

مدل‌سازی یک غشاء وصله‌دار با بسامد بهینه

سیدابوالحسن تقوی، سیدعباس محمدی*؛ دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۶/۱۰/۱۷

دریافت ۹۵/۱۱/۲۳

چکیده

در این پژوهش بدنبال طراحی و مدل‌سازی یک غشاء وصله‌دار ساخته شده از دو ماده گوناگون هستیم چنان که بسامد غشاء بهینه شود. بدین منظور، دو الگوریتم عددی کمینه و بیشینه‌سازی معرفی شده است. الگوریتم‌های عددی، چگونگی توزیع این مواد را در ساختار غشاء برای یافتن بسامد بهینه معین می‌کنند. همگرایی هر دو الگوریتم را ثابت خواهیم کرد. نتایج عددی ارائه شده، کارایی الگوریتم‌ها را در طراحی غشاءهای با بسامد بهینه برای هندسه‌های گوناگون، نمایش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: غشاء وصله‌دار، تجدید آرایش تابع، بهینه‌سازی

مقدمه

غشاء عضوی الاستیک پیوسته دوبعدی است که توانایی تحمل یا انتقال گشتاورهای خمشی را ندارد. غشاءها به سبب وزن اندک، قیمت مناسب، بهره‌وری زیاد و امکان بازیابی شکل، دارای کاربردهای وسیعی در مهندسی هوافضا، عمران، مکانیک و علوم پزشکی هستند. سپر بادبان‌های خورشیدی حرارتی و ایربگ در اتومبیل‌ها نمونه‌ای از کاربرد غشاء در حوزه مهندسی مکانیک است. بسته به کاربرد غشاءها، این ساختارهای مکانیکی ممکن است در معرض بارهای لرزه‌ای قرار گیرند و بنابراین بررسی و واکاوی رفتار ارتعاشی غشاءها اهمیت فراوان دارد. یکی از عواملی که می‌تواند بر بسامد پایه چنین سازه‌هایی تأثیرگذار باشد افزودن وصله (جرم متمرکز) به سازه اولیه است که بسته به محل قرارگیری وصله و شکل آن می‌تواند موجب افزایش یا کاهش بسامد پایه شود. افزایش بسامد پایه برای جلوگیری از پدیده تشدید بسیار حائز اهمیت است و کاهش آن به دلیل پایین آمدن بسامد تشدید منابع ارتعاشی، برای سازه‌هایی که با هدف برداشت انرژی از محیط طراحی شده‌اند، بسیار کارا است [1], [2], [3]. شایان ذکر است که در تشدیدگرهای حسگر جرم، جایابی مناسب اجرام خارجی، که می‌تواند همانند وصله‌ها دیده شوند، در افزایش توان تشدیدگر مؤثر است.

در پرتو اهمیت و کاربرد فراوان این سازه‌ها، در این پژوهش مسئله طراحی یک غشاء با بسامد بهینه بررسی می‌شود. با استفاده از دو ماده گوناگون، می‌خواهیم غشائی به شکل $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ که در مرز ناحیه یعنی $\partial\Omega$ بسته شده است، طراحی کنیم. به فرض آن که جرم کل غشاء معین باشد، مایلیم غشاء به‌گونه‌ای طراحی شود که ناحیه‌های S_1, \dots, S_k از آن که وصله نام دارند، از هر دو ماده یاد شده ساخته شوند چنان که بسامد پایه غشاء بهینه شود. در واقع به‌دنبال یافتن چگونگی توزیع این دو ماده در ساختار غشاء هستیم که بسامد پایه، بیشینه یا کمینه شود.

