استفاده از ماتریس عملیاتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری

فرشید میرزائی*، الهام حدادیان نژاد یوسفی؛
دانشگاه ملایر، دانشکده علوم ریاضی و آمار، ملایر

دریافت ۹۵/۱/۱۵ پذیرش ۹۵/۴/۱۹

چکیده

در این مقاله، روشی جدید بر پایهٔ توابع کلاهی بهبود یافته برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی بیان شده است. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری به‌دست آمده و برای تبدیل معادله اصلی از دستگاه معادلات جبری استفاده شده است. این روش جواب را به‌صورت یک سری به‌سرعت هم‌گرا به‌دست می‌آورد. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل خطای روش مورد نظر تحت چند شرط ساده داده شده است. سه مثال عددی برای نشان دادن کارایی و دقت روش داده شده است. مثال‌ها کارایی و کاربرد روش را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: توابع کلاهی بهبود یافته، معادلات دیفرانسیل کسری، ماتریس عملیاتی، حسابان کسری، مشتق کاپوتو.

مقدمه

در دنیای واقعی، برای مدل‌سازی و تجزیه و تحلیل حجم عظیمی از مسائل نیازمند معادلات دیفرانسیل کسری هستیم. حسابان کسری در بسیاری از زمینه‌های علوم ریاضی و مهندسی، از جمله شبکه‌های برق، مکانیک سیالات، نظریهٔ کنترل، الکترومغناطیس، زیست‌شناسی، شیمی، انتشار و ویسکوالاستیسیته استفاده می‌شود [۱]-[۵].

در سال‌های اخیر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری، معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری بسیار توجه شده است. از آن‌جا که اکثر معادلات دیفرانسیل کسری جواب‌های تحلیلی دقیق ندارند، برای حل آن‌ها، روش‌های تقریبی و عددی به‌طور گسترده استفاده می‌شود. از جمله روش‌های عددی برای حل این معادلات، تبدیلات لاپلاس [۶]، تبدیلات فوریه [۷]، بسط بردار ویژه [۸]، روش تجزیهٔ آدومین [۹]، [۱۰]، روش تکرار تغییرات [۱۱]، [۱۲]، روش تبدیل دیفرانسیل کسری [۱۳]، [۱۴]، روش تفاضل کسری [۱۵]، روش تجزیه و تحلیل هموتوپی [۱۶]، روش ماتریس عملیاتی [۱۷]، روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته [۱۸]، [۱۹]، روش گسسته‌سازی زمان [۲۰]، روش توابع کلاهی [۲۱]، روش سری توانی [۲۲] و سایر روش‌ها [۲۳]-[۲۷] است. هم‌چنین، در چند مقاله حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی [۲۵]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰] بررسی شده است.

در این مقاله، از توابع کلاهی بهبود یافته برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به شکل (۱) استفاده شده است

$$D^{\alpha} f(x) = a_0(x)\mathrm{W}(f(x)) + \sum_{k=1}^{r} a_k(x) D^{\beta_k} f(x) + g(x), \qquad x \in \Omega = [0,T], \qquad (۱)$$

با شرایط اولیه

$$f^{(s)}(0) = b_s, \qquad s = 0,1,\ldots,\lceil \alpha \rceil - 1,$$

*نویسنده مسئول f.mirzaee@malayeru.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

که در آن $0 \geq \beta_r > \cdots > \beta_2 > \beta_1 > \alpha$، D^{α} بیان‌گر مشتق کسری کاپوتو از مرتبهٔ α، $\lceil . \rceil$ تابع سقف، W تابع غیرخطی در $f(x)$، $a_k(x)$ برای $k = 0,1,\ldots,r$ توابعی معلوم، $g(x)$ سیگنال ورودی و $f(x)$ پاسخ خروجی است.

مقدمات و نمادگذاری‌ها

تعریف ۱: انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α به‌صورت (۲) تعریف می‌شود [۶]:

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x), \quad x \in \Omega, \qquad (۲)$$
$$I^{0} f(x) = f(x),$$

که در آن Γ تابع گاما و $*$ بیان‌گر ضرب پیچشی است.

برای عملگر I^{α} این روابط برقرار است:

$$I^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \quad a \geq 0,\ \beta > -1,$$
$$I^{\alpha}\left(I^{\beta} f(x)\right) = I^{\alpha+\beta} f(x) = I^{\beta}\left(I^{\alpha} f(x)\right).$$

سایر خواص عملگر I^{α} را می‌توان در [۶]، [۳۱] ملاحظه کرد.

تعریف ۲: مشتق کسری D^{α} در مفهوم کاپوتو به صورت زیر تعریف می شود

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}\left(\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

در حالت کلی عملگرهای انتگرال کسری و مشتق کسری تعویض‌پذیر نیست. و

$$I^{\alpha}\left(D^{\alpha} f(x)\right) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

برای برعکس این عملگرها داریم:

$$D^{\alpha}\left(I^{\beta} f(x)\right) = D^{\alpha-\beta} f(x).$$

توابع کلاهی بهبود یافته و خواص آن‌ها

تعریف: بردار $m+1$ عضوی توابع کلاهی بهبود یافته، $H_m(x)$، روی بازهٔ Ω به‌صورت (۳) تعریف می شود [۳۲]، [۳۳]:

$$H_m(x) = \left[h_0(x), h_1(x), \cdots, h_m(x)\right]^T, \qquad (۳)$$

که در آن

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(x-h)(x-2h) & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0 & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

و اگر i فرد و $1 \leq i \leq m-1$ باشد

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h^2}(x-(i-1)h)(x-(i+1)h) & (i-1)h \leq x \leq (i+1)h, \\ 0 & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

و اگر i زوج و $2 \leq i \leq m-2$ باشد

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

$$h_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h^2}(x-(i-1)h)(x-(i-2)h) & (i-2)h\le x\le ih,\\ \dfrac{1}{2h^2}(x-(i+1)h)(x-(i+2)h) & ih\le x\le (i+2)h,\\ 0 & \text{در غیر این صورت},\end{cases}$$

و

$$h_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h^2}(x-(T-h))(x-(T-2h)) & T-2h\le x\le T,\\ 0 & \text{در غیر این صورت},\end{cases}$$

$m\ge 2$، یک عدد صحیح و زوج است و $h=\dfrac{T}{m}$ است.

