(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

تحدب در فضاهای متریک و ژئودزیک

سجاد رنجبر*[1]، هادی خطیب زاده[2]، پرویز احمدی[2]

۱. مرکز آموزش عالی اقلید، گروه ریاضیات و کاربردها،

۲. دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۱۲/۲۶ پذیرش ۹۸/۰۸/۱۸

چکیده

در این مقاله، ابتدا بررسی مقدماتی روی پاره‌خط‌های متریک و ژئودزیک‌ها در فضاهای متریک داریم. سپس با بازگو کردن تعریف تحدب متریک برای مجموعه‌ها و توابع به بررسی برخی از ویژگی‌های آنها به‌ویژه نقاط انتهایی و وجوه مجموعه‌های محدب متریک در فضاهای نرم‌دار می‌پردازیم. نهایتاً پیوستگی توابع محدب متریک را در فضاهای ژئودزیک بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ژئودزیک، پاره‌خط متریک، مجموعه d- محدب، پوش محدب متریک ، تابع d-محدب، نقطه انتهایی، پیوستگی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): $52A01$، $54G05$، $26A51$.

مقدمه و پیش‌نیازها

مفهوم تحدب نقش اساسی در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات مانند بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل، آنالیز تغییراتی، آنالیز غیرخطی و غیره دارد. این مفهوم به‌طور سنتی در فضاهای خطی به‌این صورت تعریف می‌شود که زیرمجموعه C از فضای خطی X محدب گفته می‌شود، اگر برای هر $x, y \in C$ پاره‌خط واصل x و y، یعنی $\{tx + (1-t)y: t \in [0,1]\}$ زیرمجموعهٔ C باشد. هم‌چنین، یک تابع حقیقی مقدار f روی فضای خطی X محدب گفته می‌شود اگر برای هر $x, y \in C$ و هر $t \in [0,1]$ نامساوی

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

برقرار باشد. تحدب در فضاهای متریک برای اولین بار به‌وسیلهٔ منگر [۷] تعریف شد. برای تعریف‌های دیگر یا مشابه برای تحدب در فضاهای غیرخطی به [۱]، [۴]، [۸]، [۹]، [۱۳]-[۲۰] رجوع کنید. منگر [۷] ابتدا پاره‌خط متریک بین دو عضو x, y از فضای متریک (X, d) را به‌صورت

$$[x, y] := \{z: d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\}$$

تعریف کرد. سپس با استفاده از مفهوم پاره‌خط متریک، تحدب یک مجموعه در فضای متریک (به اختصار : $d-$محدب بودن) را به این‌صورت تعریف کرد که زیرمجموعهٔ C از فضای متریک (X, d) را d-محدب گوییم هرگاه برای تمام $x, y \in C$ داشته باشیم $[x, y] \subset C$. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای d-محدب از X باشد در این صورت تابع $f: C \subset X \to \mathbb{R}$، d-محدب گفته می‌شود هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in C$ و $x_0 \in [x_1, x_2]$ داشته باشیم

$$f(x_0) \leq \frac{d(x_0,x_2)}{d(x_1,x_2)} f(x_1) + \frac{d(x_0,x_1)}{d(x_1,x_2)} f(x_2).$$

در این نوشتار برآنیم تا مفهوم تحدب در فضاهای متریک و ژئودزیک و بعضی ویژگی‌های مهم مجموعه‌ها و توابع محدب را که در این‌گونه فضاها قابل مطالعه هستند بررسی کنیم. بخش‌بندی مطالب این مقاله به این شکل است. ابتدا

*نویسنده مسئول sranjbar@eghlid.ac.ir

و در ادامه این بخش به معرفی فضاهای ژئودزیک و یکتا ژئودزیک می‌پردازیم. هم‌چنین F-فضاها و مفهوم محدب *اکید* بودن در آنها را بیان می‌کنیم. از آن‌جاکه مفهوم تحدب متریک به‌معنای منگر بر اساس پاره‌خط متریک تعریف می‌شود در بخش ۲ درباره پاره‌خط‌های متریک و ژئودزیک‌ها در فضای متریک ژئودزیک بررسی می‌کنیم. بخش ۳ به مفاهیم مقدماتی درباره مجموعه‌ها و توابع محدب متریک اختصاص دارد. در بخش ۴ به بررسی نقاط انتهایی و وجه‌های یک مجموعه محدب به معنای متریک به‌ویژه در فضاهای نرم‌دار می‌پردازیم. نهایتاً در بخش ۵ ویژگی‌های پیوستگی توابع محدب را در فضاهای متریک ژئودزیک بررسی می‌کنیم.

یک پاره‌خط ژئودزیک در فضای متریک (X,d)، خمی مانند $\gamma:[a,b]\to X$ است که حافظ فاصله باشد، یعنی برای هر $t_1,t_2\in[a,b]$ تساوی $d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))=|t_1-t_2|$ برقرار باشد. اگر $\gamma(a)=x$ و $\gamma(b)=y$ آن‌گاه γ را یک پاره‌خط ژئودزیک بین x و y گوییم. فضای متریک (X,d) را *فضای ژئودزیک* گوییم اگر بین هر دو عضو آن یک پاره‌خط ژئودزیک موجود باشد. هرگاه تنها یک پاره‌خط ژئودزیک بین هر دو عضو یک فضای ژئودزیک موجود باشد آن فضای ژئودزیک را *یکتا ژئودزیک* گوییم. در فضاهای یکتا ژئودزیک، برای هر $\lambda\in[0,1]$ نقطه یکتای z را که در

$$d(x,z)=(1-\lambda)d(x,y) \quad \text{و} \quad d(y,z)=\lambda d(x,y)$$

صدق کند با $\lambda x\oplus(1-\lambda)y$ نشان می دهیم.

فضای X را فضای توپولوژیک خطی گوییم اگر X فضایی برداری همراه با یک توپولوژی روی آن باشد به‌طوری‌که اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر روی X نسبت به توپولوژی مربوطه پیوسته شود. متریک d روی یک فضای توپولوژیک خطی X را ناوردا گوییم هرگاه برای هر $z\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=d(x-z,y-z)$. فضای توپولوژیک خطی X را F-فضا گوییم اگر با توپولوژی القا شده به‌وسیله یک متریک ناوردا کامل باشد. F-فضای (X,d) را محدب *اکید* گوییم اگر برای هر $r>0$ و $x,y\in X$ به‌طوری‌که $d(x,0)\le r$ و $d(y,0)\le r$ داشته باشیم، $d\left(\frac{x+y}{2},0\right)<r$. این تعریف تعمیمی از تعریف محدب اکید در فضاهای نرم‌دار است. هم‌چنین، F-فضای (X,d) را شبه محدب *اکید* گوییم، هرگاه برای هر x و y ناصفر که در شرط

$$d(x+y,0)=d(x,0)+d(y,0)$$

صدق می‌کنند، عدد حقیقی مثبت t موجود باشد به‌طوری‌که $y=tx$.

توجه کنید که در فضاهای نرم‌دار مفاهیم محدب اکید و شبه محدب اکید معادل هستند.

