ولی این نیز با رویه بودن F در تناقض است. بنابراین در این حالت، فرض فرد بودن k باطل است و k زوج است.

حالت دوم: فرض کنید $i > 0$. در این صورت $x_i \notin F$. مشابه آن‌چه در حالت اول اثبات شد، نشان می‌دهیم که مجموعهٔ $F \cup \{x_i\}$ شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی گراف P_n نیست. به برهان خلف فرض کنید مجموعهٔ مستقل B از P_n موجود باشد به‌طوری‌که $|B| = t$ و $B \subseteq F \cup \{x_i\}$. چون $B \nsubseteq F$، از این‌رو، $x_i \in B$. داریم

$$|B \cap \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+2m-1}\}| \leq m.$$

از این‌رو، برای مجموعهٔ

$$B' = (B \setminus \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+2m-1}\}) \cup \{x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_{i+2m-1}\}$$

داریم $|B'| \geq t$ و $B' \subseteq F$. از آن‌جاکه $x_{i+2m} \notin F$، پس $x_{i+2m} \notin B'$ و در نتیجه B' یک مجموعهٔ مستقل گراف P_n مشمول در F با حداقل t عضو است که با نحوهٔ انتخاب F در تناقض است. بنابراین $F \cup \{x_i\}$ شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی گراف P_n نیست و $F \cup \{x_i\} \in \Delta$ که این نیز با رویه بودن F در تناقض است. بنابراین در این حالت نیز، فرض خلف باطل است و k زوج است.

برعکس فرض کنید $F \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ به‌طوری‌که $|F| = 2t - 2$ و هر مؤلفهٔ هم‌بندی $P_n[F]$ مسیری با تعداد زوج رأس باشد. فرض کنید L_1، L_2،...،L_m مؤلفه‌های هم‌بندی $P_n[F]$ باشند و برای هر $1 \leq i \leq m$، $|V(L_i)| = 2r_i$. در این صورت هر مجموعهٔ مستقل بیشین گراف L_i دارای r_i عضو است. از این‌رو، هر مجموعهٔ مستقل بیشین گراف $P_n[F]$ دارای $\sum_{i=1}^{m} r_i = \frac{2t-2}{2} = t - 1$ عضو است. بنابراین F شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی گراف P_n نیست، از این‌رو، $F \in \Delta$. با توجه به این‌که $|F| = 2t - 2$ و با توجه به لم ۳، داریم $F \in \mathcal{F}(\Delta_{K_t(P_n^c)})$. بنابراین

$$\Delta = \langle F: |F| = 2t - 2, \text{هر مؤلفه هم‌بندی } P_n[F] \text{ مسیری با تعداد زوج رأس است} \rangle.$$

قضیهٔ ۵. فرض کنید Δ_1 و Δ_2 دو مجتمع ساده‌گون با مجموعه‌های رأسی مجزا باشند. در این صورت $\Delta_1 * \Delta_2$ تجزیه‌پذیر رأسی است اگر و تنها اگر Δ_1 و Δ_2 تجزیه‌پذیر رأسی باشند.

اثبات: به برهان گزاره ۴.۲ از منبع [۹] مراجعه شود.

اکنون به بیان قضیهٔ اصلی این مقاله می‌پردازیم.

قضیهٔ ۶. برای اعداد صحیح مثبت n و t، مجتمع ساده‌گون $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