با توجه به تعریف توابع کلاهی بهبود یافته به سادگی می‌توان نشان داد:

$$h_i(jh)=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\ne j,\end{cases} \tag{۴}$$

$$h_i(x)h_j(x)=\begin{cases}0 & |i-j|\ge 3 \text{ و } i \text{ عددی زوج است},\\ 0 & |i-j|\ge 2 \text{ و } i \text{ عددی فرد است},\end{cases}$$

و

$$\sum_{i=0}^{m}h_i(x)=1.$$

تقریب تابع

تابع دلخواه f روی دامنه Ω را می‌توان با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته به فرم برداری زیر تقریب زد:

$$f(x)\simeq f_m(x)=\sum_{i=0}^{m}f_ih_i(x)=F^TH_m(x)=H_m^T(x)F, \tag{۵}$$

به‌طوری‌که

$$F=\left[f_0,f_1,\cdots,f_m\right]^T.$$

مزیت جالب توابع کلاهی بهبود یافته برای تقریب $f(x)$ این است که ضرایب f_i در معادلهٔ (۵) از این رابطه به‌دست می آیند:

$$f_i=f(ih);\quad i=0,1,\cdots,m.$$

ماتریس عملیاتی انتگرال کسری

در این بخش ماتریس عملیاتی $H_m(x)$ از مرتبه صحیح و کسری با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه صحیح، با استفاده از بسط $h_i(x)$ برای $i=0,1,\ldots,m$، داریم

$$\int_0^x H_m(t)dt\simeq PH_m(x),\qquad x\in\Omega,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

که در آن P یک ماتریس $(m+1)\times(m+1)$ است که از معادله زیر به‌دست می‌آید [۳۴]:

$$P=\frac{h}{12}\begin{bmatrix}0&5&4&4&4&4&4&\cdots&4&4\\0&8&16&16&16&16&16&\cdots&16&16\\0&-1&4&9&8&8&8&\cdots&8&8\\0&0&0&8&16&16&16&\cdots&16&16\\0&0&0&-1&4&9&8&\cdots&8&8\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&0&0&\cdots&8&16\\0&0&0&0&0&0&0&\cdots&-1&4\end{bmatrix}.$$

برای ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه کسری، این رابطه بررسی می‌شود:

$$I^{\alpha}H_m(x)\triangleq\left[I^{\alpha}h_0(x),I^{\alpha}h_1(x),\cdots,I^{\alpha}h_m(x)\right]^T,\qquad \alpha>0.$$

با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته، $I^{\alpha}h_i(x)$ برای $i=0,1,\ldots,m$، بدین‌صورت بسط داده می‌شود:

$$I^{\alpha}h_i(x)\simeq\sum_{j=0}^{m}p_{i,j}^{\alpha}h_j(x),$$

که در آن $p_{i,j}^{\alpha}=I^{\alpha}h_i(jh)$ است. با استفاده از رابطهٔ (۲) داریم:

$$p_{i,j}^{\alpha}=I^{\alpha}h_i(jh)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{jh}(jh-t)^{\alpha-1}h_i(t)dt.$$

با توجه به تعریف $h_i(\mathrm{x})$ می‌توان $p_{i,j}^{\alpha}$ را بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$p_{0,j}^{\alpha}=\begin{cases}0 & j=0,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}(2\alpha^2+3\alpha) & j=1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\left[2j^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)-3j^{\alpha+1}(\alpha+2)+2j^{\alpha+2}-(j-2)^{\alpha+1}(\alpha+2)-2(j-2)^{\alpha+2}\right] & j\geq 2,\end{cases}$$

و اگر i فرد و $1\leq i\leq m-1$ باشد:

$$p_{\mathrm{i},j}^{\alpha}=\begin{cases}0 & j\leq i-1,\\ \dfrac{2h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}(\alpha+1) & j=i,\\ \dfrac{2h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\left[(j-i-1)^{\alpha+1}(\alpha+2)+(j-i-1)^{\alpha+2}+(j-i+1)^{\alpha+1}(\alpha+2)-(j-i+1)^{\alpha+2}\right] & j\geq i+1,\end{cases}$$

و اگر i زوج باشد و $2\leq i\leq m-2$:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

$$p_{i,j}^{\alpha}=\begin{cases}0 & j\le i-2,\\ \dfrac{-h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\alpha & j=i-1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\left[2^{\alpha+2}-2^{\alpha+1}(\alpha+2)\right] & j=i,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\left[-6\alpha-12-3^{\alpha+1}(\alpha-4)\right] & j=i+1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}d_{ij} & j\ge i+2,\end{cases}$$

که در آن

$$d_{ij}=\Big[2(j-i+2)^{\alpha+2}-(j-i+2)^{\alpha+1}(\alpha+2)-(j-i-2)^{\alpha+1}(\alpha+2)$$
$$-2(j-i-2)^{\alpha+2}-6(j-i)^{\alpha+1}(\alpha+2)\Big],$$

و

$$p_{\mathrm{m},j}^{\alpha}=\begin{cases}0 & j\le m-2,\\ \dfrac{-h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\alpha & j=m-1,\\ \dfrac{h^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+3)}\left[2^{\alpha+3}-2^{\alpha+1}(\alpha+2)\right] & j=m.\end{cases}$$

بنابراین

$$I^{\alpha}H_m(x)\simeq P_{\alpha}H_m(x),\qquad x\in\Omega, \tag{۶}$$

که در آن

$$P_{\alpha}=\left[p_{i,j}^{\alpha}\right],\qquad i,j=0,1,\ldots,m,$$

ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه کسری، $(m+1)\times(m+1)$ بعدی است و $H_m(x)$ در رابطهٔ (۳) تعریف شده است. زمانی که $\alpha=1$ باشد، ماتریس P_{α} برابر است با ماتریس P، بنابراین ماتریس P_{α} یک تعمیم ماتریس عملیاتی انتگرال برای توابع کلاهی بهبود یافته است. لازم به‌ذکر است که ماتریس عملیاتی P_{α} ماتریس تنکی است که باعث می‌شود محاسبات سریع تر شود، هم‌چنین محاسبه ماتریس P_{α} یک بار انجام می‌شود و برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ کسری و هم‌چنین مرتبه صحیح استفاده قرار می‌شود.

کاربرد روش

در این بخش، به بیان روشی برای حل معادلهٔ (۱) با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته و ماتریس‌های عملیاتی آن پرداخته می‌شود. ابتدا از شرایط اولیه به‌منظور تبدیل مسئله با مقدار اولیه داده شده به یک مسئله با شرایط اولیه صفر استفاده می‌شود. پس از آن، از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال مرتبهٔ کسری توابع کلاهی بهبود یافته برای تبدیل معادلات دیفرانسیل کسری به دستگاه معادلات غیرخطی استفاده می‌شود.

معادلهٔ (۱) را در نظر بگیرید. تابع f را می‌توان به‌صورت (۷) بازنویسی کرد:

$$f(x)=f_*(x)+u(x), \tag{۷}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

که در آن $f_*(x)$ تابعی معلوم است که در این شرایط صدق می‌کند:

$$f_*^{(s)}(0)=b_s,\qquad s=0,1,\ldots,\lceil\alpha\rceil-1,$$

و $u(x)$ تابع مجهول جدیدی است.