طراحی چنین غشائی به زبان ریاضی به صورت (۱) مدل‌سازی می‌شود. فرض کنیم α و β ، که $0 < \beta < \alpha$ ، چگالی‌های دو ماده یاد شده باشند و ناحیه‌ای که به وسیله ماده با چگالی بیش‌تر ساخته می‌شود D باشد. تابع چگالی $\rho_D = \alpha \chi_D + \beta \chi_{D^c}$ را که χ_D تابع مشخصه ناحیه D است، در نظر می‌گیریم. بسامد غشاء مورد نظر، مقدار ویژه مسئله بیضوی (۱) است:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \rho_D u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

این معادله بیضوی دارای تعداد نامتناهی مقدار ویژه $\infty \rightarrow \dots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 < \infty$ است. در این مقاله بیش‌تر به بررسی λ_1 یا همان بسامد پایه طبیعی که با نماد $\lambda(D)$ نشان داده می‌شود، می‌پردازیم. در ادامه، اندازه لیگ یک مجموعه با $|0|$ نمایش داده می‌شود. چنان‌که در [4]، [5]، [6] نشان داده شده است، برای یافتن بسامد بهینه باید مسئله‌های بهینه‌سازی زیر واکاوی شوند:

$$\inf\{\lambda(D) : D \subset \Omega, |D| = A, |D \cap S_i| = \gamma_i |S_i|, i = 1, \dots, k\} \quad (2)$$

$$\sup\{\lambda(D) : D \subset \Omega, |D| = A, |D \cap S_i| = \gamma_i |S_i|, i = 1, \dots, k\} \quad (3)$$

در مسئله‌های بهینه‌سازی (۲) و (۳)، S_1, \dots, S_k زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر و دوبه‌دو مجزای مجموعه Ω ، $\gamma_i \in (0, 1)$ برای $i = 1, \dots, k$ و $A > 0$ هستند. مایلیم غشاء مورد نظر به گونه‌ای ساخته شود که ناحیه ساخته شده با ماده با چگالی بیش‌تر جملگی در $(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k)$ قرار نگیرد و این ناحیه به‌طور کامل در $\Omega \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k)$ نباشد، بدین منظور شرط:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i |S_i| < A < |\Omega| - \sum_{i=1}^n |S_i|, \quad (4)$$

روی داده‌های مسئله در نظر گرفته می‌شود. از نظریه معادلات با مشتقات پاره‌ای بیضوی داریم، شکل تغییراتی بسامد پایه طبیعی عبارت است از:

$$\lambda(D) = \inf \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho u^2 dx}, \quad (5)$$

$$u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$$

که کمینه‌ساز موجود و یکتا است. کمینه‌ساز در واقع تابع ویژه متناظر $\lambda(D)$ است که روی Ω مثبت است [7]. مسئله‌های بهینه‌سازی (۲) و (۳) را کوکو و همکارانش بررسی کردند [4]. در مقاله یاد شده وجود نواحی بهینه‌ساز برای هر دو مسئله ثابت شده و هم‌چنین یکتایی چنین مجموعه‌ای برای مسئله بهینه‌سازی نشان داده شده است. علیرغم نتایج به‌دست آمده، این پرسش که ناحیه بهینه‌ساز دارای چه ساختار هندسی است و ماهیت توپولوژیک آن چگونه است، بدون پاسخ مانده است. در واقع پرسش یاد شده از پرسش‌های چالش برانگیز در این زمینه است و بیش‌تر پژوهش‌های این زمینه به این پرسش پاسخی جزئی برای برخی نواحی Ω با هندسه ساده، مثلاً دایره، داده‌اند [7-12]. از دیدگاه فیزیکی بسیار مهم است که بدانیم مواد با چگالی‌های گوناگون چگونه در طراحی Ω توزیع شوند تا بسامد پایه طبیعی بهینه شود. به عبارتی ناحیه D ، با چه شکل و هندسه‌ای در نظر گرفته شود تا بسامد بهینه شود. مهم‌ترین یافته پژوهش حاضر تعیین شکل ناحیه بهینه‌ساز است. بدین‌منظور دو روش عددی برای یافتن ساختار بهینه ارائه می‌کنیم. الگوریتم‌های عددی داده شده در واقع شکل بهبود یافته‌ای از روش‌های عددی ارائه شده در [13] هستند. کائو و همکارش مسئله یافتن غشاء بهینه را در حالتی که در طراحی ساختار یاد شده وصله‌ای در نظر گرفته نشده، حل کرده‌اند [13]. در واقع در آن پژوهش برای مسئله بهینه‌سازی، قیدهای

