معرفی توزیع جدید طول عمر از خانوادهٔ توزیع‌های سری توانی گمپرتز

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی*؛ دانشگاه پیام نور، ایران
علی شادرخ، مسعود یارمحمدی؛ دانشگاه پیام نور تهران شرق، ایران

دریافت ۹٤/۳/٦ پذیرش ۹٤/۱۱/۱۰

چکیده

در این مقاله توزیع جدید سه پارامتری از خانوادهٔ توزیع‌های سری توانی گمپرتز[1] به‌نام توزیع گمپرتز- پواسن را که دارای تابع نرخ خطر افزایشی، کاهشی، افزایشی-کاهشی و تک مدی شکل[2] و ترکیبی از توزیع‌های گمپرتز و پواسن بریده شده در نقطه صفر است را معرفی می‌کنیم. تابع‌های چگالی و خطر، میانگین انحرافات از میانگین و میانه، آنتروپی‌های رنی و شانون و فرمول عمومی برای گشتاورها و تابع چگالی آماره‌های مرتب این توزیع جدید را به‌دست می‌آوریم، همچنین پارامترهای این توزیع جدید را به‌روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و با استفاده از الگوریتم امید ریاضی‌گیری و ماکسیمم‌سازی[3] برآورد کرده و فاصله‌های اطمینان مجانبی آن‌ها را به‌کمک ماتریس کوواریانس مجانبی به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: توزیع گمپرتز، توزیع پواسن، توزیع گمپرتز- پواسن، توزیع‌های سری توانی، برآورد ماکسیمم درستنمایی.

مقدمه

مارشال و الکین [۱] با ترکیب یک توزیع پیوسته و یک توزیع گسسته البته با مقادیر صحیح نامنفی، روشی تازه برای معرفی توزیع‌های جدید طول عمر معرفی کردند. مقالات متعددی از این روش استفاده کرده و توزیع‌های جدیدی را معرفی کردند. مارشال و الکین [۱] توزیع‌های وایبول و نمایی را تعمیم دادند. آلیس و جوس [۲] توزیع نیمه پارتوی مارشال-الکین را معرفی کردند. گیتانی و همکاران [۳] نیز توزیع وایبول مارشال-الکین را معرفی کرده و با استفاده از داده‌های سانسور شده خواص آن را بررسی کردند. گیتانی و همکاران [٤] توزیع لوماکس تعمیم یافتهٔ مارشال الکین را معرفی کردند. همچنین توزیع‌های جدیدی به‌صورت ترکیبی از توزیع پواسن و نمایی به‌وسیلهٔ بعضی از نویسندگان معرفی شد. کاس [٥] توزیع پواسن- نمایی را که تابع نرخ خطر کاهشی دارد و کانچو و همکاران [٦] تعمیمی از توزیع پواسن- نمایی و ال- اوادهی [۷] توزیع پواسن- لوماکس را معرفی کردند.

فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_Z$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی f و z نیز یک متغیر تصادفی گسسته و با توزیع پواسن بریده شده در صفر و با تابع احتمال زیر باشد.

$$P_Z(z) \equiv P_Z(z;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!(1-e^{-\lambda})},\ z \in \{1,2,3,\dots\}, \lambda > 0. \qquad (1)$$

*نویسندهٔ مسئول yagoubzade@gmail.com

1. Gampertz
2. Unimodal
3. Algoritm EM

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

فرض کنید X بیان‌گر طول عمر سیستمی متشکل از Z مؤلفهٔ موازی باشد. بنابراین با فرض $X=\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_Z)$ و استقلال Y_iها و Z تابع چگالی احتمال شرطی $X|Z$ برابر است با

$$f_{x|z}(x|z)=zf(x)[F(x)]^{z-1}, \tag{۲}$$

به‌طوری‌که $F(x)$ تابع توزیع تجمعی متناظر با تابع چگالی $f(x)$ است. به‌کمک $P_Z(z)$ و $f_{X|Z}(x|z)$ که Z متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال داده شده در رابطهٔ (۱) و X نیز یک متغیر تصادفی پیوسته است داریم:

$$g_X(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{X|Z}(x|z)P_Z(z). \tag{۳}$$

با جای‌گذاری روابط (۱) و (۲) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$g_X(x)=\frac{\lambda f(x)e^{\lambda \bar{F}(x)}}{1-e^{-\lambda}}, \quad x>0, \lambda>0, \tag{۴}$$

به‌طوری‌که $\bar{F}(x)=1-F(x)$ تابع‌های قابلیت اعتماد و نرخ خطر X به‌ترتیب عبارت است از:

$$\bar{G}(x;\lambda)=\frac{1-e^{-\lambda \bar{F}(X)}}{1-e^{-\lambda}}, \quad x>0, \tag{۵}$$

$$h_G(x;\lambda)=\frac{\lambda f(x)}{e^{\lambda \bar{F}(x)}-1}. \tag{۶}$$

متغیر تصادفی X دارای توزیع گمپرتز با پارامترهای α و β است. اگر تابع چگالی احتمال آن بدین‌صورت باشد:

$$f_{GD}(x;\alpha,\beta)=\alpha e^{\beta x}e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, \quad x>0, \alpha>0, \beta\in(-\infty,\infty). \tag{۷}$$

که α و β به‌ترتیب پارامترهای مکان و شکل هستند. همچنین تابع‌های قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع گمپرتز به‌ترتیب برابر است با:

$$\bar{F}_{GD}(x;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, \quad x>0, \tag{۸}$$

$$h_{GD}(x;\alpha,\beta,\lambda)=\alpha e^{\beta x}, \quad x>0. \tag{۹}$$

توزیع گمپرتز در مدل‌سازی و تحلیل داده‌های مربوط به مرگ و میر (وترسترند [۸] و گاوریلاو [۹]) نقش مهمی دارد. از طرفی چون تابع نرخ خطر این توزیع افزایشی است بنابراین نمی‌تواند برای توصیف حالاتی که داده‌ها از توزیع‌های با تابع نرخ خطر تک مدی شکل تبعیّت می‌کنند استفاده شود به این علت توزیع جدیدی برای طول عمر معرفی می‌کنیم که تابع نرخ خطر آن علاوه بر افزایشی، تک مدی شکل باشد. در این مقاله با ترکیب توزیع‌های گمپرتز و پواسن بریده شده در صفر، توزیع طول عمر جدیدی به نام توزیع گمپرتز-پواسن را معرفی کرده و برخی از خصوصیات آن را محاسبه می‌کنیم. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲ توزیع گمپرتز-پواسن را معرفی کرده و در بخش ۳ تابع‌های توزیع تجمعی، چگالی احتمال، قابلیت اعتماد و نرخ خطر و برخی از ویژگی‌های این توزیع جدید را به‌دست می‌آوریم، همچنین فرمولی عمومی برای گشتاورها و تابع چگالی آماره‌های مرتب نیز در این بخش ارائه می‌دهیم. برآورد پارامترهای این توزیع جدید را به‌روش ماکسیمم درست‌نمایی و الگوریتم امید ریاضی‌گیری و ماکسیمم‌سازی در بخش ۴ به‌دست آورده و فواصل اطمینان مجانبی پارامترهای آن در بخش ۵ بررسی می‌شود. در بخش ۶ نیز با مجموعه‌ای داده‌های واقعی کاربرد توزیع جدید را بیان می‌کنیم.

توزیع گمپرتز- پواسن

فرض کنید $X = max\,(Y_1\,,Y_2\,,\dots,Y_Z)$ و Y_iها دارای توزیع داده شده در (۶) و Z نیز دارای توزیع داده شده در (۱) و Y_iها از Z مستقل باشند. بنابراین با جای‌گذاری روابط (۷) و (۸) در رابطهٔ (۴) داریم:

$$f(x;\alpha\,,\beta\,,\lambda) = \frac{\lambda\alpha e^{\beta x}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\, e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}}{1-e^{-\lambda}}\,, x>0, \alpha,\lambda>0, \beta\epsilon(-\infty,\infty) \qquad (10)$$

رابطهٔ (۱۰) همان تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز-پواسن است که متعلق به خانوادهٔ توزیع‌های توانی گمپرتز است. بنابراین رابطهٔ (۴) رابطه‌ای مهم و فرمولی کلی برای به‌دست آوردن خانوادهٔ توزیع‌های توانی توزیع با تابع چگالی $f(x)$ است.