از قرار دادن (۷) در (۱)، برای تابع $u(x)$ مسئلهٔ مقدار اولیه با شرایط اولیه صفر به‌صورت (۸) به‌دست می‌آید:

$$D^{\alpha}u(x)=a_0(x)\mathrm{W}(f_*(x)+u(x))+\sum_{k=1}^{r}a_k(x)D^{\beta_k}u(x)+v(x),\quad x\in\Omega=[0,T],\qquad (۸)$$

با شرایط اولیه

$$u^{(s)}(0)=0,\qquad s=0,1,\ldots,\lceil\alpha\rceil-1,$$

که در آن

$$v(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{r}a_k(x)D^{\beta_k}f_*(x)-D^{\alpha}f_*(x).$$

حال با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته توابع $v(x)$ و $D^{\alpha}u(x)$ بدین‌صورت تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned} v(x)&\simeq V^T H_m(x),\\ D^{\alpha}u(x)&\simeq C^T H_m(x),\end{aligned}\qquad (۹)$$

که در آن V و C، به‌ترتیب، ضرایب توابع کلاهی بهبود یافته توابع $v(x)$ و $D^{\alpha}u(x)$ هستند. با استفاده از معادلات (۶) و (۸) و خاصیت حسابان کسری داریم:

$$D^{\beta_k}u(x)=I^{\alpha-\beta_k}\left(D^{\alpha}u(x)\right)\simeq I^{\alpha-\beta_k}\left(C^T H_m(\mathrm{x})\right)\simeq C^T P_{\alpha-\beta_k}H_m(\mathrm{x}),\qquad (۱۰)$$

و

$$u(x)=I^{\alpha}\left(D^{\alpha}u(x)\right)\simeq I^{\alpha}\left(C^T H_m(\mathrm{x})\right)\simeq C^T P_{\alpha}H_m(\mathrm{x}).\qquad (۱۱)$$

با توجه به معادلات (۹)-(۱۱) داریم:

$$C^T H_m(x)=a_0(x)\,\mathrm{W}\left(f_*(\mathrm{x})+C^T P_{\alpha}H_m(x)\right)+\sum_{k=1}^{r}a_k(x)C^T P_{\alpha-\beta_k}H_m(x)+V^T H_m(x),\qquad (۱۲)$$

که در آن $\mathrm{x}\in\Omega$. معادلهٔ (۱۲) دستگاه معادلات جبری غیرخطی است که می‌توان آن را با دستور fsolve در نرم‌افزار Matlab و یا از طریق روش‌های عددی تکراری مانند روش نیوتن حل کرد. پس از آن، می‌توان جواب تقریبی معادلهٔ (۱) را بدین‌صورت به‌دست آورد:

$$f(x)\simeq f_*(x)+C^T P_{\alpha}H_m(x).$$

همگرایی و آنالیز خطا

در این بخش، خطای روش ارائه داده شده بررسی می‌شود. فرض کنیم که سری قطع شده توابع کلاهی بهبود یافته، یک جواب تقریبی برای معادله (۱) باشد. برای این منظور ابتدا، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{\infty}=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

قضیه ۱: فرض کنیم $v_m(x)$ بسط تابع $v(x)$ با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته باشد که به‌صورت $v_m(x)=\sum_{i=0}^{m}v(ih)h_i(x)$ تعریف می‌شود. هم‌چنین فرض کنیم که $e_m=\|v-v_m\|_{\infty}$ در این‌صورت داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

$$e_m = \mathrm{O}\left(h^3\right),$$

و

$$\left\|I^\alpha v - I^\alpha v_m\right\|_\infty \le \frac{MT^\alpha h3}{9\sqrt{3}\Gamma\left(\alpha+1\right)}, \qquad (۱۳)$$

که در آن $\left\|v^{(3)}\right\|_\infty \le M$ است.

اثبات: با توجه به تعریف توابع کلاهی بهبود یافته، $v_m(x)$ چندجمله‌ای درونیاب درجهٔ دوم روی بازه $\omega = \left[(i-2)h, ih\right]$ برای $i = 2,4,\ldots,m$ است. بنابراین:

$$v(x) - v_m(x) = \frac{1}{6}v^{(3)}(\xi)\prod_{j=i-2}^{i}(x-jh), \qquad x \in \omega.$$

از آن‌جاکه $v^{(3)}(\xi) \le \left\|v^{(3)}\right\|_\infty$، داریم:

$$e_m \le \frac{1}{6}\left\|v^{(3)}\right\|_\infty \left\|w\right\|_\infty,$$

که $w(x) = \prod_{j=i-2}^{i}(x-jh)$. از طرفی $\left\|w\right\|_\infty = \sup_{x\in\omega}\left|\prod_{j=i-2}^{i}(x-jh)\right|$ و ماکسیمم مقدار $\left|\prod_{j=i-2}^{i}(x-jh)\right|$ در نقطه $x = (i-1-\frac{\sqrt{3}}{3})h$ به‌دست می‌آید، بنابراین

$$\left|\prod_{j=i-2}^{i}(x-jh)\right| \le \frac{2\sqrt{3}h^3}{9}, \quad \forall x \in \omega,$$

یا

$$\left\|w\right\|_\infty \le \frac{2\sqrt{3}h^3}{9},$$

در نتیجه

$$e_m \le \frac{h^3}{9\sqrt{3}}\left\|v^{(3)}\right\|_\infty = Ch^3. \qquad (۱۴)$$

هم‌چنین با استفاده از رابطهٔ (۲)، داریم:

$$I^\alpha v(x) - I^\alpha v_m(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left(v(t) - v_m(t)\right)dt.$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۴)، داریم:

$$I^\alpha v(x) - I^\alpha v_m(x) \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left\|v - v_m\right\|_\infty dt \le \frac{h^3}{9\sqrt{3}\Gamma(\alpha)}\left\|v^{(3)}\right\|_\infty \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt,$$

$$\left\|I^\alpha v - I^\alpha v_m\right\|_\infty \le \frac{h^3}{9\sqrt{3}}\left\|v^{(3)}\right\|_\infty \left\|w_1\right\|_\infty \le \frac{Mh^3}{9\sqrt{3}}\left\|w_2\right\|_\infty \le \frac{MT^\alpha h^3}{9\sqrt{3}\Gamma(\alpha+1)}.$$

که در آن $w_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt$ و $w_2(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

قضیه ۲: فرض کنیم f و f_m، به‌ترتیب، جواب دقیق و تقریبی معادله (۱) باشند. هم‌چنین فرض کنیم تابع $\mathrm{W}(f)$ در شرط لیپ شیتس صدق کند، یعنی برای یک $L \geq 0$،

$$\left|\mathrm{W}(f_1(x)) - \mathrm{W}(f_2(x))\right| \leq L\left|f_1(x) - f_2(x)\right|, \qquad x \in \Omega.$$

هم‌چنین فرض کنیم:

$$\left\|a_k\right\|_\infty \leq N_k, \quad k = 0,1,\ldots,r,$$

و

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{N_k T^{\alpha-\beta_k}}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)} + \frac{LN_0 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{۱۵}$$

در این صورت

$$E_m = \left\|f - f_m\right\|_\infty \leq \frac{MT^{\alpha}h^3}{9\sqrt{3}\Gamma(\alpha+1)\left(1 - \sum_{k=1}^{r} \frac{N_k T^{\alpha-\beta_k}}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)} + \frac{LN_0 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)}, \tag{۱۶}$$

که در آن M کران بالای $\left\|v^{(3)}\right\|_\infty$ است.