$$i = 1, \dots, k, |D \cap S_i| = \gamma_i |S_i|$$

برای ناحیه بهینه‌ساز D در نظر گرفته نشده است. در [13] ناحیه Ω تنها به شکل یک مستطیل در نظر گرفته شده است، حال آن‌که الگوریتم‌هایی که ارائه کردیم قادرند جواب بهینه را برای نواحی با ساختار پیچیده‌تر از یک مستطیل، بیابند. الگوریتم‌های ارائه شده با آغاز از یک تابع چگالی ρ_D متناظر یک ناحیه دل‌خواه D ، دنباله‌ای یک‌نوا از بسامدهای پایه تولید می‌کنند. هم‌چنین در این پژوهش ثابت می‌کنیم که دنباله بسامدهای تولید شده، هم‌گرا هستند. مثال‌های عددی، کارایی الگوریتم‌های ارائه شده برای یافتن غشاء با بسامد بهینه را نمایش می‌دهند. الگوریتم‌های به‌دست آمده را می‌توان برای بهینه کردن مقادیر ویژه بالاتر نیز به کار بست.

نتایج تحلیلی

در این بخش برخی تعاریف و قضایایی که الگوریتم‌ها بر اساس آن‌ها توسعه یافته‌اند بیان می‌کنیم. نخست پاره‌ای از تعاریف و نتایج از نظریه تجدید آرایش‌های یک تابع بیان می‌شود. خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیش‌تر در این مورد به [14] مراجعه کند.

تعریف ۱: دو تابع لبگ اندازه‌پذیر $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ و $\rho_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را تجدید آرایش یک‌دیگر گویند اگر و تنها اگر

$$|\{x \in \Omega : \rho(x) \geq r\}| = |\{x \in \Omega : \rho_0(x) \geq r\}| \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

نماد $\rho \sim \rho_0$ بدین معناست که ρ و ρ_0 تجدید آرایش یک‌دیگر هستند و مجموعه تجدید آرایش‌های تابع ρ ، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$P = \{\rho : \rho \sim \rho_0\}.$$

با استفاده از تعریف ۱، به سادگی لم ۱ نتیجه می‌شود.

لم ۱: فرض کنیم $\rho_0 = \alpha \chi_D + \beta \chi_{D^c}$ و $|D| = A$. تابع ρ به رده تجدید آرایش P تعلق دارد اگر و تنها

اگر $\rho = \alpha \chi_D + \beta \chi_{D^c}$ چنان‌که $|D| = A$.

در [4] نشان داده شده است که مسئله‌های بهینه‌سازی (۲) و (۳) به ترتیب هم‌ارز مسائل بهینه‌سازی (۶) و (۷) هستند:

$$\inf_{\rho \in P \cap T} \lambda(\rho) \quad (6)$$

$$\sup_{\rho \in P \cap T} \lambda(\rho) \quad (7)$$

که

$$T = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f \cdot \chi_{S_i} dx = \alpha \gamma_i + \beta(1 - \gamma_i) |S_i|, i = 1, \dots, k \right\}$$

دو لم ۲ و ۳ که برای بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه $P \cap T$ به کار می‌روند، ابزار اصلی ما در ارائه الگوریتم‌های عددی این مقاله هستند.