اثبات: فرض کنید $P_n: x_1, \dots, x_n$ گراف مسیر باشد. قرار می‌دهیم $\Delta = \Delta_{K_t(P_n^c)}$. در این صورت $F \in \Delta$ اگر و تنها اگر F شامل هیچ مجموعهٔ مستقل t عضوی P_n نباشد. اگر $n < 2t-1$، آنگاه $\Delta = \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ و به‌وضوح Δ تجزیه‌پذیر رأسی است. حال فرض کنید $n \geq 2t-1$. طبق لم ۳، Δ محض و از بعد $2t-3$ است. فرض کنید F رویه‌ای از Δ باشد به‌طوری‌که $x_n \in F$. طبق لم ۴، $P_n[F]$ متشکل از مؤلفه‌های هم‌بندی مسیر است که هر کدام تعدادی زوج رأس دارند، از این‌رو، $x_{n-1} \in F$. فرض کنید $L: x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n-1}, x_n$ مؤلفه‌ای هم‌بندی از $P_n[F]$ باشد که شامل x_n است. قرار می‌دهیم $F' = (F \setminus \{x_n\}) \cup \{x_i\}$. به‌راحتی می‌توان دید هر مؤلفهٔ هم‌بندی گراف $P_n[F']$ نیز مسیری با تعداد زوج رأس است و $|F'| = |F| = 2t-2$. بنابراین طبق لم ۴، F' نیز رویه‌ای از Δ است که شامل $F \setminus \{x_n\}$ است. از این‌رو، $F' \in Del_\Delta(x_n)$. بنابراین رویه‌های $Del_\Delta(x_n)$ رویه‌هایی از Δ هستند که شامل x_n نیستند. به‌عبارت دیگر

$$Del_\Delta(x_n) = \langle F \in \mathcal{F}(\Delta):\ x_n \notin F \rangle. \tag{۱}$$

از این‌رو، هر رویه از $Del_\Delta(x_n)$، رویه‌ای از Δ است. با استقراء روی تعداد رأس‌های گراف مسیر P_n نشان می‌دهیم $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است. با توجه به تساوی (۱)، $Del_\Delta(x_n)$ محض است و رویه‌های آن زیرمجموعه‌های $2t-2$ عضوی مانند F از $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ هستند به‌طوری‌که $P_{n-1}[F]$ متشکل از مسیرهای با تعداد زوج رأس است. بنابراین طبق لم ۴

$$Del_\Delta(x_n) = \Delta_{K_t(P_{n-1}^c)}$$

که در این‌جا P_{n-1} گراف مسیر روی $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ است. از این‌رو، طبق فرض استقراء $Del_\Delta(x_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است. داریم

$$Lk_\Delta(x_n) = \langle F \setminus \{x_n\}: F \in \mathcal{F}(\Delta), x_n \in F \rangle.$$

فرض کنید $F \in \mathcal{F}(\Delta)$ به‌طوری‌که $x_n \in F$. چنان‌که بیان شد، داریم $x_{n-1} \in F$. قرار می‌دهیم:

$$F' = F \setminus \{x_{n-1}, x_n\}.$$

در این صورت هر مؤلفG هم‌بندی $P_{n-2}[F']$ مسیری با تعداد زوج رأس است و $|F'| = 2t-4$. بنابراین F' رویه‌ای از $\Delta_{K_{t-1}(P_{n-2}^c)}$ است. بالعکس برای هر رویه‌ی F' از مجتمع ساده‌گون $\Delta_{K_{t-1}(P_{n-2}^c)}$، طبق لم ۴ داریم $|F'| = 2t-4$ و هر مؤلفهٔ هم‌بندی $P_{n-2}[F']$ مسیری با تعداد زوج رأس است. بنابراین برای مجموعهٔ $F = F' \cup \{x_{n-1}, x_n\}$ هر مؤلفهٔ هم‌بندی $P_n[F]$ مسیری با تعداد زوج رأس است و $|F| = 2t-2$. در نتیجه مجدداً با توجه به لم ۴ داریم $F \in \mathcal{F}(\Delta)$. از این‌رو،

$$\begin{aligned} Lk_\Delta(x_n) &= \{F \setminus \{x_n\}: F \in \mathcal{F}(\Delta),\ x_n \in F\} \\ &= \{F' \cup \{x_{n-1}\}:\ F' \in \mathcal{F}(\Delta_{K_{t-1}(P_{n-2}^c)})\} = \Delta_{K_{t-1}(P_{n-2}^c)} * \{x_{n-1}\}. \end{aligned}$$