اثبات: با توجه به رابطهٔ (۷)، داریم::

$$E_m = \left\|f - f_m\right\|_\infty = \left\|f_* + u - f_* - u_m\right\|_\infty = \left\|u - u_m\right\|_\infty.$$

از رابطه (۸)، داریم:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u_m(x) &= a_0(x)\left(\mathrm{W}(f_*(x)+u(x)) - \mathrm{W}(f_*(x)+u_m(x))\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r} a_k(x)\left(D^{\beta_k}u(x) - D^{\beta_k}u_m(x)\right) + v(x) - v_m(x). \end{aligned} \tag{۱۷}$$

حال از ساده سازی معادله (۱۷)، داریم:

$$\begin{aligned} u(x) - u_m(x) &= I^{\alpha}\left(a_0(x)\left(\mathrm{W}(f_*(x)+u(x)) - \mathrm{W}(f_*(x)+u_m(x))\right)\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r} I^{\alpha}\left(a_k(x)\left(D^{\beta_k}u(x) - D^{\beta_k}u_m(x)\right)\right) + I^{\alpha}v(x) - I^{\alpha}v_m(x). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E_m &= \left\|I^{\alpha}\left(a_0\left(\mathrm{W}(f_*+u) - \mathrm{W}(f_*+u_m)\right)\right)\right\|_\infty \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r}\left\|I^{\alpha}\left(a_k\left(D^{\beta_k}u - D^{\beta_k}u_m\right)\right)\right\|_\infty + \left\|I^{\alpha}v - I^{\alpha}v_m\right\|_\infty, \end{aligned}$$

یا به‌عبارتی:

$$\begin{aligned} E_m &= \left\|a_0\right\|_\infty \left\|I^{\alpha}\mathrm{W}(f_*+u) - I^{\alpha}\mathrm{W}(f_*+u_m)\right\|_\infty \\ &\quad + \left\|a_k\right\|_\infty \sum_{k=1}^{r}\left\|I^{\alpha-\beta_k}u - I^{\alpha-\beta_k}u_m\right\|_\infty + \frac{MT^{\alpha}h^3}{9\sqrt{3}\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{۱۸}$$

حال با استفاده از (۲)، داریم:

$$I^{\alpha-\beta_k}u(x) - I^{\alpha-\beta_k}u_m(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_k)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-\beta_k-1}(u(t)-u_m(t))dt.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

در نتیجه

$$\begin{aligned}\left|I^{\alpha-\beta_k}u(x)-I^{\alpha-\beta_k}u_m(x)\right| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_k)}\int_0^x\left|(x-t)^{\alpha-\beta_k-1}\right|\left|u(t)-u_m(t)\right|dt\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_k)}\left\|u-u_m\right\|_\infty\int_0^x\left|(x-t)^{\alpha-\beta_k-1}\right|dt\\ &= \frac{\left|x^{\alpha-\beta_k}\right|}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)}\left\|u-u_m\right\|_\infty\\ &\le \frac{T^{\alpha-\beta_k}}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)}\left\|u-u_m\right\|_\infty,\end{aligned}$$

بنابراین

$$\left\|I^{\alpha-\beta_k}u-I^{\alpha-\beta_k}u_m\right\|_\infty \le \frac{T^{\alpha-\beta_k}}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)}\left\|u-u_m\right\|_\infty. \qquad (۱۹)$$

هم‌چنین

$$I^\alpha \mathrm{W}(f(x))-I^\alpha \mathrm{W}(f_m(x))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\left(\mathrm{W}(f(\mathrm{t}))-\mathrm{W}(f_m(\mathrm{t}))\right)dt,$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\left|I^\alpha \mathrm{W}(f(x))-I^\alpha \mathrm{W}(f_m(x))\right| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left|(x-t)^{\alpha-1}\right|\left|\mathrm{W}(f(\mathrm{t}))-\mathrm{W}(f_m(\mathrm{t}))\right|dt\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left|(x-t)^{\alpha-1}\right|L\left|f(\mathrm{t})-f_m(\mathrm{t})\right|dt\\ &\le \frac{L\left\|f-f_m\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left|(x-t)^{\alpha-1}\right|dt\\ &= \frac{L\left|x^\alpha\right|}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f-f_m\right\|_\infty \le \frac{LT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f-f_m\right\|_\infty,\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\left|I^\alpha \mathrm{W}(f(x))-I^\alpha \mathrm{W}(f_m(x))\right|=\left|I^\alpha \mathrm{W}(f_*(x)+u(x))-I^\alpha \mathrm{W}(f_*(x)+u_m(x))\right|,$$

و

$$\left\|f-f_m\right\|_\infty=\left\|u-u_m\right\|_\infty,$$

بنابراین

$$\left\|I^\alpha \mathrm{W}(f)-I^\alpha \mathrm{W}(f_m)\right\|_\infty \le \frac{LT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u-u_m\right\|_\infty. \qquad (۲۰)$$

از روابط (۱۳)، (۱۹) و (۲۰)، نتیجه می‌گیریم:

$$E_m \le \frac{LN_0T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}E_m+\sum_{k=1}^{r}\frac{N_kT^{\alpha-\beta_k}}{\Gamma(\alpha-\beta_k+1)}E_m+\frac{MT^\alpha h^3}{9\sqrt{3}\Gamma(\alpha+1)}.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

در نتیجه، $E_m = \mathrm{O}\left(h^3\right)$ است و اثبات قضیه تکمیل شد.

با توجه به این‌که مرتبه هم‌گرایی توابع کلاهی $\mathrm{O}\left(h^2\right)$ و توابع کلاهی بهبود یافته $\mathrm{O}\left(h^3\right)$ است، استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته در حل مسائل، جواب را با دقت بهتری به‌دست می‌آورد. در بخش بعد، مقایسهٔ نتایج عددی مثال‌های داده شده گواهی بر این نکته هستند.

مثال‌های عددی

در این بخش با چند مثال کارایی روش توابع کلاهی بهبود یافته نشان داده می‌شود. هم‌چنین به‌مقایسهٔ روش‌های توابع کلاهی و روش توابع کلاهی بهبود یافته می‌پردازیم.

مثال ۱: معادله نوسان کسری (۲۱) را بررسی می‌کنیم [۲۱]:

$$\begin{aligned} &D^2 f(x) + D^{\alpha} f(x) + f(x) = 8, \quad x \in [0,1], \quad 0 < \alpha \le 2, \\ &f(0) = 0, \; f'(0) = 0. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

جواب دقیق به‌صورت یک سری در [۳۵] داده شده است. در جدول ۱ مقایسهٔ جواب دقیق با جواب حاصل از روش ارائه شده و روش توابع کلاهی [۲۱] نشان داده شده است. در جدول ۲ مقایسهٔ بین خطاهای مطلق به‌دست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته، روش توابع کلاهی، روش توابع بلاک پالس [۲۷] و روش تفاضلات کسری [۳۵] نشان داده شده است. برای جزئیات بیش‌تر، خطاهای مطلق این مثال با استفاده از روش توابع کلاهی و روش توابع کلاهی بهبود یافته در شکل ۱ رسم شده است.