خواص توزیع گمپرتز- پواسن

۱. توابع قابلیت اعتماد، خطر و توزیع تجمعی و آماره‌های مرتب

فرض کنید X متغیری تصادفی با توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای α و β و λ باشد. تابع‌های قابلیت اعتماد و خطر آن به‌ترتیب با جای‌گذاری رابطهٔ (۸) در رابطهٔ (۵) و رابطهٔ (۹) در رابطهٔ (۶) بدین‌صورت به‌دست می‌آیند:

$$\bar{G}_{GPD}(X;\alpha\,,\beta\,,\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}}{1-e^{-\lambda}}\,, \qquad (11)$$

$$h_{GPD}(x;\alpha\,,\beta\,,\lambda) = \frac{\lambda\alpha e^{\beta x}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)} e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}}{1-e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}}.$$

اکنون با توجه به رابطهٔ (۱۱) تابع توزیع تجمعی توزیع گمپرتز- پواسن برابر است با:

$$\begin{aligned} F_{GPD}(x;\alpha\,,\beta\,,\lambda) &= 1-\bar{G}_{GPD}(x;\ \alpha\,,\beta\,,\lambda) \\ &= \frac{e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}. \qquad (12) \end{aligned}$$

اکنون با توجه به بسط مک لورن $e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}$ نشان می‌دهیم که می‌توان تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز - پواسن را به‌صورت آمیخته[4] از توزیع‌های گمپرتز با پارامتر شکل یکسان β نوشت.

$$\begin{aligned} f_{GPD}(x;\alpha\,,\beta\,,\lambda) &= \frac{\lambda\alpha e^{\beta x}\, e^{\beta x}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{1-e^{-\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\lambda^n e^{-\frac{n\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-\lambda)^{n+1}}{(n+1)!\ (e^{\lambda}-1)}\right)\left[((n+1)\alpha)\beta e^{-\frac{(n+1)\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\right] \end{aligned}$$

با توجه به تابع چگالی گمپرتز داریم:

$$f_{GPD}(x;\alpha\,,\beta\,,\lambda) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n f_{GD}(x;(n+1)\alpha,\beta), \qquad (13)$$

4. Mixture

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

به‌طوری‌که $\omega_n = \frac{(-\lambda)^{n+1}}{(n+1)!(e^{\lambda}-1)}$ البته به‌راحتی می‌توان ثابت کرد $\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n = 1$

با توجه به‌رابطهٔ (۱۳) می‌توان بعضی از خصوصیات توزیع گمپرتز- پواسن مانند گشتاورها و تابع مولد گشتاور را به‌کمک خصوصیات توزیع گمپرتز به‌دست آورد. اکنون نشان می‌دهیم که تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره‌های مرتب توزیع گمپرتز- پواسن را نیز می‌توان به‌صورت آمیخته از توزیع‌های گمپرتز با شکل یکسان β نوشت.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای α و β و λ باشد. تابع چگالی آمارهٔ ترتیبی i ام آن $(X_{i:n})$ که با نماد $(f_{i:n}(x))$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$f_{i:n}(x) = \frac{\lambda\alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x}-1\right)}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)^{n} B(i, n-i+1)} \left[e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta z}-1}} - e^{-\lambda}\right]^{n-j} \left[1 - e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x}-1\right)}}\right]^{i-1}, \qquad (14)$$

به‌طوری‌که $B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$ که تابع بتا نام دارد. با استفاده از بسط دو جمله‌ای و بسط مک لورن توزیع‌های نمایی در رابطهٔ (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\lambda\alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{(1-e^{-\lambda})^{n} B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{i-1}\Bigg[\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{k} \\ &\times \quad (-1)^{j+i-k-1} e^{-(i-k-1)^{\lambda}} e^{-(j+k+1)\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x}-1\right)}}\Bigg] \\ &= \frac{\lambda\alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{(1-e^{-\lambda})^{n} B(i, n-i+)} \sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{r=0}^{\infty}\Bigg\{\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{k} \\ &\times (-1)^{j+i-k-1} e^{-(i-k-1)\lambda} \frac{(-\lambda)^{r}(j+k+1)^{r} e^{-\frac{r\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x}-1\right)}}{r!}\Bigg\} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^{n} B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{k}(-1)^{j+i-k}}{(r+1)!} \\ &\times \quad e^{-(i-k-1)\lambda}(-\lambda)^{r}\left(\mathrm{j}+\mathrm{k}+1\right)^{r}\Big]\left[\left((\mathrm{r}+1)\alpha\right) e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{(r+1)\beta}\left(e^{\beta z}-1\right)}\right]. \end{aligned}$$

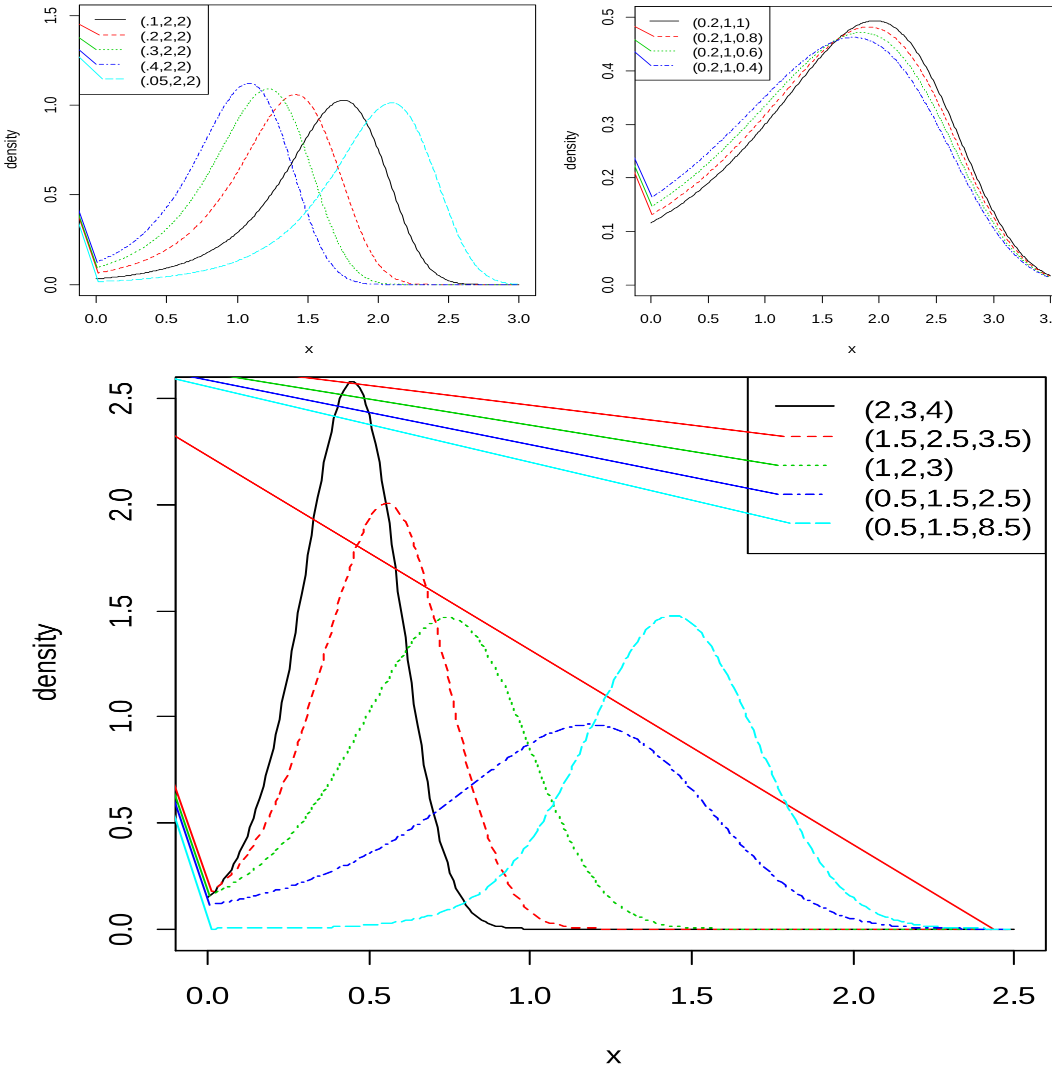
با توجه به تابع چگالی توزیع گمپرتز (رابطهٔ (۷)) داریم:

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_{GD}\left(x; (1+r)\alpha, \beta\right), \qquad (15)$$