لم ۲: فرض کنیم $u(x)$ یک تابع نامنفی در $L^1(\Omega)$ با سطوح تراز با اندازه لبگ صفر باشد. آن‌گاه مسئله کمینه‌سازی

$$\inf_{\Omega} \int \rho u \, dx, \tag{۹}$$

$$\rho \in P \cap T$$

دارای جواب یکتای $\hat{\rho} = \alpha \chi_{\hat{D}} + \beta \chi_{\hat{D}^c}$ و $|\hat{D}| = A$ است که $\hat{D} = \cup_{i=1}^{k+1} B_i$ و

$$B_1 = \{x \in S_1 : u(x) \leq t_1\},$$

$$t_1 = \inf\{s \in \mathbb{R} : |\{x \in S_1 : u(x) \leq s\}| \geq \gamma_1 |S_1|\},$$

⋮

$$B_k = \{x \in S_k : u(x) \leq t_k\},$$

$$t_k = \inf\{s \in \mathbb{R} : |\{x \in S_k : u(x) \leq s\}| \geq \gamma_k |S_k|\},$$

$$B_{k+1} = \left\{ x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i : u(x) \leq t_{k+1} \right\},$$

$$t_{k+1} = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \left| \left\{ x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i : u(x) \leq s \right\} \right| \geq A - \sum_{i=1}^k \gamma_i |S_i| \right\}.$$

اثبات: با توجه به لم ۱ می‌توان گفت که $\hat{\rho}$ متعلق به P است. از سوی دیگر داریم:

$$\int_{\Omega} \hat{\rho} \cdot \chi_{S_i} \, dx = \int_{B_i} \hat{\rho} \, dx = [\alpha \gamma_i + \beta(1 - \gamma_i)] |S_i|,$$

پس $\hat{\rho} \in P \cap T$. دقت کنیم چون سطوح تراز تابع $u(x)$ دارای اندازه لبگ صفر هستند، پس مجموعه \hat{D} یکتا است.

تابع $\rho = \alpha \chi_D + \beta \chi_{D^c}$ را در مجموعه $\rho \in P \cap T$ در نظر می‌گیریم که $\hat{D} \neq D$. در این صورت

$|D| = |\hat{D}| = A$ و $|D \cap S_i| = |\hat{D} \cap S_i| = \gamma_i |S_i|$ برای $i = 1, \dots, k$. به آسانی می‌توان نتیجه گرفت

$|D \cap \hat{D}^c \cap S_i| = |D^c \cap \hat{D} \cap S_i|$ برای $i = 1, \dots, k$. با توجه به تعریف مجموعه \hat{D} می‌دانیم $u(x) \leq t_i$

برای $D \cap S_i$ و $\hat{D} \cap S_i$ برای $u(x) > t_i$ که $\hat{D}^c \cap S_i$ برای $i = 1, \dots, k$ پس برای $i = 1, \dots, k$ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \int_D u(x) \chi_{S_i} \, dx &= \int_{\hat{D} \cap D} u(x) \chi_{S_i} \, dx + \int_{\hat{D}^c \cap D} u(x) \chi_{S_i} \, dx \\ &> \int_{\hat{D} \cap D} u(x) \chi_{S_i} \, dx + t_i |D \cap \hat{D}^c \cap S_i| \\ &= \int_{\hat{D} \cap D} u(x) \chi_{S_i} \, dx + t_i |D^c \cap \hat{D} \cap S_i| \\ &\geq \int_{\hat{D} \cap D} u(x) \chi_{S_i} \, dx + \int_{\hat{D} \cap D^c} u(x) \chi_{S_i} \, dx \\ &= \int_{\hat{D}} u(x) \chi_{S_i} \, dx. \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان گفت:

$$\int_D u(x) \chi_{(\cup_{i=1}^k S_i)^c} \, dx > \int_{\hat{D}} u(x) \chi_{(\cup_{i=1}^k S_i)^c} \, dx,$$

و خلاصه این که:

$$\int_D u(x) dx > \int_{\widehat{D}} u(x) dx.$$

بنابراین

$$\int_{\Omega} \rho u dx = \beta \int_{\Omega} u dx + (\alpha - \beta) \int_D u dx > \beta \int_{\Omega} u dx + (\alpha - \beta) \int_{\widehat{D}} u dx = \int_{\Omega} \widehat{\rho} u dx,$$

این بدین معنا است که $\widehat{\rho}$ کمینه‌ساز یکتا است.

مشابه لم قبل را برای حالت بیشینه‌سازی داریم. از آن‌جاکه اثبات لم ۳ کاملاً شبیه لم ۲ است، از ارائه اثبات خودداری می‌کنیم.