پاره‌خط‌های متریک و ژئودزیک‌ها

در هر فضای برداری نرم‌دار X و برای هر $x,y\in X$، به‌وضوح، $[x,y]$ پاره‌خط واصل x و y را دربردارد. اما در کل، در یک فضای متریک خطی X، این امکان وجود دارد که $[x,y]$ به‌طور اکید شامل پاره‌خط واصل x و y یا حتی به‌طور اکید مشمول در آن باشد. به‌طور مثال، در $\mathbb{R}^2$ با $\|(t,s)\|_1=|t|+|s|$ پاره‌خط متریک $[x,y]$، که $x,y\in\mathbb{R}^2$، ناحیه‌ای مستطیلی است که x و y دو سر یک قطر آن هستند. در گزارهٔ ۱ نشان می‌دهیم که در F-فضاها، شبه محدب اکید بودن معادل با این است که برای هر x,y پاره‌خط $[x,y]$ مشمول در پاره خط واصل x و y باشد.

گزارهٔ ۱. *فضای متریک (X,d) یک F- فضای شبه محدب اکید است اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in X$ داشته*

باشیم:

$$[x,y] \subset \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}.$$

اثبات: فرض کنید (X,d) یک F- فضای شبه محدب اکید باشد، $x,y \in X$ و $z \in [x,y]$. در این‌صورت

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y).$$

بنابر ناوردایی متریک d داریم $d(x-z,0) + d(z-y,0) = d(x-y,0)$.

بنابراین شبه محدب اکید بودن فضا نتیجه می‌دهد که $t > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $x - z = t(z-y)$. در نتیجه $z = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}y$. بنابراین $[x,y] \subset \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$.

حال برعکس، فرض کنید $x,y \in X$، $x \neq 0 \neq y$ و $d(x+y,0) = d(x,0) + d(y,0)$. بنابر ناوردایی متریک d داریم $d(x,0) + d(-y,0) = d(x,-y)$، که نتیجه می‌دهد $0 \in [x,-y]$. بنابراین $\lambda \in [0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که $0 = \lambda x + (1-\lambda)(-y)$، در نتیجه $y = \frac{\lambda}{1-\lambda}x$. که بیانگر شبه محدب اکید بودن فضا است.

چنان‌که در مثال ۱ نشان داده شده است تساوی $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$ در حالت کلی برقرار نیست مگر در فضاهای خطی نرم‌داری که محدب اکید هستند.

مثال ۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت (X,d) با متریک*

$$d(x,y) = \ln(1 + \| x - y \|)$$

یک F-فضا است. اگر $x,y \in X$ و $z \in [x,y]$، آن‌گاه

$$\ln\left(1 + \left||x-z|\right|\right) + \ln\left(1 + \left||y-z|\right|\right) = \ln\left(1 + \left||x-y|\right|\right).$$

بنابراین

$$1 + ||x-z|| + ||z-y|| + ||x-z||||z-y|| = 1 + \left||x-y|\right|.$$

که نتیجه می‌دهد $z = x$ یا $z = y$. در نتیجه $[x,y] = \{x,y\}$.

در گزارۀ زیر برخی ویژگی‌های پاره‌خط متریک را بررسی می‌کنیم.

گزارۀ ۲. *فرض کنید $x,y \in X$. گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) اگر $z,t \in [x,y]$، آن‌گاه $d(z,t) \leq d(x,y)$. به‌ویژه، $diam[x,y] = d(x,y)$.

ب) اگر $z \in [x,y]$، آن‌گاه $[x,z] \subset [x,y]$ و $[z,y] \subset [x,y]$.

ج) برای هر $z,t \in [x,y]$ داریم: $z \in [t,y]$ اگر و تنها اگر $t \in [x,z]$.

اثبات: الف) بنابر نامساوی مثلث و $z,t \in [x,y]$ داریم:

$$d(z,t) \leq d(z,x) + d(x,t) = 2d(x,y) - d(z,y) - d(t,y) \leq 2d(x,y) - d(z,t).$$

این نتیجه می‌دهد که $d(z,t) \leq d(x,y)$.

ب) فرض کنید $t \in [x,z]$ در این‌صورت

$$d(x,t) + d(t,y) \leq d(x,t) + d(t,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(z,y) = d(x,y),$$

که نتیجه می‌دهد $t \in [x,y]$. بنابراین $[x,z] \subset [x,y]$. به‌همین صورت $[z,y] \subset [x,y]$.

ج) فرض کنید $t \in [x,z]$. در این‌صورت

$$d(t,y)=d(x,y)-d(x,t)=d(x,t)+d(t,z)+d(z,y)-d(x,t)$$
$$=d(t,z)+d(z,y),$$

که نتیجه می‌دهد $z\in[t,y]$. حال برعکس، اگر $z\in[t,y]$، آن‌گاه

$$d(t,x)+d(t,z)=d(t,x)+d(z,y)-d(z,y)+d(t,z)$$
$$=d(t,x)+d(t,y)-d(z,y)=d(x,y)-d(z,y)=d(x,z),$$

که اثبات را کامل می کند.

برای هر $x,y\in X$، رابطهٔ $\prec_{[x,y]}$ را روی $[x,y]$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$t\prec_{[x,y]} z \Leftrightarrow z\in[t,y],\qquad (t,z\in[x,y]),$$

به‌وضوح، برای هر $z,t\in[x,y]$ داریم $y \prec_{[x,y]} z \prec_{[x,y]} x$ و $z \prec_{[y,x]} t \Leftrightarrow t \prec_{[x,y]} z$.

گزارهٔ ۳. *فرض کنید* $x,y\in X$، آن‌گاه

الف) $\prec_{[x,y]}$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $[x,y]$ است.

ب) اگر $z,t\in[x,y]$ و $t\prec_{[x,y]} z$ آن‌گاه $[t,z]\subset[x,y]$.

اثبات: الف) انعکاسی بودن $\prec_{[x,y]}$ واضح است. فرض کنید $z\prec_{[x,y]} w$ و $w\prec_{[x,y]} z$. در این‌صورت $w\in[z,y]$ و $z\in[w,y]$ که نتیجه می‌دهد

$$d(w,z)+d(w,y)=d(z,y),$$
$$d(z,w)+d(z,y)=d(w,y).$$

حال با جمع کردن طرفین دو تساوی مذکور، داریم $d(z,w)=0$. بنابراین $z=w$. از طرفی اگر $z,w,t\in[x,y]$، $z\prec_{[x,y]} w$ و $w\prec_{[x,y]} t$، آن‌گاه $w\in[z,y]$ و $t\in[w,y]$. بنابر قسمت (ب) گزارهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم $t\in[w,y]\subset[z,y]$. بنابراین $z\prec_{[x,y]} t$.

ب) بنا بر گزارهٔ ۲، $[t,y]\subset[x,y]$. از طرف دیگر، فرض $t\prec_{[x,y]} z$ که نتیجه می‌دهد $z\in[t,y]$. بنابراین، قسمت (ب) گزارهٔ ۲ نتیجه می‌دهد $[t,z]\subset[t,y]$. در نتیجه $[t,z]\subset[t,y]\subset[x,y]$.

چنان‌که مثال زیر نشان می‌دهد شرط $t\prec_{[x,y]} z$ در قسمت (ب) گزارهٔ ۳ قابل حذف کردن نیست.

مثال ۲. *گراف* $G=(E,V)$ *را با مجموعه رئوس* $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ *و مجموعه یال‌های*

$$E=\{(1,2),(1,4),(2,3),(2,6),(3,4),(3,5),(4,6)\}$$

در نظر بگیرید. فضای متریک (V,d) *القا شده به‌وسیله گراف* G *با متریک* d *را چنان در نظر بگیرید که برای هر* $x,y\in V$ *فاصله* $d(x,y)$ *برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین* x *و* y *باشد. در این صورت*

$$2,4\in[5,6]=\{2,3,4,5,6\}$$

در حالی‌که

$$[2,4]=\{1,2,3,4,6\}\not\subseteq[5,6].$$

گزارهٔ ۳ نتیجه می‌دهد که $\prec_{[x,y]}$ یک ترتیب جزئی روی $[x,y]$ است اما مثال ساده $\mathbb{R}^2$ با $\|.\|_1$ نشان می‌دهد که لزوماً ترتیب کلی نیست.