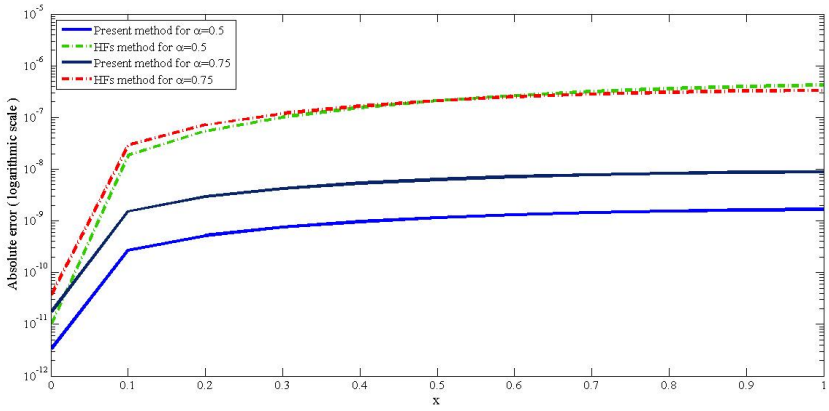
جدول ۱. نتایج عددی برای معادلهٔ (۲۱) با m=۱۰۰۰

x	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 0.75$		
	جواب دقیق	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته	جواب دقیق	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۰۳۹۷۵۰۰۲۵	۰/۰۳۹۷۵۰۰۰۷	۰/۰۳۹۷۵۰۰۲۵	۰/۰۳۹۴۲۸۹۷۱	۰/۰۳۹۴۲۸۹۴۲	۰/۰۳۹۴۲۸۹۶۹
۰/۲	۰/۱۵۷۰۳۵۸۱۷	۰/۱۵۷۰۳۵۷۶۲	۰/۱۵۷۰۳۵۸۱۷	۰/۱۵۴۴۲۷۳۷۱	۰/۱۵۴۴۲۷۲۹۹	۰/۱۵۴۴۲۷۳۶۸
۰/۳	۰/۳۴۷۳۶۹۹۸۰	۰/۳۴۷۳۶۹۸۷۸	۰/۳۴۷۳۶۹۹۷۹	۰/۳۳۸۸۲۴۶۵۴	۰/۳۳۸۸۲۴۵۳۵	۰/۳۳۸۸۲۴۶۵۰
۰/۴	۰/۶۰۴۶۹۵۱۵۱	۰/۶۰۴۶۹۴۹۹۶	۰/۶۰۴۶۹۵۱۵۰	۰/۵۸۵۴۲۱۳۸۲	۰/۵۸۵۴۲۱۲۱۶	۰/۵۸۵۴۲۱۳۷۷
۰/۵	۰/۹۲۱۷۶۷۶۴۲	۰/۹۲۱۷۶۷۴۳۱	۰/۹۲۱۷۶۷۶۴۱	۰/۸۸۶۴۰۳۸۵۱	۰/۸۸۶۴۰۳۶۴۰	۰/۸۸۶۴۰۳۸۴۵
۰/۶	۱/۲۹۰۴۵۶۵۵۷	۱/۲۹۰۴۵۶۲۹۱	۱/۲۹۰۴۵۶۵۵۶	۱/۲۳۳۶۲۱۴۱۲	۱/۲۳۳۶۲۱۱۶۱	۱/۲۳۳۶۲۱۴۰۵
۰/۷	۱/۷۰۲۰۰۷۹۶۶	۱/۷۰۲۰۰۷۶۴۸	۱/۷۰۲۰۰۷۹۶۴	۱/۶۱۸۸۰۳۲۲۶	۱/۶۱۸۸۰۲۹۴۲	۱/۶۱۸۸۰۳۲۱۸
۰/۸	۲/۱۴۷۲۸۶۹۲۹	۲/۱۴۷۲۸۶۵۶۷	۲/۱۴۷۲۸۶۹۲۷	۲/۰۳۳۷۳۶۵۰۲	۲/۰۳۳۷۳۶۱۹۴	۲/۰۳۳۷۳۶۴۹۴
۰/۹	۲/۶۱۷۰۰۱۰۰۶	۲/۶۱۷۰۰۰۶۰۸	۲/۶۱۷۰۰۱۰۰۵	۲/۴۷۰۴۱۵۳۸۵	۲/۴۷۰۴۱۵۰۶۱	۲/۴۷۰۴۱۵۳۷۶
۱/۰	۳/۱۰۱۹۰۵۷۱۴	۳/۱۰۱۹۰۵۲۹۰	۳/۱۰۱۹۰۵۷۱۲	۲/۹۲۱۱۶۵۱۳۵	۲/۹۲۱۱۶۴۸۰۴	۲/۹۲۱۱۶۵۱۲۶

جدول ۲. مقایسه ماکزیمم خطای مطلق برای مثال (۱) با m= ۱۰۰۰ و ۰/۷۵، ۰/۵ =α

α	روش تفاضلات کسری	روش توابع بلاک پالس	روش توابع کلاهی	روش توابع کلاهی بهبود یافته
۰/۵	۴/۵e-۳	۲/۵e-۳	۴/۱e-۷	۱/۷e-۹
۰/۷۵	۳/۱e-۳	۲/۳e-۳	۳/۲e-۷	۸/۹e-۹

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]



شکل ۱. خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) برای مثال ۱با m= ۱۰۰۰ و ۱/۵، ۰/۵= α

مثال ۲: معادلهٔ دیفرانسیل کسری غیرخطی (۲۲) را بررسی می‌کنیم [۲۱]:

$$aD^{2/2}f(x)+bD^{\alpha_2}f(x)+cD^{\alpha_1}f(x)+ef^3(x)=g(x),$$
$$f(0)=2,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0,\quad x\in[0,1],\ 0<\alpha_1\le 1<\alpha_2<2, \qquad (۲۲)$$

که در آن $g(x)=\frac{2a}{\Gamma(1/8)}x^{0.8}+\frac{2b}{\Gamma(4-\alpha_2)}x^{3-\alpha_2}+\frac{2c}{\Gamma(4-\alpha_1)}x^{3-\alpha_1}+e\left(\frac{x^3}{3}\right)^3$ و جواب دقیق برابر است با $f(x)=\frac{x^3}{3}$.

فرض کنید $a=b=c=e=1$، $\alpha_1=0.75$ و $\alpha_2=1.25$. در جدول ۳ مقایسهٔ جواب دقیق با جواب حاصل از روش ارائه شده و روش توابع کلاهی نشان داده شده است. در جدول ۴ مقایسهٔ بین خطاهای مطلق به‌دست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته، روش توابع کلاهی، روش توابع بلاک پالس و روش موجک هار [۲۶]، برای $m=16,32,64$ نشان داده شده است. برای جزئیات بیش‌تر، خطاهای مطلق این مثال با استفاده از روش توابع کلاهی و روش توابع کلاهی بهبود یافته در شکل ۲ رسم شده است.