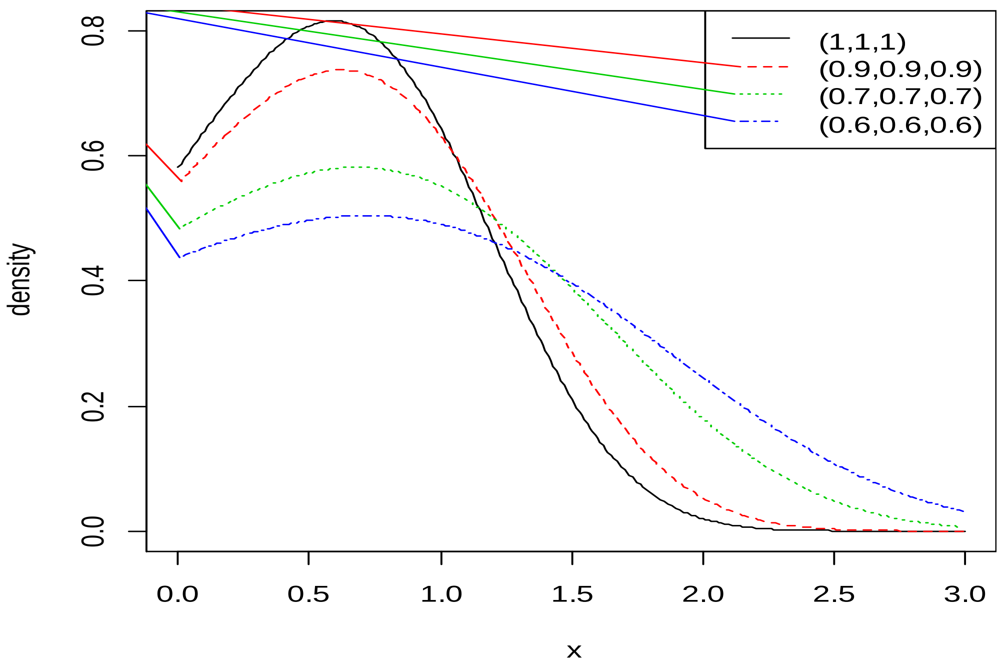
به‌طوری‌که

$$K_r = \frac{\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{k}(-1)^{j+i-k} e^{-(i-k-1)\lambda}(-\lambda)^{r}(j+k+1)^{r}}{(1-e^{-\lambda})^{n} B\left(i,\ n-i+1\right)(r+1)!}$$

نمودارهای تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز-پواسن در شکل‌های ۱ و ۲ و نمودارهای تابع خطر آن در شکل ۳ نشان داده شده است. شکل‌های ۱ و ۲ بیان‌گر انعطاف‌پذیری خوب توزیع و شکل ۳ بیان‌گر افزایشی، کاهشی، گودالی شکل و طاق مانند شکل بودن تابع خطر توزیع است.

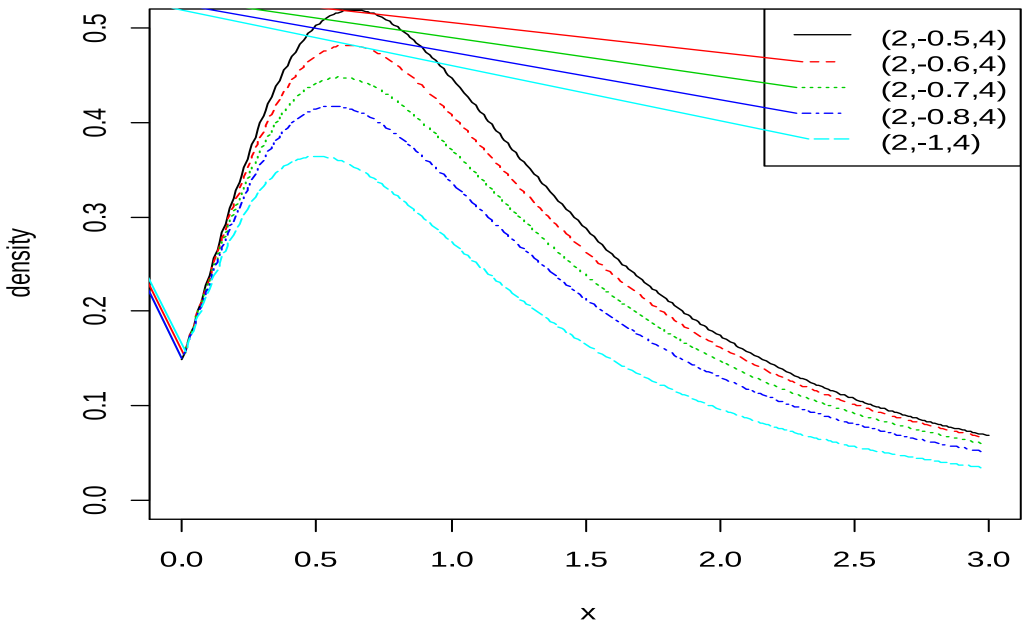


شکل ۱. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر متفاوت پارامترهایش

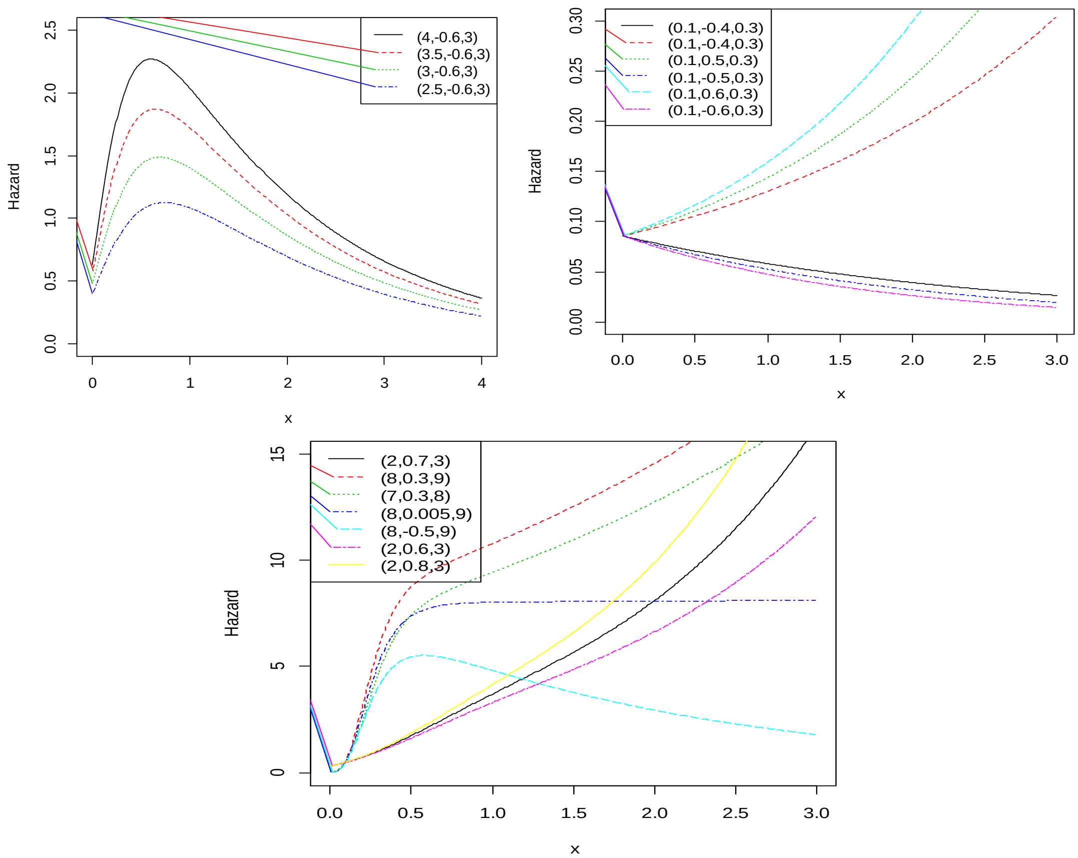


[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]



شکل ۲. ادامه نمودار تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر متفاوت پارامترهایش



شکل ۳. نمودار تابع نرخ خطر توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر متفاوت پارامترهایش

۲. چندک‌ها و گشتاورها

با توجه به رابطهٔ (۱۲) چندک مرتبه γ ام (x_γ) توزیع گمپرتز- پواسن از رابطهٔ (۱٦) به‌دست می‌آید.

$$x_{\gamma} = \frac{۱}{\beta}\left\{\log\left[۱ - \frac{\beta}{\alpha}\log\left(-\frac{۱}{\lambda}\log\left(\gamma + (۱-\gamma)e^{-\lambda}\right)\right)\right]\right\} \qquad (۱۶)$$

با در نظر گرفتن مقادیر۰/۲۵و ۰/۵ و ۰/۷۵ برای γ، مقادیر چارک اول $(Q_{۱})$، چارک دوم $(Q_{۲})$ یا میانه و چارک سوم $(Q_{۳})$ را به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع گمپرتز- پواسن محاسبه کردیم که در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است. مشاهده می‌گردد که چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم نسبت به α و β کاهشی و نسبت به λ صعودی هستند.