تعریف ۱. *برای هر* $\lambda\in[0,1]$، λ*- بخش از* $[x,y]$ *را که با نماد* $[x,y]_\lambda$ *نمایش می دهیم، بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:*

$$[x,y]_\lambda := \{z \in [x,y] : d(x,z) = \lambda d(x,y)\}.$$

به‌وضوح، در هر فضای متریک $[x,y]_0 = \{x\}$ و $[x,y]_1 = \{y\}$ و در هر فضای خطی نرم‌دار، برای هر $t \in [0,1]$ داریم: $(1-t)x + ty \in [x,y]_t$.

گزارهٔ ۴. فرض کنید $x,y \in X$ و $\lambda, \mu \in [0,1]$. در این‌صورت *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) $[x,y] = \cup_{0\le\lambda\le1} [x,y]_\lambda$.

ب) $[x,y]_\lambda = [y,x]_{1-\lambda}$.

ج) فرض کنید $z \in [x,y]_\lambda$ و $t \in [x,y]_\mu$. اگر $z \prec_{[x,y]} t$، آن‌گاه $\lambda \le \mu$.

د) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، آن‌گاه $[x,y]_\lambda$ محدب است.

و) اگر $\prec_{[x,y]}$ یک رابطهٔ ترتیب کلی روی $[x,y]$ باشد، آن‌گاه $[x,y]_\lambda$ حداکثر تک عضوی است.

ه) $[x,y]_t \subseteq \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$ (اگر و تنها اگر X شبه محدب اکید باشد).

اثبات: قسمت‌های (الف) و (ب) با استفاده از تعریف بدیهی است. برای اثبات (ج)، با استفاده از مفروضات داریم: $d(x,z) = \lambda d(x,y)$ و $d(x,t) = \mu d(x,y)$ و $z \in [x,t]$. بنابراین

$$d(z,t) = d(x,t) - d(x,z) = (\mu - \lambda) d(x,y),$$

در نتیجه $\lambda \le \mu$.

برای اثبات (د)، فرض کنید $z,w \in [x,y]_\lambda$ و $t \in [0,1]$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} &\| tz + (1-t)w - x \| \le t \| z - x \| + (1-t) \| w - x \| \\ &= t\lambda \| x - y \| + (1-t)\lambda \| x - y \| = \lambda \| x - y \|, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &\| tz + (1-t)w - y \| \le t \| z - y \| + (1-t) \| w - y \| \\ &= t(1-\lambda) \| x - y \| + (1-t)(1-\lambda) \| x - y \| = (1-\lambda) \| x - y \|. \end{aligned}$$

با جمع کردن طرفین دو نامساوی مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\| x - y \| \le \| tz + (1-t)w - x \| + \| tz + (1-t)w - y \| \\ &\le \lambda \| x - y \| + (1-\lambda) \| x - y \| = \| x - y \|. \end{aligned}$$

بنابراین $tz + (1-t)w \in [x,y]_\lambda$. در نتیجه برای هر $\lambda \in [0,1]$، $[x,y]_\lambda$ محدب است.

برای اثبات (و) فرض کنید $\lambda \in [0,1]$ و $z,t \in [x,y]_\lambda$. در این‌صورت

$$d(z,y) = (1-\lambda) d(x,y) \quad \text{و} \quad d(t,y) = (1-\lambda) d(x,y).$$

از طرفی بنابرفرض $z \prec_{[x,y]} t$ یا $t \prec_{[x,y]} z$. اگر $z \prec_{[x,y]} t$ آن‌گاه $t \in [z,y]$. این نتیجه می‌دهد که

$$d(t,z) = d(z,y) - d(t,y) = (1-\lambda) d(x,y) - (1-\lambda) d(x,y) = 0,$$

بنابراین $z = t$، یعنی $[x,y]_\lambda$ حداکثر تک عضوی است.

قسمت (ه) نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱ و تعریف ۱ است.

فرض کنید $x,y \in X$ و برای هر $\lambda \in [0,1]$، $[x,y]_\lambda \neq \emptyset$. در این‌صورت بنابر اصل انتخاب، تابعی مانند $f : [0,1] \to [x,y]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(\lambda) \in [x,y]_\lambda$.

گزارهٔ ۵. *فرض کنید* $x,y \in X$ *و برای هر* $\lambda \in [0,1]$، $[x,y]_\lambda \neq \emptyset$. *تابع* $g : [0, d(x,y)] \to [x,y]$ *را با*

ضابطه $g(t):=f(\frac{t}{d(x,y)})$ *در نظر بگیرید که* f *در بالا تعریف شده است. در این‌صورت* g *یک ژئودزیک بین* x *و* y *است اگر و تنها اگر* g *(یا معادلاً* f*) حافظ ترتیب* $\prec_{[x,y]}$ *روی* $[x,y]$ *باشد.*

اثبات: فرض کنید f حافظ ترتیب باشد در این‌صورت برای هر $\lambda,\mu\in[0,1]$ که $\lambda\le\mu$، رابطهٔ $f(\lambda)\prec_{[x,y]} f(\mu)$ برقرار است. بنابراین $f(\mu)\in[f(\lambda),y]$. در نتیجه

$$d\big(f(\mu),f(\lambda)\big)+d(f(\mu),y)=d(f(\lambda),y).$$

از طرفی با توجه به تعریف f داریم $d(f(\mu),y)=(1-\mu)d(x,y)$ و $d(f(\lambda),y)=(1-\lambda)d(x,y)$.
در نتیجه $d(f(\mu),f(\lambda))=(\mu-\lambda)d(x,y)$. با توجه به این تساوی، اگر $t_1,t_2\in[0,d(x,y)]$ آن‌گاه

$$d(g(t_1),g(t_2))=d(f(\frac{t_1}{d(x,y)}),f(\frac{t_2}{d(x,y)}))=\frac{|t_2-t_1|}{d(x,y)}d(x,y)=|t_2-t_1|$$

که نشان می‌دهد g حافظ فاصله است و در نتیجه یک ژئودزیک است.

حال فرض کنید g ژئودزیکی بین x و y باشد آن‌گاه

$$d\big(g(t_1),g(t_2)\big)=|t_2-t_1|,\qquad \forall t_1,t_2\in[0,d(x,y)].$$

فرض کنید $t_1\le t_2$ در این‌صورت

$$\begin{aligned}d(g(t_2),g(t_1))+d(g(t_2),y)&=d(g(t_2),g(t_1))+d(g(t_2),g(d(x,y)))\\&=t_2-t_1+d(x,y)-t_2=d(x,y)-t_1\\&=d(g(d(x,y)),g(t_1))=d(y,g(t_1)).\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $g(t_2)\in[g(t_1),y]$. به‌عبارت دیگر $g(t_2)\prec_{[x,y]} g(t_1)$. بنابراین g حافظ ترتیب $\prec_{[x,y]}$ روی $[x,y]$ است.