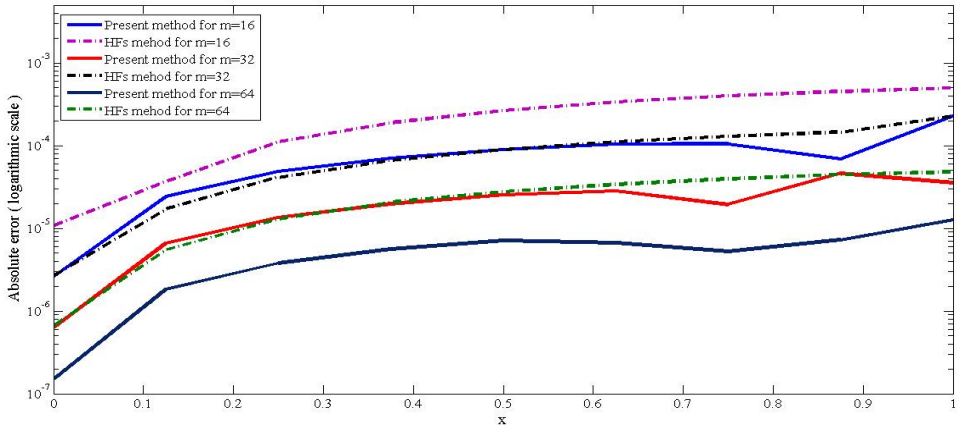
جدول ۳. نتایج عددی برای معادلهٔ (۲۲)

x	جواب دقیق	$m=۱۶$		$m=۳۲$		$m=۶۴$	
		روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱۲۵	۰/۰۰۰۶۵۱۰۴	۰/۰۰۰۶۱۴۱۹	۰/۰۰۰۶۲۶۷۴	۰/۰۰۰۶۳۴۱۱	۰/۰۰۰۶۴۴۴۲	۰/۰۰۰۶۴۵۵۹	۰/۰۰۰۶۴۹۲۱
۰/۲۵۰	۰/۰۰۵۲۰۸۳۳	۰/۰۰۵۰۹۷۷۵	۰/۰۰۵۱۵۹۷۷	۰/۰۰۵۱۶۷۰۴	۰/۰۰۵۱۹۴۹۰	۰/۰۰۵۱۹۵۳۷	۰۰۵۲۰۴۵۵
۰/۳۷۵	۰/۰۱۷۵۷۸۱۳	۰/۰۱۷۳۸۸۸۰	۰/۰۱۷۵۰۷۶۸	۰/۰۱۷۵۱۱۹۹	۰/۰۱۷۵۵۸۳۸	۰/۰۱۷۵۵۷۶۰	۰/۰۱۷۵۷۲۵۲
۰/۵۰۰	۰/۰۴۱۶۶۶۶۷	۰/۰۴۱۴۰۱۰۶	۰/۰۴۱۵۷۷۰۸	۰/۰۴۱۵۷۷۰۳	۰/۰۴۱۶۴۱۴۵	۰/۰۴۱۶۳۹۰۵	۰/۰۴۱۶۵۹۵۹
۰/۶۲۵	۰/۰۸۱۳۸۰۲۱	۰/۰۸۱۰۴۴۰۹	۰/۰۸۱۲۷۵۷۹	۰/۰۸۱۲۶۹۲۱	۰/۰۸۱۳۵۱۹۴	۰/۰۸۱۳۴۶۱۹	۰/۰۸۱۳۷۳۵۴
۰/۷۵۰	۰/۱۴۰۶۲۵۰۰	۰/۱۴۰۲۲۵۸۸	۰/۱۴۰۵۱۹۵۹	۰/۱۴۰۴۹۵۱۶	۰/۱۴۰۶۰۵۷۲	۰/۱۴۰۵۸۵۳۵	۰/۱۴۰۶۳۰۲۵
۰/۸۷۵	۰/۲۲۳۳۰۷۲۹	۰/۲۲۲۸۵۴۱۹	۰/۲۲۳۲۵۸۷۰	۰/۲۲۳۱۶۱۴۶	۰/۲۲۳۳۵۳۱۸	۰/۲۲۳۳۵۱۷۱	۰/۲۲۳۳۱۴۵۸
۱/۰۰۰	۰/۳۳۳۳۳۳۳۳	۰/۳۳۲۸۳۷۹۶	۰/۳۳۳۵۵۹۵۰	۰/۳۳۳۵۶۲۲۱	۰/۳۳۳۳۶۸۹۷	۰/۳۳۳۳۸۱۵۱	۰/۳۳۳۳۶۶۰۸

جدول ۴. مقایسهٔ ماکسیمم خطای مطلق برای مثال ۲ با ۶۴، ۳۲، ۱۶=*m*

m	روش توابع بلاک پالس	روش موجک هار	روش توابع کلاهی	روش توابع کلاهی بهبود یافته
۱۶	۲/۷e-۲	۱/۹e-۳	۵/۰e-۳	۲/۳e-۴
۳۲	۱/۲e-۲	۵/۴e-۳	۲/۳e-۴	۳/۵e-۵
۶۴	۲/۸e-۵	۱/۳e-۴	۸/۴e-۵	۱/۳e-۵

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]



شکل ۲. خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) برای مثال ۲ با ۶۴، ۳۲، ۱۶=*m*

مثال ۳: معادلهٔ ریکاتی کسری غیرخطی زیر را بررسی می کنیم [۳۶]:

$$D^{\alpha}f(x)=b(x)f^{2}(x)+c(x)f(x)+e(x),\quad x\in[0,1],\quad 0<\alpha_1\le 1<\alpha_2<2,\qquad f(0)=k. \tag{۲۳}$$

معادلات دیفرانسیل ریکاتی کاربردهای زیادی در مهندسی و علوم کاربردی از جمله قوانین نوسانات، رئولوژی، فرایندهای انتشار، پدیده های خط انتقال، مسائل نظریه کنترل بهینه و غیره [۳۷]-[۴۲] دارد.

از الگوریتم ارئه داده شده در بخش ۶ برای حل این معادله با $b(x)=-1$، $c(x)=2$، $e(x)=1$ و $k=0$ استفاده می‌کنیم. جواب دقیق برای $\alpha=1$ از این رابطه به‌دست می‌آید:

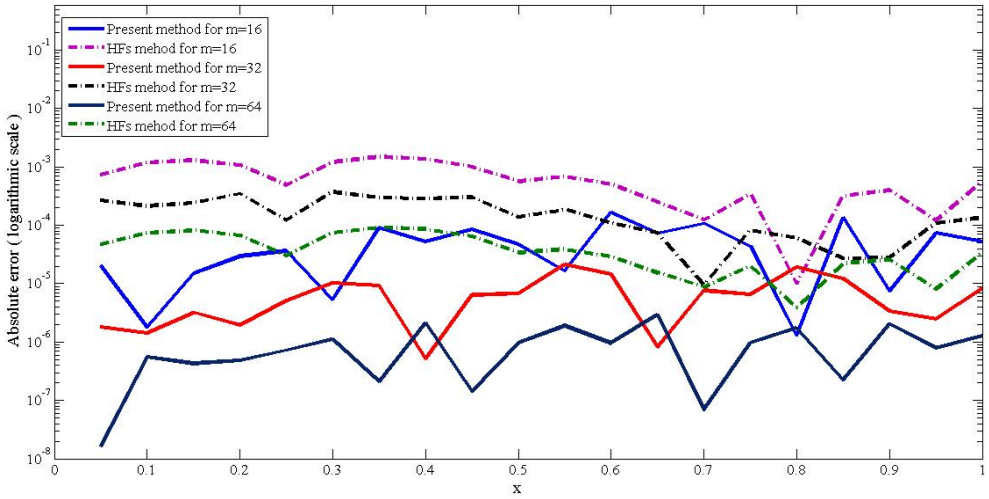
$$f(x)=1+\sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right),$$

و می‌توان مشاهده کرد که هرگاه $x\to\infty$، آن‌گاه $f(x)\to 1+\sqrt{2}=2.4142$. در جدول ۵ مقایسهٔ جواب دقیق با جواب حاصل از روش ارائه شده و روش توابع کلاهی [۲۱] نشان داده شده است. برای جزئیات بیش‌تر، خطاهای مطلق این مثال با استفاده از روش توابع کلاهی و روش توابع کلاهی بهبود یافته در شکل ۳ رسم شده است. در شکل ۴، رفتار جواب تقریبی برای مقادیر مختلف α ($\alpha=0.5,0.75,1$) و $m=64$ نشان داده شده است.