اکنون در ادامه گشتاورهای توزیع گمپرتز- پواسن و گشتاورهای آماره‌های مرتب آن را به‌دست می آوریم.

جدول ۱. مقادیر چارک‌های توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر مختلف α، β و λ

		$\beta = -۱$			$\beta = ۱$		
λ	α	$Q_{۱}$	$Q_{۲}$	$Q_{۳}$	$Q_{۱}$	$Q_{۲}$	$Q_{۳}$
۰/۵	۰/۴	۰/۰۹۳۶	۰/۲۳۱۰	۰/۵۰۰۲	۰/۰۸۵۶	۰/۱۸۷۵	۰/۳۳۱۹
	۵/۴	۰/۰۸۲۷	۰/۲۰۲۵	۰/۴۳۰۶	۰/۰۷۶۴	۰/۱۶۸۳	۰/۳۰۰۰
	۵/۰	۰/۰۷۴۱	۰/۱۸۰۳	۰/۳۷۸۲	۰/۰۸۹۰	۰/۱۵۲۷	۰/۲۷۳۷
	۵/۵	۰/۰۶۷۲	۰/۱۶۲۵	۰/۳۳۷۲	۰/۰۶۲۹	۰/۱۳۹۷	۰/۲۵۱۷
۱/۵	۴/۰	۰/۱۴۵۱	۰/۳۲۶۸	۰/۶۶۲۷	۰/۱۲۶۷	۰/۲۴۵۹	۰/۳۹۵۱
	۵/۴	۰/۱۲۷۹	۰/۲۸۴۸	۰/۵۶۳۳	۰/۱۱۳۳	۰/۲۲۱۴	۰/۳۵۸۱
	۵/۰	۰/۱۱۴۳	۰/۲۵۲۳	۰/۴۹۰۴	۰/۱۰۲۶	۰/۲۰۱۳	۰/۳۲۷۶
	۵/۵	۰/۱۰۳۴	۰/۲۲۶۶	۰/۴۳۴۴	۰/۰۹۳۷	۰/۱۸۴۶	۰/۳۰۱۸
۲/۰	۴/۰	۰/۱۷۶۹	۰/۳۷۹۰	۰/۷۴۷۳	۰/۱۵۰۲	۰/۲۷۴۲	۰/۴۲۲۹
	۵/۴	۰/۱۵۵۶	۰/۳۲۹۰	۰/۶۳۰۹	۰/۱۳۴۶	۰/۲۷۴۱	۰/۳۸۳۸
	۵/۰	۰/۱۳۸۹	۰/۲۹۰۸	۰/۵۴۶۶	۰/۱۲۹۰	۰/۲۲۵۰	۰/۳۵۱۴
	۵/۵	۰/۱۲۵۴	۰/۲۶۰۶	۰/۴۸۲۶	۰/۱۱۱۴	۰/۲۰۶۵	۰/۳۲۱۴
۴/۰	۴/۰	۰/۳۲۱۲	۰/۵۸۸۴	۱/۰۸۸۰	۰/۲۴۲۷	۰/۳۶۷۹	۰/۵۰۱۱
	۵/۴	۰/۲۸۰۰	۰/۵۰۳۲	۰/۸۹۰۸	۰/۲۱۵۸	۰/۳۳۳۱	۰/۴۶۳۵
	۵/۰	۰/۲۴۸۲	۰/۴۳۹۸	۰/۷۵۶۵	۰/۱۹۸۶	۰/۳۰۴۴	۰/۴۵۲۷
	۵/۵	۰/۲۲۲۹	۰/۳۹۰۸	۰/۶۵۸۶	۰/۱۸۲۱	۰/۲۸۰۲	۰/۳۹۳۷
۶/۰	۴/۰	۰/۴۵۸۲	۰/۷۷۷۵	۱/۴۲۷۰	۰/۳۱۳۰	۰/۴۳۲۰	۰/۵۶۵۳
	۵/۴	۰/۳۹۵۶	۰/۶۵۶۴	۱/۱۲۶۰	۰/۲۸۲۷	۰/۳۹۲۳	۰/۵۱۶۲
	۵/۰	۰/۳۴۸۲	۰/۵۶۶۲	۰/۹۳۶۷	۰/۲۵۷۸	۰/۳۵۹۳	۰/۴۷۵۰
	۵/۵	۰/۳۱۱۱	۰/۴۹۹۳	۰/۸۰۴۸	۰/۲۳۶۹	۰/۳۳۱۵	۰/۴۴۰۰

قضیه ۱: اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع گمپرتز باشد. آن‌گاه گشتاور مرکزی مرتبه γ ام آن برابراست با:

$$E(X^{r}) = \frac{r\,!}{\beta^{r}}\, e^{\frac{\alpha}{\beta}}\, E_{۱}^{r-۱}\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \qquad (۱۷)$$

به‌طوری‌که $E_{s}^{n}(z) = \frac{۱}{n\,!}\int_{۱}^{\infty}(\ln x)^{n}\, x^{-s}e^{-zx}\, dx$ و تابع انتگرال-نمایی تعمیم یافته[5] (میلگرام [۱۰]) نام دارد.

برهان: برای مشاهدهٔ اثبات به لنارت [۱۱] مراجعه شود.

فرض می کنیم $\Psi_{j} = \lim_{t\to ۰} \frac{d^{j}}{dt^{j}}\,\Gamma(۱-t)$، البته برای $j \in \{۱\,,۲\,,۳\,,۴\}$ داریم:

$$\Psi_{۰} = ۱\,, \Psi_{۱} = \gamma\,, \Psi_{۲} = \gamma^{۲} + \frac{\pi^{۲}}{۶}$$

5. Generalized integro-exponential

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

$$\Psi_۳ = \gamma^۳ + \gamma \frac{\pi^۲}{۲} + ۲\,\zeta(۳)$$

$$\Psi_۴ = \gamma^۴ + \gamma^۲ \pi^۲ + ۸\,\gamma\,\zeta(۳) + \frac{۳}{۲۰}\pi^۴,$$

به‌طوری‌که $\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} n^{-s}$ تابع زتا- ریمان (آبراموویتز و استگن (۸.۲.۱۸. ۲۳:[۱۲])) و $\gamma \approx ۰/۵۷۷۲۲$ و $\zeta(۳) \approx ۱/۲۰۲$ به‌ترتیب ثابت‌های اولر- ماچرونی[6] و آپر [۱۳] نامیده می‌شوند.

برهان: برای اثبات به میلیگرام (۱۰. ۲:[۱۰]) مراجعه شود.

همچنین برای مشاهده و محاسبهٔ بقیهٔ مقادیر Ψ_jها به لنارت [۱۱] مراجعه شود.

البته جملهٔ اول داخل کروشهٔ رابطهٔ (۱۸) را می‌توان بر حسب تابع فوق هندسی تعمیم یافته[7] بیان کرد، به‌طوری‌که

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(-k)^{j+۱}\,k!} = \left[(-۱)^j z\right]_{j+۲} F_{j+۲}\left[۱_۱, \dots, ۱_{j+۲}, ۲_۱, \dots, ۲_{j+۲}; z\right], \qquad (۱۹)$$

به‌طوری‌که

$$q^F q\left[a_۱, \dots, a_p, b_۱, \dots, b_q; z\right] = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(a_۱)_k \dots (a_p)_k}{(b_۱)_k \dots (b_p)_k} \; \frac{z^k}{k!},$$

که تابع فوق هندسی تعمیم یافته نام دارد و $(a)_k = a(a+۱)\dots(a+k-۱)$.