لم ۳: فرض کنیم $u(x)$ یک تابع نامنفی در $L^1(\Omega)$ با سطوح تراز با اندازه لبگ صفر باشد. آن‌گاه مسئله بیشینه‌سازی

$$\sup_{\Omega} \int \rho u dx, \quad (10)$$

$$\rho \in P \cap T$$

دارای جواب یکتای $\widehat{\rho} = \alpha \chi_{\widehat{D}} + \beta \chi_{D^c}$ و $|\widehat{D}| = A$ است که $\widehat{D} = \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$

$$B_1 = \{x \in S_1 : u(x) \geq t_1\},$$

$$t_1 = \sup\{s \in \mathbb{R} : |\{x \in S_1 : u(x) \geq s\}| \geq \gamma_1 |S_1|\},$$

⋮

$$B_k = \{x \in S_k : u(x) \geq t_k\},$$

$$t_k = \sup\{s \in \mathbb{R} : |\{x \in S_k : u(x) \geq s\}| \geq \gamma_k |S_k|\},$$

$$B_{k+1} = \left\{ x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i : u(x) \geq t_{k+1} \right\},$$

$$t_{k+1} = \sup \left\{ s \in \mathbb{R} : \left| \left\{ x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i : u(x) \geq s \right\} \right| \geq A - \sum_{i=1}^k \gamma_i |S_i| \right\}.$$

از این به بعد برای نمایش مقدار ویژه متناظر $\rho = \alpha \chi_D + \beta \chi_{D^c}$ از نماد $\lambda(\rho)$ استفاده می‌کنیم. با استفاده از دو لم پیشین می‌توان دنباله‌های یک‌نوازی از $\lambda(\rho_n)$ ها تولید کرد که به سمت بیشینه‌ساز یا کمینه‌ساز هم‌گرا باشند. به‌منظور ساختن چنین دنباله‌هایی قضیه‌های بعد را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱: فرض کنیم $\rho_0(x) \in P \cap T$ و $u_0(x)$ تابع ویژه متناظر این تابع چگالی در معادله (۱) باشد آن‌گاه

$$\rho_1(x) \in P \cap T \text{ می‌توان یافت که } \lambda(\rho_0) \geq \lambda(\rho_1). \text{ به‌ویژه این‌که } \lambda(\rho_0) > \lambda(\rho_1) \text{ اگر}$$

$$\int_{\Omega} \rho_0 u_0^2 dx < \int_{\Omega} \rho_1 u_0^2 dx.$$

اثبات: چنان که در [4] ثابت شده است سطوح تراز تابع ویژه $u_0^2(x)$ دارای اندازه لبگ صفر هستند. با در نظر

گرفتن $u_0^2(x)$ به جای $u(x)$ در لم ۳، عضو یکتای $\rho_1(x) \in P \cap T$ به‌دست می‌آید که

$$\int_{\Omega} \rho_0 u_0^2 dx \leq \int_{\Omega} \rho_1 u_0^2 dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\circ}|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx} \geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\circ}|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_1 u_{\circ}^2 dx},$$

و بنابراین $\lambda(\rho_{\circ}) \geq \lambda(\rho_1)$ اثبات قسمت دوم قضیه ساده و سر راست است.

تذکره ۱: با استفاده از قضیه قبل می‌توان دنباله نزولی $\{\lambda(\rho_n)\}_1^{\infty}$ از مقادیر ویژه را یافت که

$$\lambda(\rho_{n-1}) \geq \lambda(\rho_n)$$

و دنباله به‌دست آمده از پایین کراندار است چون مقدار ویژه اصلی معادله (۱) همواره مثبت است. پس دنباله عددی ایجاد شده هم‌گرا است. در واقع قضیه ۱ اساس روش ما برای کمینه‌سازی است. با آغاز از یک $\rho_{\circ}(x) \in P \cap T$ دنباله نزولی از مقادیر ویژه تولید می‌کنیم که به کمینه‌ساز معادله (۶) هم‌گرا است.