گزارهٔ ۶. *اگر* $\gamma_1:[0,d(x,z)]\to[x,z]$ *و* $\gamma_2:[0,d(z,y)]\to[z,y]$ *ژئودزیک باشند، آن‌گاه*

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(t), & 0\le t\le d(x,z),\\ \gamma_2\big(t-d(x,z)\big), & d(x,z)\le t\le d(x,z)+d(z,y),\end{cases}$$

ژئودزیک است اگر و تنها اگر $z\in[x,y]$.

اثبات: فرض کنید $\gamma:[0,d(x,y)]\to[x,y]$ ژئودزیک باشد، آن‌گاه

$$d(x,y)=d(\gamma_1(0),\gamma_2(d(z,y)))=d(\gamma(0),\gamma(d(x,z)+d(z,y)))=d(x,z)+d(z,y),$$

که نتیجه می‌دهد $z\in[x,y]$.

حال فرض کنید $z\in[x,y]$. نشان می‌دهیم γ ژئودزیک است. بنابر گزارهٔ ۵، کافی است نشان دهیم γ حافظ ترتیب است. فرض کنید $t_1\le t_2$. اگر $0\le t_1,t_2\le d(x,z)$ یا $d(x,z)\le t_1,t_2\le d(x,z)+d(z,y)$،

آن‌گاه بنا بر تعریف γ و حافظ ترتیب بودن γ_1 و γ_2، خم γ نیز حافظ ترتیب است. حال فرض کنید $0\le t_1\le d(x,z)$ و $d(x,z)\le t_2\le d(x,z)+d(z,y)$. قرار دهید $u=\gamma_1(t_1)$ و $v=\gamma_2(t_2)$.
نشان می‌دهیم $v\prec_{[x,y]} u$ یا به‌طور معادل $v\in[u,y]$. زیرا γ_2 حافظ ترتیب روی $[z,y]$ است و $\gamma_2(d(x,z))=z$، پس $v\prec_{[z,y]} z$. به‌همین ترتیب، چون γ_1 حافظ ترتیب روی $[x,z]$ است و $\gamma_1(d(x,z))=z$ پس $z\prec_{[x,z]} u$. از طرفی $v\in[z,y]\subset[x,y]$ که نتیجه می‌دهد $v\prec_{[x,y]} z$.
از طرف دیگر، از $u\in[x,z]\subset[x,y]$ داریم $d(x,z)=d(x,u)+d(z,u)$، در نتیجه

$d(x,y)-d(x,u)=d(z,u)+d(x,y)-d(x,z)$. بنابراین $d(u,y)=d(z,u)+d(z,y)$، که نتیجه می‌دهد $z\in[u,y]$. به‌عبارت دیگر $z \prec_{[x,y]} u$ که با $v \prec_{[x,y]} z$ نتیجه می‌دهد $v \prec_{[x,y]} u$.

گزارهٔ ۷. *اگر برای هر* $\lambda\in[0,1]$، $[x,y]_\lambda\neq\emptyset$ *و* $\prec_{[x,y]}$ *روی* $[x,y]$ *ترتیب کلی باشد، آن‌گاه حداکثر یک ژئودزیک بین* x *و* y *وجود دارد.*

اثبات: فرض کنید $g,\gamma:[0,d(x,y)]\to[x,y]$ دو ژئودزیک بین x و y باشند و $\gamma(t) \prec_{[x,y]} g(t)$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} d(\gamma(t),g(t))+d(x,y)-t &= d(\gamma(t),g(t))+d(x,y)-d(x,g(t)) \\ &= d\big(\gamma(t),g(t)\big)+d(g(t),y)=d(\gamma(t),y)=d(x,y)-d\big(x,\gamma(t)\big) \\ &= d(x,y)-t. \end{aligned}$$

بنابراین $d\big(\gamma(t),g(t)\big)=0$، که نتیجهٔ مطلوب است.

مفاهیم اولیه تحدب در فضاهای متریک

به آسانی می‌توان دید که در یک فضای برداری نرم‌دار X هر مجموعه d–محدب، مجموعه‌ای محدب است زیرا هر پاره‌خط متریک $[x,y]$ شامل پاره‌خط واصل x و y است. البته مثال ۱ بخش قبل نشان می‌دهد که این حقیقت در F–فضاها در حالت کلی برقرار نیست. با توجه به این‌که شبه محدب اکید با محدب اکید بودن در فضاهای برداری نرم‌دار معادل است، گزارهٔ ۱ نشان می‌دهد که یک فضای برداری نرم‌دار محدب اکید است اگر و تنها اگر هر مجموعه محدب در آن فضا d-محدب نیز باشد. از طرفی مثال ۲ بخش قبل بیان‌گر این است که در یک فضای متریک X ممکن است پاره‌خط $[x,y]$، d-محدب نباشد. مثال ۳.۹ فصل ۲ از [۲] نشان می‌دهد که پاره‌خط متریک $[x,y]$ حتی در فضاهای نرم‌دار هم d-محدب نیست. در گزارهٔ ۸ نشان می‌دهیم که اگر متر نسبت به هر مؤلفه یک تابع d-محدب باشد، آن‌گاه پاره‌خط متریک $[x,y]$، یک مجموعه d-محدب است.

گزارهٔ ۸. *اگر* $d(x,.)$ *برای هر* $x\in X$ *یک تابع* d*-محدب باشد، آن‌گاه* $[x,y]$، d-محدب است.

اثبات: فرض کنید $z,w\in[x,y]$ و $t\in[z,w]$. با استفاده از مفروضات به‌دست می‌آوریم

$$d(x,t)\le\frac{d(t,w)}{d(z,w)}d(x,z)+\frac{d(t,z)}{d(z,w)}d(x,w),$$

و

$$d(y,t)\le\frac{d(t,w)}{d(z,w)}d(y,z)+\frac{d(t,z)}{d(z,w)}d(y,w).$$

حال با جمع کردن دو طرف نامساوی‌های مذکور داریم:

$$d(x,t)+d(y,t)\le\frac{d(t,w)}{d(z,w)}d(x,y)+\frac{d(t,z)}{d(z,w)}d(x,y)=d(x,y).$$

در نتیجه $t\in[x,y]$.

در ادامه، ما نگاشت پوش و پوش d-محدب یک مجموعه را در فضای متریک X تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. *نگاشت* $h:2^X\to2^X$ *را نگاشت پوش گوییم اگر برای هر* $A\in2^X$

$$h(A):=\cup\{[x,y]:\ x,y\in A\}.$$

به‌وضوح می‌توان دید که $C \subset X$ مجموعه‌ای d-محدب است اگر و تنها اگر $h(C) = C$. خاطرنشان می‌کنیم که $h(C)$ برای هر زیرمجموعه دلخواه C از X لزوماً d-محدب نیست. مثال زیر نشان می‌دهد که گوی‌ها حتی در فضاهای برداری نرم‌دار لزوماً d-محدب نیستند.

مثال ۳. *فرض کنید $B_1^{||\cdot||_1}(0)$ گوی یکه $(\mathbb{R}^2, ||.||_1)$ باشد. به آسانی می توان دید که* $h\left(B_1^{||\cdot||_1}(0)\right) = B_1^{||\cdot||_\infty}(0)$، برای $r < 2$، زیرمجموعه‌ای از $B_r^{||\cdot||_1}(0)$ نیست.

گزارهٔ ۹. *اگر* $B_r(x) = \{y \in X: d(y,x) < r\}$، آن‌گاه $h(B_r(x)) \subset B_{2r}(x)$.