جدول ۲. ادامهٔ مقادیر چارک‌های توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر مختلف α، β و λ

λ	α	$\beta = ۲$		
		$Q_۱$	$Q_۲$	$Q_۳$
۰/۵	۴/۰	۰/۰۸۲۲	۰/۱۷۲۷	۰/۲۹۰۳
	۴/۵	۰/۰۷۳۲	۰/۱۵۶۲	۰/۲۶۵۲
	۵/۰	۰/۰۶۸۸	۰/۱۴۲۶	۰/۲۴۴۲
	۵/۵	۰/۰۶۱۱	۰/۱۳۱۲	۰/۲۲۶۳
۱/۵	۴/۰	۰/۱۱۹۵	۰/۲۲۱۵	۰/۳۳۸۷
	۴/۵	۰/۱۰۷۶	۰/۲۰۱۲	۰/۳۱۰۶
	۵/۰	۰/۰۹۷۸	۰/۱۸۴۴	۰/۲۸۶۹
	۵/۵	۰/۰۸۹۶	۰/۱۷۰۲	۰/۲۶۶۷
۲/۰	۴/۰	۰/۱۴۰۴	۰/۲۴۴۵	۰/۳۵۹۵
	۴/۵	۰/۱۲۶۶	۰/۲۲۲۶	۰/۳۳۰۲
	۵/۰	۰/۱۱۵۳	۰/۲۰۴۳	۰/۳۰۵۴
	۵/۵	۰/۱۰۵۸	۰/۱۸۸۸	۰/۲۸۴۲
۴/۰	۴/۰	۰/۲۱۸۹	۰/۳۱۸۲	۰/۴۲۲۲
	۴/۵	۰/۱۹۸۸	۰/۲۹۱۳	۰/۳۸۹۵
	۵/۰	۰/۱۸۲۱	۰/۲۶۸۷	۰/۳۶۱۷
	۵/۵	۰/۱۶۸۱	۰/۲۴۹۴	۰/۳۳۷۷
۶/۰	۴/۰	۰/۲۷۵۵	۰/۳۶۶۴	۰/۴۶۲۱
	۴/۵	۰/۲۵۱۴	۰/۳۳۶۶	۰/۴۲۷۴
	۵/۰	۰/۲۳۱۲	۰/۳۱۱۵	۰/۳۹۷۹
	۵/۵	۰/۲۱۴۱	۰/۲۹۰۰	۰/۳۷۲۳

6. Euler-Macheroni
7. Generalized hypergeomertic

قضیه ۲: اگر X متغیری تصادفی با توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای λ , β , α باشد. آن‌گاه گشتاور مرکزی مرتبه r ام آن برابر است با:

$$E(X^r)=\frac{r\,!}{\beta^r(۱-e^{-\lambda})}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n\,(\lambda e^{\frac{\alpha}{\beta}})^{n+۱}}{(n+۱)!}\;E_۱^{r-۱}\;(\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}). \qquad (۲۰)$$

برهان: با استفاده از بسط مک لورن $e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-۱)}}$ داریم:

$$E(X^r)=\frac{\lambda\alpha}{۱-e^{-\lambda}}\int_{۰}^{\infty}x^r\,e^{\beta x}\,e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-۱)}dx$$

$$=\frac{\alpha}{۱-e^{-\lambda}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n\,\lambda^{n+۱}}{n\,!}\int_{۰}^{\infty}x^r e^{\beta x}e^{-\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-۱)}dx$$

با استفاده از قضیهٔ (۱) داریم:

$$E(X^r)=\frac{\alpha}{۱-e^{-\lambda}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n\lambda^{n+۱}}{n\,!}\,\frac{r\,!}{\beta^r}\,e^{-\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}}\,E_۱^{r-۱}\left(\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right)$$

$$=\frac{r\,!}{\beta^r(۱-e^{-\lambda})}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n\left(\lambda e^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{n+۱}}{(n+۱)!}\,E_۱^{r-۱}\left(\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right).$$

فرع ۱: اگر X دارای توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای α,β,λ باشد. آن گاه:

$$\mu_۱'=E(X)=\frac{۱}{\beta(۱-e^{-\lambda})}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n\left(\lambda e^{\alpha\beta}\right)^{n+۱}}{(n+۱)!}\left\{\;{}_2F_۲\left[۱,۱,۲,۲;\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right]\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{In}\left[\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right]-\gamma-۱\right\}, \qquad (۲۱)$$

$$\mu_۲'=E\left(X^۲\right)=\frac{۱}{\beta(۱-e^{-\lambda})}\sum_{n=۰}^{\infty}\left\{\frac{(-۱)^n\left(\lambda e^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{n+۱}}{(n+۱)!}\right.$$
$$\times\left[\left(ln\left[\frac{(n+۱)\,\alpha}{\beta}\right]\right)^۲+۲\,\gamma\,\mathrm{In}\left[\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right]+\gamma^۲+\frac{\pi^۲}{۶}\right.$$
$$\left.\left.-۲\left(\frac{(n+۱)\alpha}{\beta}\right)\left(\;{}_3F_3\left[۱,۱,۱,۲,۲,۲;\left(\frac{(n+۱)\,\alpha}{\beta}\right)\right]\right)\right]\right\}. \qquad (۲۲)$$

برهان: با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۹) نتایج به‌دست آید.

مقادیر امید ریاضی و واریانس توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای α، β و λ به‌ازای مقادیر متفاوت پارامترهایش محاسبه شده و در جدول ۳ آمده است. این نتایج بیان‌گر آن است که:

تذکر ۱: میانگین و واریانس، تابع‌های کاهشی از α و افزایشی نسبت به λ و فقط واریانس تابعی کاهشی از β هستند، اما میانگین نسبت به β گاهی روند افزایشی و گاهی روند کاهشی دارد.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

قضیه ۳: اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای $\alpha\,,\beta,\lambda$ باشد. آن‌گاه گشتاور مرکزی مرتبهٔ s ام آماره ترتیبی i ام آن $(X_{i:n})$ برابر است با:

$$E(X_{i:n}^{s})=\frac{s\,!}{\beta^{s}}\sum_{r=۰}^{\infty}k_{r}e^{\frac{(r+۱)\alpha}{\beta}}E_{۱}^{s-۱}\left(\frac{(r+۱)\alpha}{\beta}\right).$$

برهان: با استفاده از قضیهٔ (۱) و رابطهٔ (۱۹) نتیجه به‌راحتی به‌دست می‌آید.

۳. آنتروپی رنی و شا نون

برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی $f(x)$ آنتروپی رنی بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$I(r)=\frac{۱}{۱-r}\log\left\{\int_{R}\big(f(x)\big)^{r}dx\right\},\qquad r>۰\,,r\neq ۱.$$

قضیه ۴: اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای $\alpha\,,\beta,\lambda$ باشد. آن گاه آنتروپی رنی برابر است با:

$$I(r)=\frac{۱}{۱-r}\log\Bigg\{\frac{(\lambda\alpha)^{r-۱}\,r\,!\,r^{n-۱}}{\beta^{۲}\left(۱\ -e^{-\lambda}\right)^{r}}\ \sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty}\left[\frac{(-۱)^{n}\left[\beta\big(r-۱\big)\right]^{k}\left(\lambda e^{\frac{r\alpha}{\beta}}\right)^{n+۱}}{k\,!\,\big(n+۱\big)!}\right.$$

$$\times\ E_{۱}^{k-۱}\ \big(\frac{r\big(n+۱\big)\alpha}{\beta}\big)\big]\Bigg\}.$$

جدول ۳. مقادیر میانگین و واریانس توزیع گمپرتز- پواسن به‌ازای مقادیر مختلف α، β و λ