در مورد الگوریتم عددی متناظر مسئله بیشینه‌سازی، مسئله پیچیده‌تر است و این الگوریتم به‌سادگی روش کمینه‌سازی به‌دست نمی‌آید. اگر $\rho_{\circ}(x) \in P \cap T$ را در نظر بگیریم، با توجه به لم ۲، می‌توان $\rho_1(x) \in P \cap T$ یافت که $\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx \geq \int_{\Omega} \rho_1 u_{\circ}^2 dx$ و بنابراین با توجه به شکل تغییراتی بسامد پایه داریم:

$$\lambda(\rho_{\circ}) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\circ}|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\circ}|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_1 u_{\circ}^2 dx} \geq \lambda(\rho_1).$$

پس نمی‌توان دنباله‌ای صعودی از مقادیر ویژه ساخت، زیرا مقادیر ویژه‌ای که در گام بعد به‌دست می‌آید ممکن است از مقادیر ویژه گام پیش کوچک‌تر باشد. در این حالت، یک روش رد و پذیرش در نظر می‌گیریم. بدین معنا که اگر مقدار ویژه گام بعد بزرگ‌تر باشد پذیرفته می‌شود و اگر این مقدار ویژه کوچک‌تر بود از روشی که به‌روش جای‌گزینی پاره‌ای موسوم است، [13]، سود می‌بریم. در روش جای‌گزینی پاره‌ای، ρ_1 را چنان انتخاب می‌کنیم که $\delta\rho = \rho_1 - \rho_{\circ}$ به‌اندازه کافی کوچک باشد.

قضیه ۲: فرض کنیم $\rho_{\circ}, \rho_1 \in P \cap T$ و

$$\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx > \int_{\Omega} \rho_1 u_{\circ}^2 dx, \quad (11)$$

چنان‌که $\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)} < \lambda(\rho_1)$ به اندازه کافی کوچک باشد آن‌گاه $\lambda(\rho_{\circ}) < \lambda(\rho_1)$.

اثبات: فرض کنیم u_{\circ} و u_1 تابع‌های ویژه متناظر ρ_{\circ} و ρ_1 هستند که $\int_{\Omega} |\nabla u_{\circ}|^2 dx = 1$ و $\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx = 1$. حال با استفاده از شکل تغییراتی مقدار ویژه اصلی (۱) داریم:

$$\lambda(\rho_{\circ}) = \frac{1}{\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx} \leq \frac{1}{\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_1^2 dx},$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\int_{\Omega} \rho_{\circ} u_1^2 dx \leq \int_{\Omega} \rho_{\circ} u_{\circ}^2 dx. \quad (12)$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\rho_1)} - \frac{1}{\lambda(\rho_0)} &= \int_{\Omega} \rho_1 u_1^2 dx - \int_{\Omega} \rho_0 u_0^2 dx = \int_{\Omega} (\rho_1 u_1^2 - \rho_1 u_0^2 + \rho_1 u_0^2 - \rho_0 u_0^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (\rho_0 + \delta\rho)(u_1^2 - u_0^2) dx + \int_{\Omega} \delta\rho u_0^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 (u_1^2 - u_0^2) dx + \int_{\Omega} \delta\rho (u_1^2 - u_0^2) dx + \int_{\Omega} \delta\rho u_0^2 dx. \end{aligned}$$