اثبات: فرض کنید $y, z \in B_r(x)$ و $w \in [y,z]$، در این‌صورت

$$d(w,x) \leq d(w,y) + d(y,x),$$

و

$$d(w,x) \leq d(w,z) + d(z,x).$$

حال با جمع کردن دو نامساوی مذکور و با استفاده از مفروضات به‌دست می‌آوریم

$$2d(w,x) \leq d(y,z) + d(y,x) + d(z,x) \leq 4r,$$

که نتیجه می‌دهد $w \in B_{2r}(x)$.

مثال ۳ نشان می‌دهد که مقدار $2r$ در گزاره قبل بهینه است. گزارهٔ ۱۰ نتیجه‌ای مستقیم از تعریف ۲ است.

گزارهٔ ۱۰. $h(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha h(A_\alpha)$*، در نتیجه اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌های d-محدب مجموعه‌ای d-محدب است.*

تعریف ۳. *پوش محدب متریک $C \subset X$ عبارت است از*

$$d - co(C) := \cap \{A: \quad C \subset A \text{ و } \text{مجموعه‌ای } d - \text{محدب است } A\}.$$

واضح است که $h(C) \subset d - co(C)$. همچنین ثابت شده است که (صفحات ۶۸ و ۶۹ [۱۰]):

$$d - co(C) = \cup_{n \geq 0} h^n(C).$$

پوش محدب متریک گوی یکه $(\mathbb{R}^n, ||.||_1)$ گوی یکه $(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$ است.

در ادامه این بخش، به بررسی برخی ویژگی‌های توابع d-محدب و d-شبه محدب می‌پردازیم.

تبصرهٔ ۱. *به آسانی می‌توان دید که هر تابع d-محدب در فضاهای برداری نرم‌دار محدب است. عکس این مطلب تنها در فضاهای خطی نرم‌دار محدب اکید برقرار است. توجه کنید که در F-فضاها، توابع d-محدبی وجود دارند که لزوماً محدب نیستند. به‌طور مثال، هر تابعی روی فضای متریک مثال ۱ بخش قبل، تابعی d-محدب است اما لزوماً محدب نیست.*

تعریف ۴. *تابع $f: X \to \mathbb{R}$ را d-شبه محدب گوییم اگر برای هر $z \in [x,y]$ داشته باشیم*

$$f(z) \leq max\{f(x), f(y)\}.$$

به‌وضوح، هر تابع d-محدب، تابعی d-شبه محدب نیز هست. گزارهٔ ۱۱ بیان‌گر یک هم‌ارزی برای توابع d-شبه محدب است.

گزارهٔ ۱۱. *تابع $f: X \to \mathbb{R}$ تابعی d-شبه محدب است اگر و تنها اگر برای هر $r \in \mathbb{R}$، مجموعه r-زیرتراز*

$$L_r^f = \{x \in X | \, f(x) \leq r\}$$

مجموعه‌ای d-محدب باشد.

اثبات: فرض کنید $x,y\in L_r^f$، $z\in[x,y]$ و f تابعی d-شبه محدب باشد. در این‌صورت

$$f(z)\le \max\{f(x),f(y)\}\le r.$$

که نتیجه می‌دهد $z\in L_r^f$. بنابراین L_r^f مجموعه‌ای d-محدب است. حال فرض کنید $z\in[x,y]$، $\max\{f(x),f(y)\}=r$ و L_r^f مجموعه‌ای d-محدب باشد. بنابراین $z\in L_r^f$. در نتیجه $f(z)\le r=\max\{f(x),f(y)\}$. به‌عبارتی f تابعی d-شبه محدب است.

تبصرهٔ ۲. *گزاره فوق نشان می‌دهد که $\|.\|_1$ تابعی d-شبه محدب نسبت به $\|.\|_1$، نیست زیرا مجموعه r-زیرتراز، $B_r^{\|.\|_1}(0)$ است که با متر القا شده از $\|.\|_1$ مجموعه ای d-محدب نیست.*

مثال ۴. *تابع $\|.\|_\infty$ تابعی d-شبه محدب نسبت به $\|.\|_1$ است. زیرا مجموعهٔ r-زیرتراز مربوط به $\|.\|_\infty$ نسبت به $\|.\|_1$، d-محدب است. در حالی که $\|.\|_\infty$ تابعی d-محدب نسبت به $\|.\|_1$ نیست.*

مثال ۵. *در این مثال نشان می دهیم که $\|.\|_\infty$ نسبت به $\|.\|_1$ تابعی d-محدب نیست. فرض کنید $X=\mathbb{R}^2$، $x_0=(0,1)$، $x_1=(0,0)$ و $x_2=(-1,1)$ در این‌صورت $x_0\in[x_1,x_2]$ و $\|x_0\|_\infty=1$، در حالی‌که*

$$\frac{\|x_0-x_1\|_1}{\|x_1-x_2\|_1}\|x_2\|_\infty+\frac{\|x_0-x_2\|_1}{\|x_1-x_2\|_1}\|x_1\|_\infty=\frac{1}{2}.$$

گزارهٔ ۱۲. *فرض کنید $C\subset X$ مجموعه‌ای d-محدب و $f:C\to\mathbb{R}$ تابعی d-محدب باشد. در این صورت برای هر $x_1,x_2\in C$ و برای هر $x_0\in[x_1,x_2]$ داریم:*

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{d(x_0,x_1)}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{d(x_1,x_2)}\le\frac{f(x_2)-f(x_0)}{d(x_0,x_2)}$$

اثبات: نتیجه مستقیمی از تعریف d-محدبی است.

گزارهٔ ۱۳. *اگر $\{f_i:X\to\mathbb{R}\}$ خانواده‌ای از توابع $d-$محدب روی X باشد آن‌گاه $sup_i\{f_i\}$ نیز تابعی $d-$محدب روی X است.*

اثبات: فرض کنید $x,y\in X$ و $z\in[x,y]$. در این‌صورت بنابه $d-$محدبی همهٔ توابع f_i داریم

$$f_i(z)\le\frac{d(z,y)}{d(x,y)}f_i(x)+\frac{d(z,x)}{d(x,y)}f_i(y).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sup_i f_i(z)&\le\sup_i\left(\frac{d(z,y)}{d(x,y)}f_i(x)+\frac{d(z,x)}{d(x,y)}f_i(y)\right),\\&\le\frac{d(z,y)}{d(x,y)}\sup_i f_i(x)+\frac{d(z,x)}{d(x,y)}\sup_i f_i(y).\end{aligned}$$

که d-محدب بودن $\sup_i\{f_i\}$ را نشان می‌دهد.

گزارهٔ ۱۶. *فرض کنید $C\subset X$ مجموعه‌ای d-محدب و $f:C\to\mathbb{R}$ تابعی d-محدب باشد. اگر z یک نقطه کمینه موضعی f باشد و برای هر $x\in X$ و هر $\lambda>0$ به اندازهٔ کافی کوچک داشته باشیم $[z,x]_\lambda\ne\emptyset$، آن‌گاه z کمینه مطلق f روی C است.*

اثبات: فرض کنید z کمینه f روی همسایگی $B_r(z)$ باشد. اگر $x\in X$ و $\lambda>0$ چنان باشند که

$$[z,x]_\lambda\cap B_r(z)\ne\emptyset,$$

آن‌گاه برای هر $y\in[z,x]_\lambda\cap B_r(z)$ به‌دست می‌آوریم

$$f(z) \leq f(y) \leq (1-\lambda)f(z) + \lambda f(x),$$

که نتیجه می‌دهد $f(z) \leq f(x)$. بنابراین z کمینه مطلق f روی C است.