طبق فرض استقراء $\Delta_{K_{t-1}(P_{n-2}^c)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است. از این‌رو، طبق قضیه ۵، $Lk_\Delta(x_n)$ نیز تجزیه‌پذیر رأسی است. بنابراین $\Delta_{K_t(P_n^c)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

با قرار دادن $t = 2$ در قضیهٔ ۶ نتیجهٔ ۷ را داریم:

نتیجهٔ ۷. مجتمع ساده‌گون $\Delta_{I(P_n^c)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

ایده‌آل t-مستقل‌های گراف G در [7] بدین‌صورت تعریف شده است:

$$J_t(G)=\bigcap_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}\in\Delta_G}(x_{i_1},\dots,x_{i_t}).$$

در واقع $J_t(G)=(K_t(G^c))^\vee$ که در این‌جا $(K_t(G^c))^\vee$ ایده‌آل دوگان الکساندر $(K_t(G^c))$ است.

در پایان به‌کمک قضیهٔ ۶ نتیجهٔ ۸ را داریم.

نتیجهٔ ۸. ایده‌آل $J_t(P_n)$ یک ایده‌آل جداشوندهٔ رأسی است. هم‌چنین $J_t(P_n)=x_nJ_t(P_{n-1})+J_{t-1}(P_{n-2})$ یک جداساز بتی برای آن است.

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۶ و برهان قضیهٔ ۳.۲ از [۸]، ایده‌آل $J_t(P_n)$ یک ایده‌آل جداشوندهٔ رأسی با جداسازی رأسی $J_t(P_n)=x_nJ_t(P_{n-1})+J_{t-1}(P_{n-2})$ است. هم‌چنین طبق قضیهٔ ۸.۲ از [۸]، این در واقع یک جداساز بتی است.

منابع

1. Biermann J., Francisco C. A., Hà H. T., Van Tuyl A., "Colorings of simplicial complexes and vertex decomposability", preprint, arXiv:math.AC/1209.3008v1.
2. Biermann J., Van Tuyl A., "Balanced vertex decomposable simplicial complexes and their h-vectors", Electronic Journal of Combinatorics, 20, Paper 15, (2013)12.
3. Björner A., Wachs M. L., "Shellable nonpure complexes and posets I", Transactions of the American Mathematical Society, 348 no. 4 (1996) 1299-1327.
4. Björner A., Wachs M. L., "Shellable nonpure complexes and posets II", Transactions of the American Mathematical Society, 349, no. 10 (1997) 3945-3975.
5. Dochtermann A., Engström A., "Algebraic properties of edge ideals via combinatorial topology", Electronic Journal of Combinatorics, 16 no. 2, Special volume in honor of Anders Bjorner, Research Paper 2 (2009) 24.
6. Khosh-Ahang F., Moradi S., "Regularity and projective dimension of edge ideal of C_5-free vertex decomposable graphs", Proceedings of the American Mathematical Society, 142, no. 5 (2014) 1567-1576.
7. Moradi S., "t-clique ideal and t-independence ideal of a graph", to appear in Communications in Algebra, 46, no. 8 (2018) 3377-3387.
8. Moradi S., Khosh-Ahang F., "On vertex decomposable simplicial complexes and their Alexander duals", Mathematica Scandinavica, 118, no. 1 (2016) 43-56.
9. Provan J. S., Billera L. J., "Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedral", Mathematics of Operations Research, 5, no. 4 (1980) 576-594.
10. Van Tuyl A., "Sequentially Cohen-Macaulay bipartite graphs: vertex decomposability and regularity", Archiv der Mathematik, (Basel) 93, no. 5 (2009) 451-459.
11. Woodroofe R., "Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability", Proceedings of the American Mathematical Society, 137 no. 10 (2009) 3235-3246.
12. Woodroofe R., "Chordal and sequentially Cohen-Macaulay clutters", Electronic Journal of Combinatorics, 18, no. 1, Paper 208 (2011) 20.