در سمت راست تساوی آخر سه انتگرال داریم که انتگرال‌های اول و آخر هر دو به دلیل رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) منفی هستند ادعا می‌کنیم که اگر $\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ آنگاه $\|u_0 - u_1\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$. دقت کنیم که در این صورت انتگرالده در انتگرال میانی حاصل ضرب عبارت‌های $\delta\rho$ و $u_1^2 - u_0^2$ است که هر دو هم‌گرا به صفرند حال آن‌که در دو انتگرال دیگر، انتگرالده‌ها حاصل ضرب دو عبارتند که تنها یکی از آن عبارت‌ها به صفر هم‌گراست. خلاصه این‌که می‌توان گفت مرتبه هم‌گرایی انتگرال میانی در هم‌گرایی به صفر بالاتر است. به عبارتی هم‌گرایی انتگرال میانی از مرتبه $O(\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)}^{1+\theta})$ است که $\theta > 0$. حال آن‌که مرتبه هم‌گرایی دو انتگرال دیگر $O(\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)})$ است. پس اگر $\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)}$ به اندازه کافی کوچک باشد، مقدار انتگرال میانی در قیاس با دو انتگرال دیگر کوچک‌تر است و در نتیجه سمت راست تساوی آخر اکیداً منفی است و بنابراین $\lambda(\rho_0) < \lambda(\rho_1)$.

پس تنها کافی است ادعا را ثابت کنیم. با استفاده از قضیه تسلطی لبگ نتیجه می‌شود که اگر $\rho_0 \rightarrow \rho_1$ در $L^2(\Omega)$ آن‌گاه $\rho_0 \rightarrow \rho_1$ در $L^\infty(\Omega)$ ، که هم‌گرایی دوم نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره روی فضای $L^\infty(\Omega)$ است. پس با توجه به قضیه ۱ مرجع [4]، می‌توان گفت که $\lambda(\rho_1) \rightarrow \lambda(\rho_0)$.

معادله دیفرانسیل بیضوی $-\Delta u + u(x)u = 0$ ، را که ضریب $u(x)$ تابعی در $L^2(\Omega)$ است با شرط مرزی دیریکله در نظر می‌گیریم. با استفاده از شکل تغییراتی این معادله و نامساوی پوانکاره داریم:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

در نتیجه $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}$. اگر $v \rightarrow 0$ در $L^2(\Omega)$ نتیجه می‌شود $\|u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$. حال در مورد معادله $-\Delta u_1 = \lambda(\rho_1)\rho_1 u_1$ ، چون $\lambda(\rho_1)\rho_1 \rightarrow \lambda(\rho_0)\rho_0$ در $L^2(\Omega)$ پس $\|u_0 - u_1\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$.

تذکر ۲: عضو $c = \alpha\chi_D + \beta\chi_{D^c}$ ، $\rho_0 = \alpha\chi_D + \beta\chi_{D^c}$ از مجموعه P را در نظر بگیرید. در این صورت به روش زیر می‌توان تابع $c = \alpha\chi_{D_1} + \beta\chi_{D_1^c}$ در P را یافت که $\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)}$ به اندازه کافی کوچک باشد و شرط (۱۱) را برآورده کند. کافی است دو مجموعه $E \subset D$ و $F \subset D^c$ که $|F| = |E|$ را جای‌گزین یک‌دیگر کنیم. به عبارتی با معرفی $D_1 = (D - E) \cup F$ ، ρ_1 چنان خواهد بود که:

$$\delta\rho = \rho_1 - \rho_0 = \alpha(\chi_F - \chi_E) + \beta(\chi_E - \chi_F).$$

در این صورت ρ_0 و ρ_1 شرط (۱۲) را برآورده می‌کند اگر $\int_E u_0^2 dx > \int_F u_0^2 dx$. دقت کنیم که $\|\delta\rho\|_{L^2(\Omega)}$ به اندازه کافی کوچک خواهد بود اگر $|F| = |E|$ کوچک باشد. یادآور می‌شویم که مجموعه‌های E و F را باید چنان انتخاب کرد که ρ_1 در T هم باشد.

تذکر ۳: با استفاده از لم ۲ و قضیه ۲، می‌توان دنباله صعودی از مقادیر ویژه را به صورت $\lambda(\rho_{n-1}) \leq \lambda(\rho_n)$ ساخت. دنباله به دست آمده از بالا کران‌دار است زیرا با استفاده از شکل تغییراتی مقدار ویژه، برای $\rho \in P$ داریم:

$$\lambda(\rho) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho \psi^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx}{\int_{\Omega} \tilde{\rho} \psi^2 dx},$$

که Ψ تابع ویژه متناظر مقدار ویژه اصلی عملگر لاپلاسین با شرایط مرزی دیریکله روی Ω است و $\tilde{\rho}$ کمینه‌ساز یاد شده در لم ۲ متناظر $u = \Psi^2$ است. در نتیجه دنباله صعودی به دست آمده از بالا کران دار است و بنابراین هم‌گرا است.