تعریف ۷. *فرض کنید X یک فضای متریک یکتا ژئودزیک باشد و برای هر $k \in \{1,2,\dots,n\}$ داشته باشیم $0 \leq \lambda_k \leq 1$ و $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. ترکیب محدب نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ در X در صورتی‌که $k \in \{1,2,\dots,n\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\lambda_k = 1$ به صورت*

$$\lambda_1 x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n := x_k$$

تعریف می‌شود. در غیر این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\lambda_1 x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n := \lambda_1 x_1 \oplus (1-\lambda_1)\left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}x_2 \oplus \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}x_3 \oplus \dots \oplus \frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}x_n\right).$$

قضیهٔ ۱۷. *فرض کنید X یک فضای متریک یکتا ژئودزیک و $f: X \to \mathbb{R}$ تابعی d-محدب باشد. اگر $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ و برای $i \in \{1,2,\dots,n\}$ داشته باشیم $0 \leq \lambda_i \leq 1$ به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$، آن‌گاه*

$$f(\lambda_1 x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

اثبات: اگر $k \in \{1,2,\dots,n\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\lambda_k = 1$ آن‌گاه

$$f(\lambda_1 x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n) = f(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

در غیر این‌صورت اگر $n = 2$ آن‌گاه d-محدبی f حکم را ثابت می‌کند. به استقرا فرض کنید حکم برای ترکیب محدب $n-1$ عنصر برقرار باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n) &\\
&= f(\lambda_1 x_1 \oplus (1-\lambda_1)(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}x_2 \oplus \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}x_3 \oplus \dots \oplus \frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}x_n))\\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}x_2 \oplus \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}x_3 \oplus \dots \oplus \frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}x_n)\\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} f(x_i)\\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).
\end{aligned}$$

در [۵] نتایج جالبی در مورد ارتباط بین تحدب معمولی و تحدب متریک در فضاهای نرم‌دار ثابت شده است که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به آن مراجعه کند.

وجوه و نقاط انتهایی مجموعه‌های محدب متریک در فضاهای ژئودزیک

وجوه و نقاط انتهایی نقش مهمی در بررسی مجموعه‌های محدب دارند. قضیهٔ کرین-میلمن در فضاهای خطی بیان می‌کند که هر مجموعه محدب پوش محدب بسته نقاط انتهایی خودش است [۱۲]. هم‌چنین نقاط انتهایی گوی یکه در یک فضای نرم‌دار مشخص کننده ویژگی هندسی آن فضا هستند که مستقیماً به نرم فضا مربوط می‌شود [۳]. در این بخش به بررسی نقاط انتهایی و وجوه گوی‌های یکه و پاره‌خط‌های متریک در فضاهای متریک (و در حالت خاص

فضاهای نرم‌دار) و ارتباط آن با ژئودزیک‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۸. *نقطه x متعلق به مجموعه محدب A را یک نقطه انتهایی گوییم اگر به ازای هر $y, z \in A$ که $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ داشته باشیم $x = y$ یا $x = z$. مجموعه تمام نقاط انتهایی A را با $Ext(A)$ نمایش می دهیم.*

تعریف ۹. *زیرمجموعه ناتهی F از مجموعه محدب A را یک وجه می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in (0,1)$ که $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ نتیجه شود $x, y \in F$. وجهی را که اکیداً کوچک‌تر از A باشد یک وجه سره می‌گوییم.*

لم ۱۸. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار خطی باشد و $x, y \in X$.*
خم $\gamma: [0, \| x-y \|] \to [x,y]$ انبساطی است (یعنی $\| \gamma(t) - \gamma(s) \| \geq |t-s|$) اگر و تنها اگر

$$\| \gamma(t) - x \| = t \quad \text{و} \quad \| \gamma(t) - y \| = d(x,y) - t,$$

برای هر $t \in [0, \| x-y \|]$.

اثبات: فرض کنید $0 < t < 1$. بنابر فرض داریم:

$$\| \gamma(t) - x \| = \| \gamma(t) - \gamma(0) \| \geq t,$$

و

$$\| \gamma(t) - y \| = \| \gamma(t) - \gamma(\| x-y \|) \| \geq \| x-y \| - t.$$

اگر یکی از نامساوی‌های مذکور اکید باشد آن‌گاه

$$\| x-y \| = \| \gamma(t) - x \| + \| \gamma(t) - y \| > \| x-y \|,$$

که تناقض است. اگر برای هر $t \in [0, \| x-y \|]$ داشته باشیم

$$\| \gamma(t) - x \| = t \quad \text{و} \quad \| \gamma(t) - y \| = d(x,y) - t,$$

آن‌گاه برای هر $s, t \in [0, \| x-y \|]$ داریم

$$\| \gamma(t) - \gamma(s) \| \geq \| \gamma(t) - x \| - \| \gamma(s) - x \| = |t-s|.$$

بنابراین γ انبساطی است.

مثال زیر یک خم انبساطی را نشان می‌دهد که ژئودزیک نیست بر خلاف خم‌های انقباضی که همیشه ژئودزیک هستند (گزارهٔ ۲،۳،۴ از [۱۰] را ببینید).

مثال ۶. *در $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ خم $\gamma: [0,3] \to [(0,1),(2,0)]$ را با ضابطه زیر تعریف کنید:*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right), & 0 \leq t \leq 2, \\ (2t-3, t-2), & 2 \leq t \leq \frac{5}{2}, \\ (2, 3-t), & \frac{5}{2} \leq t \leq 3. \end{cases}$$

به‌راحتی می‌توان دید که $\| \gamma(t) - (0,1) \| = t$ و $\| \gamma(t) - (2,0) \| = 3 - t$. بنابر لم ۱۸ خم γ انبساطی است در صورتی که ژئودزیک نیست زیرا $\gamma(2) = (1,0)$ متعلق به پاره‌خط متریک $[\gamma(0), \gamma(\frac{5}{2})]$ نیست (که با لم ۲،۲،۱۱ از [۱۰] تناقض دارد).

قضیهٔ ۱۹. *فرض کنید* $(X,\|.\|)$ *یک فضای خطی نرم دار باشد و* $S^1=\{x\in X;\ \|x\|=1\}$. *اگر تنها یک ژئودزیک بین* x *و* 0 *وجود داشته باشد، آن‌گاه نقطه* $x\in S^1$ *یک نقطه انتهایی از* $\overline{B_1(0)}$ *است.*

اثبات: اگر $x\in S^1$ یک نقطه انتهایی از $\overline{B_1(0)}$ نباشد، آن‌گاه $0<t<1$ و x_0 و x_1 متعلق به $\overline{B_1(0)}$ وجود دارند به‌طوری‌که $x=tx_0+(1-t)x_1$. به‌آسانی دیده می‌شود که $x_0,x_1\epsilon\overline{B_1(0)}$. زیرا، اگر $\|x_0\|<1$ یا $\|x_1\|<1$ ، داریم $\|x\|\le t\|x_0\|+(1-t)\|x_1\|<1$ که تناقض است. بنابراین

$$\|x_0\|=\|x_1\|=\|x\|=1,.$$

ادعا می‌کنیم $0<\lambda<1$ وجود دارد چنان‌که $\|x-\lambda x_0\|+\|\lambda x_0\|=1$. در غیراین‌صورت برای هر $0<\lambda<1$، داریم:

$$\|x-\lambda x_0\|+\|\lambda x_0\|>1,$$

که نتیجه می دهد

$$\|tx_0+(1-t)x_1-\lambda x_0\|+\lambda\|x_0\|>1..$$

بنابراین

$$\|(t-\lambda)x_0+(1-t)x_1\|>1-\lambda_{\text{و}}$$

در نتیجه

$$|t-\lambda|+(1-t)\ge\|(t-\lambda)x_0+(1-t)x_1\|>1-\lambda,$$

که برای هر $\lambda\in(0,1)$ نتیجه می‌دهد $|t-\lambda|>t-\lambda$ که به‌وضوح یک تناقض است. بنابراین $\lambda\in(0,1)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|x-\lambda x_0\|+\|\lambda x_0\|=1$. پس ژئودزیکی بین 0 و x شامل λx_0 وجود دارد. از طرفی چون λx_0 روی پاره‌خط بین 0 و x واقع نیست، بیش از یک ژئودزیک بین 0 و x وجود دارد.