		$\beta=۶$		$\beta=۷$		$\beta=۸$	
λ	α	μ	$\sigma^{۲}$	μ	$\sigma^{۲}$	μ	$\sigma^{۲}$
۰/۵	۰/۵	۰/۲۰۴۹۵	۰/۱۲۹۳۸	۰/۱۹۶۰۳	۰/۱۰۰۷۴	۰/۱۸۶۹۶	۰/۰۸۰۹۸
	۱/۵	۰/۲۵۷۰۰	۰/۱۳۴۹۹	۰/۲۴۰۱۴	۰/۱۰۵۲۳	۰/۲۲۵۲۸	۰/۰۸۴۶۴
	۲/۰	۰/۲۷۹۳۳	۰/۱۳۷۳۴	۰/۲۵۹۲۰	۰/۱۰۷۰۹	۰/۲۴۱۹۲	۰/۰۸۶۱۵
	۲/۵	۰/۲۹۹۱۸	۰/۱۳۹۴۷	۰/۲۷۶۱۹	۰/۱۰۸۷۶	۰/۲۵۶۷۹	۰/۰۸۷۴۹
	۴/۰	۰/۳۴۵۲۶	۰/۱۴۵۰۵	۰/۳۱۵۸۲	۰/۱۱۳۰۳	۰/۲۹۱۵۷	۰/۰۹۰۸۷
۱/۰	۰/۵	۰/۰۹۶۵۷	۰/۰۹۷۳۱	۰/۱۰۳۸۵	۰/۰۷۶۴۳	۰/۱۰۶۶۱	۰/۰۶۱۸۹
	۱/۵	۰/۱۵۵۰۳	۰/۱۰۰۳۰	۰/۱۵۲۰۸	۰/۰۷۹۰۷	۰/۱۴۷۷۱	۰/۰۶۴۲۲
	۲/۰	۰/۱۷۸۶۸	۰/۱۰۱۶۱	۰/۱۷۱۹۶	۰/۰۸۰۲۲	۰/۱۶۴۸۸	۰/۰۶۵۲۱
	۲/۵	۰/۱۹۹۰۷	۰/۱۰۲۹۶	۰/۱۸۹۲۶	۰/۰۸۱۳۵	۰/۱۷۹۹۱	۰/۰۶۶۱۷
	۴/۰	۰/۲۴۴۶۲	۰/۱۰۷۲۹	۰/۲۲۸۳۷	۰/۰۸۴۷۵	۰/۲۱۴۲۱	۰/۰۶۸۹۱
۱/۵	۰/۵	۰/۰۲۸۷۲	۰/۰۸۰۵۴	۰/۰۴۷۳۳	۰/۰۶۳۷۸	۰/۰۵۸۰۶	۰/۰۵۱۹۳
	۱/۵	۰/۰۹۶۶۵	۰/۰۸۲۱۶	۰/۱۰۱۷۹	۰/۰۶۵۲۹	۰/۱۰۳۴۹	۰/۰۵۳۳۶
	۲/۰	۰/۱۲۲۲۶	۰/۰۸۲۸۲	۰/۱۲۲۲۹	۰/۰۶۵۹۵	۰/۱۲۴۵۶	۰/۰۵۳۹۹
	۲/۵	۰/۱۴۳۵۷	۰/۰۸۳۶۶	۰/۱۴۰۸۹	۰/۰۶۶۷۱	۰/۱۳۷۰۲	۰/۰۵۴۶۶
	۴/۰	۰/۱۸۸۹۸	۰/۰۸۷۲۷	۰/۱۷۹۸۴	۰/۰۶۹۵۵	۰/۱۷۱۱۴	۰/۰۵۶۹۷

برهان: با استفاده از بسط مک لورن $e^{(r-۱)\beta x}$ داریم:

$$\int_{۰}^{\infty}f^{r}(x)dx=\frac{(\lambda\alpha)^{r}}{\left(۱-e^{-\lambda}\right)^{r}}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

$$\times \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\beta(r-1)\right]^k}{k\,!}\, x^k\right) e^{\beta x}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta z}-1\right)} e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta z}-1\right)}} dx = \frac{(\lambda\alpha)^{r-1}}{r^2\left(1-e^{-\lambda}\right)^{r-1}}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\beta(r-1)\right]^k}{k\,!} \int_0^\infty x^k \left\{\frac{(r\lambda)(r\alpha)e^{\beta x}\, e^{-\frac{r\alpha}{\beta}\left(e^{\beta z}-1\right)} e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta z}-1\right)}}}{1-e^{-\lambda}}\right\} dx$$

$$= \frac{(\lambda\alpha)^{r-1}}{r^2(1-e^{-\lambda})^{r-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\beta(r-1)\right]^k}{k\,!}\, E\left(Y^k\right).$$

به‌طوری‌که Y بیان‌گر یک متغیر تصادفی دارای توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای $\alpha\,, \beta, \lambda$ است. بنابراین به‌کمک قضیهٔ (۱) اثبات تمام می‌شود.

آنتروپی شانون برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x)$ به‌صورت $E\{-\log\ [f(X)]\}$ است. البته آنتروپی شانون به‌کمک آنتروپی رنی از طریق $\lim_{r\to 1} I(r)$ نیز به‌دست می‌آید. بنابراین آنتروپی شانون برای توزیع گمپرتز-پواسن با پارامترهای $\alpha\,, \beta, \lambda$ برابر است با:

$$E\{-\log\,[f(X)]\} = -\log\left(\frac{\lambda\alpha}{1-e^{-\lambda}}\right) - \beta E(X) + E\left(\frac{\alpha}{\beta}\,\left(e^{\beta X}-1\right)\right) + \lambda E\left(e^{-\frac{r\alpha}{\beta}\left(e^{\beta X}-1\right)}\right).$$

با استفاده از این روابط و (قضیهٔ (۱) به‌ازای $r=1$) می‌توان آنتروپی شانون را به‌دست آورد.

$$E\left(e^{\beta X}-1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k\,!}\, E_1^{k-1}\left(\frac{(n+1)\alpha}{\beta}\right),$$

$$E\left(e^{-\frac{r\alpha}{\beta}\left(e^{\beta X}-1\right)}\right) = \frac{1-(1+\lambda)e^{-\lambda}}{\lambda^2}$$

در نهایت آنتروپی شانون بدین‌صورت است:

$$E\,\{-\log\,[f(X)]\} = -\log\left(\frac{\lambda\alpha}{1-e^{-\lambda}}\right) - \frac{1}{\beta(1-e^{-\lambda})}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\lambda e^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\, E_1^0\left(\frac{(n+1)\alpha}{\beta}\right) + \frac{1-(1+\lambda)e^{-\lambda}}{\lambda^2}$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!}\, E_1^{k-1}\left(\frac{(n+1)\alpha}{\beta}\right).$$

۴. میانگین انحراف‌ها

میزان پراکندگی در جامعه را می‌توان به‌وسیلهٔ انحراف‌هایی از میانگین و میانه اندازه‌گیری کرد. میانگین انحرافات از میانگین و میانه آماره‌هایی بهتر از انحراف استاندارد هستند. در انحراف استاندارد چون فاصله‌ها از میانگین مجذور می‌شود، انحراف‌های بزرگ تأثیر بیش‌تری روی انحراف استاندارد می‌گذارد، اما قدر مطلق انحرافات تأثیر کم‌تری بر میانگین انحرافات می‌گذارد. برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی $f(x)$ و با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و با میانگین μ و با میانهٔ M، میانگین انحراف‌ها از میانگین (δ_1) و میانه (δ_2) به‌ترتیب بدین‌صورت تعریف می شوند:

$$\delta_1 = E|X-\mu| = \int_0^\infty |x-\mu| f(x)dx = 2\mu F(\mu) - 2\int_0^\mu x f(x)dx\,, \qquad (۲۳)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

و

$$\delta_{۲} = E|X - M| = \int_{۰}^{\infty} |x - M| f(x)dx = ۲MF(M) + \mu - M - ۲\int_{۰}^{M} xf(x)dx. \quad (۲٤)$$

قضیه ۵: اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع گمپرتز- پواسن با پارامترهای α, β, λ باشد. آن گاه میانگین انحراف از میانگین $(\delta_{۱})$ و انحراف از میانه $(\delta_{۲})$ به‌ترتیب عبارت است از:

$$\delta_{۱} = \frac{۲e^{-\lambda}}{۱ - e^{-\lambda}} \sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{j=۰}^{n}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\lambda^n \left(-e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^j (-\alpha)^k}{kj\,!\,(n-j)!\,k!\,\beta^{k+۱}} \left(e^{k\beta\mu} - ۱\right)$$

و

$$\delta_{۲} = \mu - M + \frac{۲e^{-\lambda}}{۱ - e^{-\lambda}} \sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{j=۰}^{n}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\lambda^n \left(-e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^j (-\alpha)^k}{kj!\,(n-j)!\,k!\,\beta^{k+۱}} \left(e^{k\beta M} - ۱\right)$$

برهان: با قرار دادن تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز-پواسن با پارامترهای α, β, λ به‌جای $f(x)$ در رابطهٔ (۲۳)، برای انتگرال زیر داریم:

$$I = \int_{۰}^{\mu} xf(x)dx = \mu F(\mu) - \frac{e^{-\lambda}}{۱ - e^{-\lambda}} \int_{۰}^{\mu} \left(e^{-\lambda\left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)} - ۱\right]} \right) dx$$

با استفاده از بسط‌های مک‌لورن $e^{-\lambda\left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)} - ۱\right]}$ و $e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}$ و بسط دو جمله‌ای برای $\left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)} - ۱\right]$ داریم:

$$I = ۲\mu F(\mu) - \frac{۲e^{-\lambda}}{۱ - e^{-\lambda}} \sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{j=۰}^{n}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\lambda^n \left(-e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^j (-\alpha)^k}{kj!\,(n-j)!\,k!\,\beta^{k+۱}} \left(e^{k\beta\mu} - ۱\right)$$

با قرار دادن I در رابطهٔ (۲۳) اثبات تمام می شود. اثبات $\delta_{۲}$ مشابه اثبات $\delta_{۱}$ است.