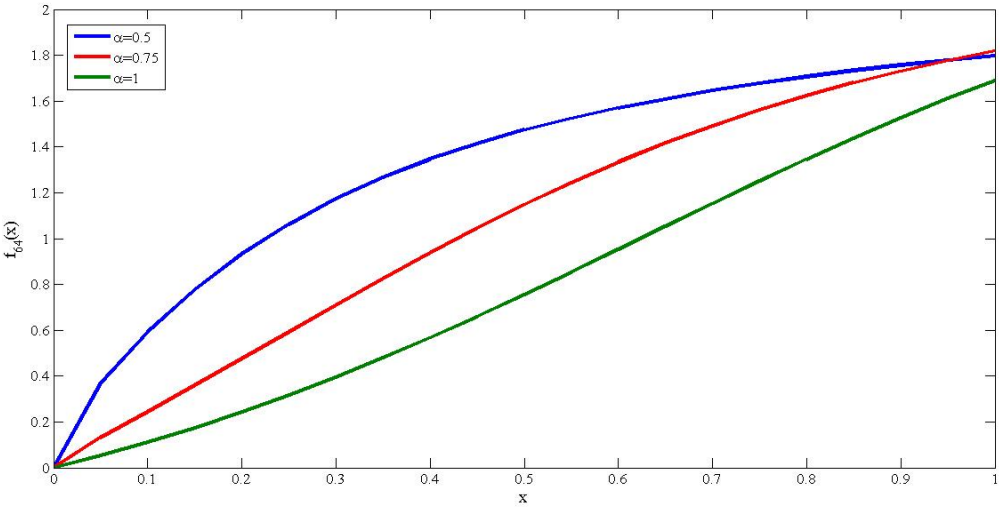
جدول ۵. نتایج عددی برای معادلهٔ (۲۳)

x	جواب دقیق	$m=۱۶$		$m=۳۲$		$m=۶۴$	
		روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته	روش کلاهی	روش کلاهی بهبود یافته
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۱۱۰۲۹۵۲۰	۰/۱۱۱۴۸۶۹۸	۰/۱۱۰۲۹۶۹۸	۰/۱۱۰۵۰۹۵۳	۰/۱۱۰۲۹۳۷۹	۰/۱۱۰۳۶۹۶۷	۰/۱۱۰۲۹۴۶۴
۰/۲	۰/۲۴۱۹۷۶۸۰	۰/۲۴۳۰۴۱۲۳	۰/۲۴۱۹۴۷۲۹	۰/۲۴۲۳۲۷۱۶	۰/۲۴۱۹۷۴۸۷	۰/۲۴۲۰۴۳۲۹	۰/۲۴۱۹۷۶۳۱
۰/۳	۰/۳۹۵۱۰۴۸۵	۰/۳۹۶۳۰۸۵۰	۰/۳۹۵۰۹۹۵۱	۰/۳۹۵۴۷۹۲۴	۰/۳۹۵۰۹۴۵۱	۰/۳۹۵۱۷۸۵۹	۰/۳۹۵۱۰۳۷۴
۰/۴	۰/۵۶۷۸۱۲۱۷	۰/۵۶۹۱۸۹۰۶	۰/۵۶۷۸۶۴۳۰	۰/۵۶۸۰۹۹۱۷	۰/۵۶۷۸۱۱۶۵	۰/۵۶۷۸۹۸۴۳	۰/۵۶۷۸۱۰۰۵
۰/۵	۰/۷۵۶۰۱۴۳۹	۰/۷۵۶۵۸۱۰۴	۰/۷۵۵۹۶۷۱۱	۰/۷۵۶۱۵۲۸۸	۰/۷۵۶۰۰۷۵۸	۰/۷۵۶۰۴۸۵۹	۰/۷۵۶۰۱۳۴۲
۰/۶	۰/۹۵۳۵۶۶۲۲	۰/۹۵۴۰۷۷۰۴	۰/۹۵۳۳۹۹۳۲	۰/۹۵۳۶۷۴۸۷	۰/۹۵۳۵۵۱۶۹	۰/۹۵۳۵۹۵۴۸	۰/۹۵۳۵۶۷۱۷
۰/۷	۱/۱۵۲۹۴۸۹۷	۱/۱۵۳۰۷۲۷۱	۱/۱۵۲۸۴۱۴۵	۱/۱۵۲۹۵۸۳۹	۱/۱۵۲۹۵۶۶۷	۱/۱۵۲۹۵۷۶۹	۱/۱۵۲۹۴۸۹۰
۰/۸	۱/۳۴۶۳۶۳۶۶	۱/۳۴۶۳۵۳۸۱	۱/۳۴۶۳۶۲۳۷	۱/۳۴۶۳۰۲۱۳	۱/۳۴۶۳۴۴۳۳	۱/۳۴۶۳۵۹۷۵	۱/۳۴۶۳۶۱۹۰
۰/۹	۱/۵۲۶۹۱۱۳۱	۱/۵۲۶۵۱۳۹۳	۱/۵۲۶۹۱۸۸۱	۱/۵۲۶۸۸۳۰۸	۱/۵۲۶۹۰۷۹۲	۱/۵۲۶۸۸۵۶۶	۱/۵۲۶۹۰۹۲۵
۱/۰	۱/۶۸۹۴۹۸۳۹	۱/۶۹۰۰۵۹۳۸	۱/۶۸۹۴۴۶۱۱	۱/۶۸۹۶۳۵۲۴	۱/۶۸۹۴۸۹۹۹	۱/۶۸۹۵۳۲۱۵	۱/۶۸۹۴۹۷۱۱

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]



شکل ۳. خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) برای مثال ۳ با ۶۴، ۳۲، ۱۶=*m*