عکس قضیهٔ ۱۹ نیز درست است و نتیجه‌ای از قضیهٔ ۶.۹ از فصل ۲ [۲] است.

نتیجهٔ ۲۰. *نقطه* $z\in B_r(x)$ *نقطه انتهایی* $B_r(x)$ *است اگر و تنها اگر تنها یک ژئودزیک بین* z *و* x *وجود داشته باشد.*

مثال ۷. *فضای* $(\mathbb{R}^2,\|.\|_1)$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \|(x,y)\|_1=1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;|x|+|y|=1\}\in Ext\left(B_1^{\|.\|_1}(0)\right)$$

و

$$\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}\in Ext\left(\overline{B_1^{\|.\|_1}(0)}\right),$$

و پاره‌خط بین $(1,0)$ و $(0,1)$ یک وجه سره از $\overline{B_1^{\|.\|_1}(0)}$ است.

تبصرهٔ ۳. *اگر* x *یک نقطه انتهایی از گوی یکه باشد، آن‌گاه تنها یک ژئودزیک بین* x *و* $-x$ *وجود دارد. زیرا اگر* $y\in[-x,x]$*، آن‌گاه* $\|x-y\|+\|x+y\|=2$. *با تقسیم کردن طرفین بر ۲ داریم:*

$$\|x-\frac{x-y}{2}\|+\|\frac{x-y}{2}-0\|=1..$$

بنابراین $\frac{x-y}{2}\in[0,x]$. *حال بنا به قضیهٔ ۱۹، برای یک* $0<\lambda<1$ *داریم* $\frac{x-y}{2}=\lambda x$. *در نتیجه* $y=\lambda(-x)+(1-\lambda)x$*، به‌عبارت دیگر* $y\in\overline{(-x)x}$.

گزارهٔ ۲۱. *اگر* X *یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آن‌گاه برای هر* $x,y\in X$ *داریم* $\{x,y\}\subset Ext\{[x,y]\}$.

اثبات: فرض کنید $x=tz+(1-t)w$ که $0<t<1$ و $z,w\in[x,y]$. در این‌صورت $0<\lambda,\mu<1$

وجود دارند به‌طوری‌که

$$\| z-y \|= \lambda \| x-y \| \quad \text{و} \quad \| w-y \|= \mu \| x-y \|.$$

با ضرب کردن تساوی‌های مذکور در t و $1-t$ داریم

$$\| x-y \| \leq t \| z-y \| + (1-t) \| w-y \|= t\lambda \| x-y \| + (1-t)\mu \| x-y \| < \| x-y \|,$$

که یک تناقض است.

گزارهٔ ۲۲. *فرض کنید* $z \in [x,y]$. *اگر* $[x,z]$ *و* $[z,y]$ *دو وجه از* $[x,y]$ *باشند، آن‌گاه* z *نقطه انتهایی* $[x,y]$ *است.*

اثبات: فرض کنید z نقطه انتهایی $[x,y]$ نباشد، آن‌گاه $t,w \in [x,y]$ و $0<\lambda<1$ وجود دارند به‌طوری‌که $z=\lambda t+(1-\lambda)w$. اثبات می‌کنیم:

$$(1-\lambda)x+\lambda t \in [x,z] \quad \text{و} \quad \lambda y+(1-\lambda)w \in [z,y] \tag{۱}$$

در غیر این‌صورت یکی از نامساوی‌های

$$\lambda \| x-t \| + \| (1-\lambda)x+\lambda t-z \| \geq \| x-z \|,$$

یا

$$(1-\lambda) \| y-w \| + \| \lambda y+(1-\lambda)w-z \| \geq \| z-y \|,$$

اکید است. حال با جانشانی $z=\lambda t+(1-\lambda)w$ در سمت چپ نامساوی‌های مذکور و جمع آنها داریم:

$$\lambda \| x-t \| + (1-\lambda) \| x-w \| + (1-\lambda) \| y-w \| + \lambda \| t-y \| > \| x-z \| + \| z-y \|.$$

که با توجه به $z,t,w \in [x,y]$ و مفروضات، یک تناقض است. در نتیجه گزارهٔ (۱) برقرار است. حال چون $[x,z]$ و $[z,y]$ دو وجه هستند بنابر (۱) به‌دست می‌آوریم $t \in [x,z]$ و $w \in [z,y]$. از $z=\lambda t+(1-\lambda)w$ نتیجه می‌شود $w \in [x,z]$ و $t \in [z,y]$. بنابر $w \in [x,y] \cap [z,y]$، این تساوی‌ها به‌دست می‌آید:

$$\| w-x \| + \| w-z \| = \| x-z \| \quad \text{و} \quad \| z-w \| + \| w-y \| = \| z-y \|$$

که با جمع آنها نتیجه می‌شود $z=w$ که یک تناقض است.

مسئله: ما نمی‌دانیم که آیا عکس گزاره ۲۲ برقرار است یا نه؟

پیوستگی توابع محدب در فضاهای متریک ژئودزیک

توابع محدب در فضاهای خطی ویژگی‌های پیوستگی خوبی دارند. هدف ما در این بخش بررسی پیوستگی توابع محدب روی فضاهای متریک ژئودزیک است. این ویژگی‌ها در مراجع متعددی بررسی شده‌اند. به‌عنوان نمونه می‌توان مراجع [۶]، [۱۱] را دید.

تعریف ۵. *فرض کنید* $\lambda \in [0,1]$ *و* $x,y \in X$ *گوییم* $z \in [x,y]^\lambda$ *هرگاه* $y \in [x,z]_\lambda$.

تعریف ۶. *یک فضای متریک یکتا ژئودزیک* X *را ممتد ژئودزیک گوییم اگر برای هر* $x,y \in X$ *و* $0<\lambda<1$، عضو یکتای $z \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $y=\lambda x \oplus (1-\lambda)z$. *در این حالت* $[x,y]^\lambda=\{z\}$. X *را به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک گوییم اگر ممتد ژئودزیک باشد و برای هر* $x \in X$ *و* $0<\lambda<1$، *تابع*

با ضابطه $f_x(y) = [x, y]^\lambda$ *پیوسته باشد.* $f_x: X \to X$

مثال ۸. *فضای* $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ یک فضای به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک است. زیرا اگر $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ و $0 < \lambda < 1$، آن‌گاه با در نظر گرفتن $z = \left(\frac{y_1-\lambda x_1}{1-\lambda}, \frac{y_1-\lambda x_1}{1-\lambda}\right)$ داریم $y = \lambda x + (1-\lambda)y$، که ممتد ژئودزیک بودن $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ را بیان می‌کند. از طرفی چون تابع $f_{(x_1,x_2)}((y_1, y_2)) = \left(\frac{y_1-\lambda x_1}{1-\lambda}, \frac{y_1-\lambda x_1}{1-\lambda}\right)$ تابعی پیوسته است، فضای $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ یک فضای به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک است.