برآورد و استنباط

در این بخش بر آورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع گمپرتز- پواسن را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید $X_{۱}, X_{۲}, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع گمپرتز-پواسن با پارامترهای α, β, λ و $\Theta = (\alpha, \beta, \lambda)^T$ بردار پارامترها باشند. لگاریتم تابع ماکسیمم درست‌نمایی برابر است با:

$$I_n \equiv I_n(x;\Theta) = n\log\alpha + n\log\lambda + \beta\sum_{i=۱}^{n} x_i - \frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=۱}^{n}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)$$
$$- \lambda\sum_{i=۱}^{n} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} - n\log\left(۱ - e^{-\lambda}\right).$$

فرض کنید $U_n(\Theta) = \left(\frac{\partial l_n}{\partial\alpha}, \frac{\partial l_n}{\partial\beta}, \frac{\partial l_n}{\partial\lambda}\right)$ باشد به‌طوری‌که در آن داریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

$$\frac{\partial l_n}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \frac{۱}{\beta}\sum_{i=۱}^{n}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right) + \frac{\lambda}{\beta}\sum_{i=۱}^{n}(e^{\beta x_i} - ۱)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)},$$

$$\frac{\partial l_n}{\partial \beta} = \sum_{i=۱}^{n} x_i + \frac{\alpha}{\beta^۲}\sum_{i=۱}^{n}[(۱ - \beta x_i)e^{\beta x_i} - ۱]$$
$$-\frac{\lambda\alpha}{\beta^۲}\sum_{i=۱}^{n}[(۱ - \beta x_i)e^{\beta x_i} - ۱]e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)},$$

$$\frac{\partial l_n}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=۱}^{n} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} - \frac{n}{e^{\lambda} - ۱}.$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی Θ که با نماد $\widehat{\Theta}$ نشان می‌دهیم با حل دستگاه معادلات غیرخطی $U_n(\Theta) = \mathbf{0}$ به‌دست می‌آید.

۱. الگوریتم امید ریاضی‌گیری و ماکسیمم‌سازی

چون برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها در بخش قبل به‌صورت فرم بسته‌ای به‌دست نمی‌آیند. بنابراین باید به‌روش عددی به‌دست آیند که اگوریتم نیوتن- رافسون یکی از روش‌های استاندارد و معروف عددی است. روش دیگر، الگوریتم امید ریاضی و ماکسیمم‌سازی است. این الگوریتم برای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی در مواقعی که با داده‌های ناقص، داده‌های گمشده، توزیع‌های بریده شده و مشاهدات گروه‌بندی شده یا سانسور شده سروکار داریم به‌کار می‌رود. این الگوریتم روشی تکراری است که با جای‌گذاری پارامتر به‌دست آورده شده در معادله- که البته با یک مقدار اولیه شروع می شود- تا رسیدن به‌مقدار مطلوب سرو کار دارد. در هر تکرار الگوریتم دو گام وجود دارد. گام امید ریاضی‌گیری و گام ماکسیمم‌سازی. این الگوریتم حتی برای داده‌های کامل با یک فرمول‌بندی ساختگی نیز استفاده می‌شود. برای جزئیات بیش‌تر به دمپستر و همکاران [۱٤] و مسمچمن و کریشنان [۱۵] رجوع شود.

فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ داده‌های کامل و $Z_۱, \dots, Z_n$ متغیرهای تصادفی فرضی[8] باشند. تابع چگالی توام برای هر (X_i, Z_i) برای $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ عبارت است از:

$$g(x, z; \Theta) = f(x|z)f(z) = \frac{z\alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}\left[۱ - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}\right]^{z-1}\lambda^{z}}{z!(e^{\lambda} - ۱)},$$

به‌طوری‌که $z \in \{۱, ۲, ۳, \dots\}$ و $\Theta = (\alpha, \beta, \lambda)$ و $x > ۰$.
در گام امید ریاضی‌گیری به امید ریاضی $(Z|\Theta^{(r)})$ احتیاج داریم که $\Theta^{(r)}$ برآورد Θ در تکرار r ام است. تابع چگالی شرطی Z به‌شرط X را که با نماد $g(z|x)$ نشان داده می شود برابر است با:

$$g(z|x) = \frac{e^{-\lambda}\left[۱ - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}\right]\left\{\lambda\left[۱ - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}\right]\right\}^{z-۱}}{(z-۱)!},$$

در نتیجه داریم:

$$E(Z|X = x) = ۱ + \lambda\left[۱ - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x} - ۱\right)}\right].$$

8. Hypothetical

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.7.3]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.71]

برای این که الگوریتم کامل شود باید گام دوم آن یعنی گام ماکسیمم‌سازی نیز اجرا شود که همان یافتن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی Θ با در نظر گرفتن $E(Z|X=x)$ به‌جای Z در لگاریتم تابع درست‌نمایی زیر است.

$$\begin{aligned} &l_n^* \left(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n; \Theta\right) \\ &= -\log(1-z)! + n\log\alpha + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=0}^{n}\left(e^{\beta x_i}-1\right) + \log\lambda\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n}\left(z_i-1\right)\log\left[1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)}\right] \\ &- n\log\left(e^{\lambda}-1\right). \end{aligned}$$

فرض کنید $U_n^* = \left(\frac{\partial l_n^*}{\partial\alpha}, \frac{\partial l_n^*}{\partial\beta}, \frac{\partial l_n^*}{\partial\lambda}\right)$ که در آن داریم:

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta x_i}-1\right) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-1)(e^{\beta x_i}-1)e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i}-1)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i}-1)}},$$

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta x_i}-1\right]$$

$$-\frac{\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i-1\right)\left[\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta x_i}-1\right]e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta z_i}-1)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta z_i}-1)}}$$

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{n}{1-e^{-\lambda}}.$$

از دستگاه معادلات غیرخطی $U_n(\Theta) = \mathbf{0}$ و به‌روش تکرار از الگوریتم امید ریاضی‌گیری و ماکسیمم‌سازی این روابط حاصل می شوند:

$$\hat{\alpha}^{(t+1)} = \frac{\left(\hat{\beta}(t)\right)^2 \sum_{i=1}^{n} z_{i^{(t)}}}{\sum_{i=1}^{n}\left[1-(1-\hat{\beta}(t)_{x_i})e^{\hat{\beta}(t)x_i}\right]},$$

$$\frac{n}{\hat{\alpha}(t)} - \frac{1}{\hat{\beta}(t+1)}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\hat{\beta}(t+1)x_i}-1\right)$$

$$+\frac{1}{\hat{\beta}(t+1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i^{(t)}-1\right)\left(e^{\hat{\beta}(t+1)}x_i^{(t)}-1\right)e^{-\frac{\hat{\alpha}(t)}{\hat{\beta}(t+1)}\left(e^{\hat{\beta}(t+1)}x_i^{(t)}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\hat{\alpha}(t)}{\hat{\beta}(t+1)}\left(e^{\hat{\beta}(t+1)}x_i^{(t)}-1\right)}} = 0,$$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}(t+1)}\sum_{i=1}^{n} z_i^{(t)} - \frac{n}{1-e^{-\hat{\lambda}(t+1)}} = 0.$$

که $\hat{\alpha}^{(t+1)}, \hat{\beta}^{(t+1)}$ و $\hat{\lambda}^{(t+1)}$ به‌صورت عددی به‌دست می آیند و همچنین به‌ازای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$z_i^{(t)} = ۱ + \hat{\lambda}^{(t)} \left[۱ - e^{-\frac{\hat{\alpha}(t)}{\hat{\beta}(t+۱)}\left(e^{\hat{\beta}(t+۱)} x_i^{(t)} - ۱\right)} \right].$$