شکل ۴. رفتار جواب تقریبی با مقادیر مختلف α و ۶۴=*m* برای مثال ۳

نتیجه

در این مقاله، روشی محاسباتی بر اساس توابع کلاهی بهبود یافته برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی ارائه شده است. ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری توابع کلاهی بهبود یافته را به‌دست آورده و برای تبدیل چنین مسائلی دردستگاه معادلات جبری غیرخطی استفاده کردیم. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل خطا برای روش کلاهی بهبود یافته ارائه شده است. مهم‌ترین مزیت این روش کم‌بودن هزینه راه‌اندازی دستگاه، بدون استفاده از روش‌های طرح‌ریزی مانند روش گالرکین و یا انتگرال‌گیری است. هم‌چنین ماتریس P_α یک ماتریس بالا هسنبرگی است که می‌توان آن را یک بار برای مقادیر مختلف α و m به‌دست آورد و برای مسائل مختلف آن را استفاده کرد. بنابراین هزینهٔ محاسباتی روش کم است و این مزایا این روش محاسباتی را بسیار جذاب، ساده و مقرون به صرفه می‌کند. دقت و کارایی روش با چند مثال نشان داده شده است. هم‌چنین، نتایج به‌دست آمده با جواب دقیق و جواب‌های عددی به‌دست آمده با برخی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

از روش‌های عددی دیگر از جمله روش توابع کلاهی مقایسه شده است. در پایان، توجه داشته باشید که این روش را می‌توان به‌راحتی برای حل معادلات انتگرال چند بعدی تعمیم داد و به‌کار برد.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب بهبود کیفیت و پربارتر شدن مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

منابع

1. Diethelm K., Ford N.J., "Analysis of fractional differential equations", J. Math. Anal. Appl., 265 (2002) 229-248.
2. Diethelm K., Ford N.J., "Multi-order fractional differential equations and their numerical solution", Appl. Math. Comput., 154 (2004) 621-640.
3. Kiryakova V., "Generalized fractional calculus and applications", in: Pitman Res. Notes Math. Ser., 301, Longman-Wiley, New York (1994).
4. Podlubny I., "Fractional differential equations", Academic Press, San Diego (1999).
5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., "Fractional integrals and derivatives", Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon (1993).
6. Podlubny I., "Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives", fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. New York: Academic Press (1999).
7. Gaul L., Klein P., Kemple S., "Damping description involving fractional operators", Mech. Syst. Signal. Pr., 5 (1991) 81-88.
8. Suarez L., Shokooh A., "An eigenvector expansion method for the solution of motion containing fractional derivatives", J. Appl. Mech., 64 (1997) 629-635.
9. Momani S., "An algorithm for solving the fractional convection-diffusion equation with nonlinear source term", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 12 (7) (2007) 1283-1290.
10. Jafari H., Seifi S., "Solving a system of nonlinear fractional partial differential equations using homotopy analysis method", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14 (5) (2009) 1962-1969.
11. Sweilam N.H., Khader M.M., Al-Bar R.F., "Numerical studies for a multi-order fractional differential equation", Phys. Lett. A, 371(12) (2007) 26-33.
12. Das S., "Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method, Comput", Math. Appl., 57 (3) (2009) 483-437.
13. Arikoglu A., Ozkol I., "Solution of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method", Chaos Solitons Fract., 40 (2) (2009) 521-529.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

14. Erturk V.S., Momani S., Odibat Z., "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 13 (8) (2008) 1642-1654.
15. Meerschaert M., Tadjeran C., "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations", Appl. Numer. Math., 56 (1) (2006) 80-90.
16. Pandey R.K., Singh O.P., Baranwal V.K., "An analytic algorithm for the space-time fractional advection-dispersion equation", Comput. Phys. Commun., 182 (2011) 1134-1144.
17. Saadatmandi A., Dehghan M., "A new operational matrix for solving fractional order differential equations", Comput. Math. Appl., 59 (2010) 1326-1336.
18. Odibat Z., Momani S., Erturk V.S., "Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order", Appl. Math. Comput., 197 (2008) 467-477.
19. Baranwal V.K., Pandey R.K., Tripathi M.P., Singh O.P., "Analytic solution of fractional-order heat and wave-like equations using generalized n-dimensional differential transform method", Z. Naturforsch, 66a (2011) 581-590.
20. Cuesta E., Lubich Ch., Palencia C., "Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equation", Math. Comput, 75 (2006) 673-696.
21. Tripathi M.P., Baranwa V.K., Pandey R.K., Singh O.P., "A new numerical algorithm to solve fractional differential equations based on operational matrix of generalized hat functions, Commun", Nonlinear Sci. Numer. Simulat, 18 (2013) 1327-1340.
22. Odibat Z., Shawagfeh N., "Generalized Taylors formula", Appl. Math. Comput., 186 (1) (2007) 286-293.
23. Li Y., "Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets", Commun. Nonlinear Sci. Numer, Simulat, 15 (2010) 2284-2292.
24. Arikoglu A., Ozkol I., "Solution of fractional differential equations by using differential transform method", Chao. Solitons Fract., 34 (2007) 1473-1481.
25. Rehman M.u., Ali Khan R., "The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations", Commun, Nonlinear Sci. Numer, Simulat, 16 (2011) 4163-4173.
26. Li Y., Zhao W., "Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations", Appl. Math. Comput., 216 (2010) 2276-2285.
27. Li Y., Sun N., "Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix", Comput. Math. Appl., 62 (2011) 1046-1054.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]

28. Wu J.L., "A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically", Appl. Math. Comput., 214 (1) (1009) 31-40.

29. Lepik Ü., "Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method", Appl. Math. Comput., 214 (2) (2009) 468-478.

30. Delbosco D., Rodino L., "Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation", J. Math. Anal. Appl., 204 (1996) 609-625.

31. Tenreiro Machado J.A., "Fractional derivatives: probability interpretation and frequency response of rational approximations", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14 (9-10) (2009) 3492-3497.

32. Atkinson K.E., "The numerical solution of integral equations of the second kind", Cambridge University Press, Cambridge (1997).

33. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions", Appl. Math. Comput., 250 (2015) 805-816.

34. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Approximation solution of nonlinear Stratonovich Volterra integral equations by applying modification of hat functions", J. Comput. Appl. Math., 302 (2016) 272–284.

35. Momani S., Odibat Z., "Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order", Chao. Solitons Fract., 31 (2007) 1248-1255.

36. Odibat Z., Momani Sh., "Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order", Chaos Solitons Fractals, 36 (2008) 167-174.

37. Khan N.A., Jamil M., Ara A., Das S., "Explicit solution of time-fractional batch reactor system", Int. J. Chem. React. Eng., 9 (2011) Article ID A91.

38. F-Batlle V., Perez R., Rodriguez L., "Fractional robust control of main irrigation canals with variable dynamic parameters", Control Eng. Pract., 15 (2007) 673-686.

39. Podlubny I., "Fractional-Order Systems and Controllers", IEEE Trans. Auto. Control, 44 (1999) 208-214.

40. Garrappa R., "On some explicit Adams multistep methods for fractional differential equations", J. Comput. Appl. Math., 229 (2009) 392-399.

41. Jamil M., Khan N.A., "Slip effects on fractional viscoelastic fluids", Int. J. Differ. Equ., 2011 (2011) Article ID 193813.

42. Mohammadi F., Hosseini M.M., "A comparative study of numerical methods for solving quadratic Riccati differential equation", J. Frank. Inst., 348 (2) (2011) 156-164.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.6.9]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.65]