گزارهٔ ۲۳. *فرض کنید* X *یک فضای متریک یکتا ژئودزیک باشد که دارای ویژگی ممتد ژئودزیک است. اگر* $f: X \to \mathbb{R}$ *تابعی محدب و در یک همسایگی از نقطه* $x_0 \in D(f)$ *از بالا کراندار باشد، آن‌گاه:*

۱) f در x_0 موضعاً کراندار است.

۲) f در x_0 موضعاً لیپ شیتز است.

اثبات: برای اثبات (۱)، فرض کنید $M > 0$ و $\varepsilon > 0$ چنان باشند که برای هر $x \in B_\varepsilon(x_0)$ داشته باشیم $f(x) \leq M$. قرار دهید $y = [x, x_0]^{\frac{1}{2}}$، آن‌گاه $x_0 = \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y$. تحدب f نتیجه می‌دهد

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x).$$

بنابراین $f(x) \geq 2f(x_0) - f(y) \geq 2f(x_0) - M$.

برای اثبات (۲)، فرض کنید f در $B_\varepsilon(x_0)$ به‌وسیلهٔ M کراندار باشد. با برهان خلف $x_1, x_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ را چنان انتخاب کنید که

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{d(x_2, x_1)} > \frac{4M}{\varepsilon}.$$

قرار دهید $\lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2d(x_1, x_2)}$ و $x_3 = [x_1, x_2]^\lambda$. آن‌گاه $x_3 \in B_\varepsilon(x_0)$ و $d(x_3, x_2) = \frac{\varepsilon}{2}$. با استفاده از تحدب f داریم:

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{d(x_3, x_2)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{d(x_1, x_2)} > \frac{4M}{\varepsilon}.$$

از این‌رو، $f(x_3) - f(x_2) > 2M$ و این با کرانداری f روی $B_\varepsilon(x_0)$ به‌وسیلهٔ M تناقض دارد.

گزارهٔ ۲۴. *فرض کنید* X *یک فضای به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک و یکتا ژئودزیک و* $f: X \to \mathbb{R}$ تابعی محدب و سره باشد. اگر f در $x \in X$ از بالا موضعاً کراندار باشد، آن‌گاه f در هر نقطه $y \in X$ موضعاً کراندار است و در نتیجه موضعاً لیپ شیتز است.

اثبات: فرض کنید M یک کران بالا برای f در $B_r(x)$ باشد و $x \neq y \in X$. چون X یک فضای ممتد ژئودزیک است $z \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $y = \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}z$. از طرفی چون X یک فضای به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک نیز هست $r' > 0$ وجود دارد چنان‌که $B_{r'}(y) \subset f_z^{-1}(B_r(x))$. بنابراین برای هر $v \in B_r(x)$ $u \in B_{r'}(y)$، وجود دارد به‌طوری‌که $u = \frac{1}{2}v \oplus \frac{1}{2}z$. در نتیجه

$$f(u) \leq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(z) \leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}f(z).$$

اکنون، اثبات بنابر گزارهٔ ۲۳ کامل می‌شود.

قضیهٔ ۲۵. *فرض کنید* X *یک فضای به‌طور پیوسته ممتد ژئودزیک و یکتا ژئودزیک و* $f: X \to \mathbb{R}$ تابعی محدب، سره و شبه پیوسته پایینی باشد، آن‌گاه f پیوسته و موضعاً لیپ شیتز در $intD(f)$ است.

اثبات: قرار دهید $x \in int(D(f))$. آن‌گاه $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset D(f)$. مقدار $r > 0$ را چنان انتخاب کنید که $f(x) < r$، ($x \in L_r^f$). برای هر $y \in \overline{B_\varepsilon(x)}$ قرار دهید $y_t = (1-t)x \oplus ty$ و تعریف کنید $g(t) = f(y_t)$. در این صورت $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی محدب در همسایگی 0 است. برای n به‌اندازهٔ کافی بزرگ قرار دهید $y_{\frac{1}{n}} \in L_r^f$ و تعریف کنید:

$$nL_r^f := \left\{y \in X\colon\ y_{\frac{1}{n}} \in L_r^f\right\}.$$

به‌وضوح $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(nL_r^f \cap \overline{B_\varepsilon(x)}\right) = \overline{B_\varepsilon(x)}$. با استفاده از قضیهٔ بئر [۱۲] عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که

$$int\left(nL_r^f \cap \overline{B_\varepsilon(x)}\right) \neq \emptyset.$$

بنابراین $int\left(L_r^f \cap \overline{B_\varepsilon(x)}\right) \neq \emptyset$. حال نتیجه از گزارهٔ ۲۴ و موضعاً کرانداری f به‌دست می‌آید.

منابع

1. Bielawski R., "Simplicial convexity and its applications", J. Math. Anal. Appl., 127 (1987) 155-161.
2. Boltyanski V., Martini H., Soltan P. S., "Excursions into Combinatorial Geometry", Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1997).
3. Cioranescu I., "Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems", Mathematics and its Applications, 62. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1990).
4. Kutateladze S. S., Rubinov A. M., "Minkowski duality and its applications", Usp. Mat. Nauk, 27 (1972) 137-192.
5. Krynski S., "Metrically convex functions in normed spaces", Studia Math. 105 (1993) 1-11.
6. Lucchetti R., "Convexity and Well-posed Problems", CMS Books in Mathematics, Springer, New York (2006).
7. Menger K., "Untersuchen ¨uber allgemeine Metrik, I, II, III," Math. Ann., 100 (1928) 75-163.
8. Michael E., "Convex structures and continuous selections", Canad. J. Math., 11 (1959) 556-575.
9. Pallaschke D., Rolewicz S., "Foundations of Mathematical Optimization", Math. Appl., Vol. 388, Kluwer Academic Publ., Dordrecht-Boston-London (1997).
10. Papadopoulos A., "Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature", IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 6. European Mathematical Society (EMS), Zürich, (2005).
11. Roberts A.W., Varberg D.E., "Convex Functions, Pure and Applied Mathematics", Vol. 57. Academic Press, New York-London (1973).
12. Rudin W., "Functional Analysis", Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York (1991).
13. Rubinov A. M., "Abstract Convexity and Global Optimization", Nonconvex Optimization

and Its Applications, Vol. 44, Kluwer Academic Publ.(2000).

14. Rubinov A.M., "Abstract convexity: Examples and Applications, Optimization", 47 (2000) 1-33.
15. Singer I., "Abstract Convex Analysis", Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, Inc., New York (1997).
16. Soltan V. P., "Introduction to Axiomatic Theory of Convexity[in Russian]", Stiinca, Kishiniev (1984).
17. Soltan V. P., Soltan P. S., "d-convex functions", Dokl. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 249 (1979) 555-568.
18. Stone M. H., "Postulates for the barycentric calculus", Ann. Mat. Pura Appl., 29 (1949) 25-30.
19. Van De Vel M., "Finite dimensional convex structures I: general results", Topology Appl., 14 (1982) 201-225.
20. Van De Vel M., "A selection theorem for topological convex structures", Trans. Amer. Math. Soc., 336 (1993) 463-496.