۲. فواصل اطمینان مجانبی

چون برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای نامعلوم $(\alpha , \beta , \lambda)$ از توزیع گمپرتز- پواسن به‌صورت فرم‌های بسته به‌دست نمی‌آیند، در این زیر بخش فواصل اطمینان مجانبی این پارامترها را به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین وقتی که حجم نمونه بزرگ باشد برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، یعنی $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ توزیع نرمال سه متغیره با میانگین $(\alpha , \beta , \lambda)$ دارند. این نتیجه از رابطهٔ زیر حاصل شده است (گوپتا و کوندو [۱٦]).

$$\left((\hat{\alpha} - \alpha), (\hat{\beta} - \beta), (\hat{\lambda} - \lambda)\right) \to N_۳ \left(۰ , I^{-۱}(\hat{\alpha} , \hat{\beta} , \hat{\lambda})\right).$$

به‌طوری‌که $I^{-۱}\left(\hat{\alpha} , \hat{\beta} , \hat{\lambda}\right)$ بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$I^{-۱} = \begin{bmatrix} -I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} & -I_{\alpha\lambda} \\ -I_{\beta\alpha} & -I_{\beta\beta} & -I_{\beta\lambda} \\ -I_{\lambda\alpha} & -I_{\lambda\beta} & -I_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) & Var(\hat{\beta}) & Cov(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) & Var(\hat{\lambda}) \end{bmatrix}$$

که در آن

$$I_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^۲ l_n}{\partial \alpha^۲} = -\frac{n}{\alpha^۲} - \frac{\lambda}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left(e^{\beta x_i} - ۱\right)^۲ e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} ,$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\partial^۲ l_n}{(\partial \alpha)(\partial \beta)} = \frac{۱}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right] e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)}$$

$$+ \frac{\lambda\alpha}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right] \left(e^{\beta x_i} - ۱\right) e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} ,$$

$$I_{\alpha\lambda} = \frac{\partial^۲ l_n}{(\partial \alpha)(\partial \lambda)} = \frac{۱}{\beta} \sum_{i=۱}^{n} \left(e^{\beta x_i} - ۱\right) e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} ,$$

$$I_{\beta\alpha} = \frac{\partial^۲ l_n}{(\partial \beta)(\partial \alpha)} = \frac{۱}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right] e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)}$$

$$+ \frac{\lambda\alpha}{\beta^۲} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right] \left(e^{\beta x_i} - ۱\right) e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i} - ۱\right)} ,$$

$$I_{\beta\beta} = \frac{\partial^۲ l_n}{\partial \beta^۲} = \frac{-۲\alpha}{\beta^۳} \sum_{i=۱}^{n} \left[\left(۱ - \beta x_i\right) e^{\beta x_i} - ۱\right] - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ e^{\beta x_i}$$

$$+\frac{2\lambda\alpha}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta x_i}-1\right]e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)}$$

$$+\frac{2\lambda\alpha}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,e^{\beta x_i}e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)}$$

$$-\frac{\lambda\alpha^2}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta x_i}-1\right]^2 e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)},$$

$$I_{\beta\lambda}=\frac{\partial^2 l_n}{(\partial\beta)(\partial\lambda)}=\frac{-\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta xi}-1]e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)},$$

$$I_{\lambda\alpha}=\frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\alpha)}=\frac{\partial^2 l_n}{(\partial\alpha)(\partial\lambda)}=\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta x_i}-1\right)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)},$$

$$I_{\lambda\beta}=\frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\beta)}=\frac{-\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\beta x_i\right)e^{\beta x_i}-1\right]e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta x_i}-1\right)},$$

$$I_{\lambda\lambda}=\frac{\partial^2 l_n}{\partial\lambda^2}=-\frac{n}{\lambda^2}+\frac{ne^{\lambda}}{\left(e^{\lambda}-1\right)^2}.$$

است. بنابراین فواصل اطمینان دو طرفهٔ $(1-\delta)$ درصدی پارامترهای α ,β و λ عبارتند از:

$$\hat{\alpha}\pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{Var(\hat{\alpha})},\qquad \hat{\beta}\pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{Var(\hat{\beta})},\qquad \hat{\lambda}\pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{Var(\hat{\lambda})}.$$

که $z_{\frac{\delta}{2}}$ صدک بالای $\frac{\delta}{2}$ درصدی توزیع نرمال استاندارد است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع جدید طول عمر سه پارامتری از خانوادهٔ توزیع‌های سری توانی گمپرتز به‌نام توزیع گمپرتز- پواسن را معرفی کردیم و گشتاورها، گشتاورهای آماره‌های مرتب، میانگین انحرافات و آنتروپی‌های رنی و شانون را برای این توزیع به‌دست آوردیم. پارامترهای این توزیع را به‌روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و الگوریتم امید ریاضی‌گیری و ماکسیمم‌سازی برآورد کرده و همچنین با برآورد ماتریس کوواریانس مجانبی، فاصلهٔ اطمینان مجانبی پارامترهای توزیع را به‌دست آوردیم. نتیجه‌ای که می‌توان به‌آن اشاره کرد آن است با توجه به روابط (۱۷) و (۱۸) یک فرمولی برای جواب انتگرال بدین‌صورت به‌دست می‌آید که می‌توان در محاسبهٔ خصوصیات ریاضی توزیع‌ها مانند گشتاورها، آنتروپی رنی و شانون و... استفاده کرد.

$$I=\frac{1}{n\,!}\int_{1}^{\infty}\frac{(\text{In}\,x)^n\,e^{-ax}}{x}\,dx.$$

$$I = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)^{j}}{j!\,(-j)^{n+1}} & \mathrm{a} = \mathrm{b} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)^{j}}{j!\,(-j)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n}}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[\mathrm{In}\left(\frac{a}{b}\right)\right]^{n-j} \Psi_{j} & a \neq b \end{cases}$$

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر و داوران مجله برای بررسی مقاله نهایت تشکر را دارند.

منابع

1. Marshall A.W., Olkin I., "A New Methood for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families", Biometrika، 84 (3) (1977) 641-652.
2. Alice N., Jose K.K., "Pareto Processes", Far East Journal ot Theoretical Statistics, 2 (9) (2003) 117-132.
3. Ghitany M.E., Al-Hussaini E.K., Al-Jarallah R.A., "Marshallolkin extended Weibull distribution and its application to censord Data", Journal of Applied Statistics، 32 (10) (2005) 1025-1034.
4. Ghitany M.E., Al-Awadhi F.A., Al-Alkhalfan L.A.,"Marshallolkin extended Lomax distribution and its application to censord Data, Communications in Statistics-Theory and Methods", 36 (10) (2007) 1855-1866.
5. Kus C., "A new Lifetime distribution", Computational Statistics and data Analysis, 51 (9) (2007) 4497-4509.
6. Cancho V.G., Louzada-Neto F., Barriga G.D., "The Possion exponential Lifetime distribution", Computational Statistical and date Analysis, 55 (1) (2011) 677-686.
7. Al-Awadhi S.A., Ghitary M.E., "Statistical Properties of Possion-Lomax distribution and its application to repeated accidents Data", Journal of Applied Statistical Sciences، 10 (4) (2001) 365-372.
8. Wetterstrand W., "Parametric Models for life insurance morality data:Gampertz's low over time", Translations of the Society of Actuaries، 33(1981) 159-175.
9. Gavlirov L., Gavrilova N., "The biology of Life Span: A Quan Titative Approach", Chur:Harwood (1991).
10. Miligram M., "The generalized integro-exponential function", Mathmatics and Computation, 44 (170) (1985) 443-458.

11.Lenart A., "The Gompertz distribution and Maximum Liklihood Es-timation ot its parameters-a revision", Mpidr Working Paper WP (2011) 2012-008.

12.Abamovitz M., "Stegun, Handbook of Mathematical Functionsو" Washingtonو DC: US Government Printing office (1965).

13.Ape'ry R., "Irrationalite' de $\zeta(2)$ et$\zeta(3)$", Astérisque, 61(1979) 11-13.

14. Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., "Maximum Liklihood from incomplete data via the EM algoritm (with discussion)", Journal of Royal Statistical Society, B (39) (1979) 1-38.

15. McLachlan G.J., Krishnan T., "The EM Algoritm and Extension, Wiley, New York (1977).

16. Gupta R.D., Kundu D., "Generalized exponential distributions", Aust. N. Z. J. Stat., 41(1999) 173-188.