الگوریتم‌های عددی

در این بخش الگوریتم‌های عددی این مقاله را با جزئیات بیشتر توضیح می‌دهیم. نخست الگوریتم متناظر مسئله کمینه‌سازی را بیان می‌کنیم. به عبارتی دنباله‌ای از مقادیر ویژه می‌یابیم که به سمت جواب معادله (۶) هم‌گرا شود. فرض کنیم در گام n از الگوریتم، تقریب ρ_n از بهینه‌ساز در دسترس است. با قرار دادن ρ_n در معادله (۱)، با استفاده از روش اجزا محدود با تابع‌های پایه تکه‌ای خطی پیوسته، تابع ویژه u_n و مقدار ویژه متناظر این تابع ویژه، $\lambda(\rho_n) = \lambda_n$ را محاسبه می‌کنیم. حال باید تابع $\rho_{n+1} \in P \cap T$ را با استفاده از سطوح تراز تابع u_n^2 چنان بیابیم که $\lambda(\rho_n) > \lambda(\rho_{n+1})$. برای یافتن چنین ρ_{n+1} ، در لم ۳، قرار می‌دهیم $u = u_n^2(x)$ و بیشینه‌ساز را که همان ρ_{n+1} خواهد بود، محاسبه می‌کنیم.

حال بنا به قضیه ۱ داریم $\lambda(\rho_n) > \lambda(\rho_{n+1})$ و دنباله‌ای که بدین ترتیب ساخته می‌شود بنا به یادداشت ۱، هم‌گرا است. الگوریتم کمینه‌سازی مقدار ویژه در زیر آمده است. معیار توقف در این روند تکراری این است که $\|\delta\rho_n\|_{L^2(\Omega)} = \|\rho_{n+1} - \rho_n\|_{L^2(\Omega)}$ از مقدار معین TOL کم‌تر باشد.

الگوریتم ۱. کمینه‌سازی مقدار ویژه	
ورودی: یک تابع چگالی آغازین ρ .	
خروجی: دنباله‌ای نزولی از مقادیر ویژه $\lambda(\rho_n)$.	
۱. قرار دهید $n = 0$.	
۲. $u_n(x)$ و $\lambda(\rho_n)$ را با روش اجزا محدود محاسبه کنید.	
۳. ρ_{n+1} را با استفاده از لم ۳ بیابید.	
۴. اگر $\ \delta\rho_n\ _{L^2(\Omega)} < \text{TOL}$ آنگاه توقف کنید، در غیر این صورت	
قرار دهید $n = n + 1$ ، به گام ۲ بروید.	

حال به تشریح الگوریتم عددی متناظر بیشینه‌سازی می‌پردازیم. دنباله‌ای از مقادیر ویژه خواهیم یافت که به سمت جواب معادله (۷) هم‌گراست. برای بیشینه‌سازی مقدار ویژه، در گام n باید $\rho_{n+1} \in P \cap T$ چنان بیابیم که $\lambda(\rho_n) < \lambda(\rho_{n+1})$. بدین منظور از لم ۲ استفاده می‌کنیم و ρ_{n+1} را با جای‌گذاری $u = u_n^2(x)$ در آن لم می‌یابیم. اگر $\lambda(\rho_n) < \lambda(\rho_{n+1})$ را به‌عنوان تابع چگالی جدید می‌پذیریم و در غیر این صورت، از روش جای‌گزینی پاره‌ای که در قضیه ۲ و یادداشت ۲ معرفی شده، برای یافتن ρ_{n+1} استفاده می‌کنیم. الگوریتم به دست آمده در ادامه بیان شده است. بنا به یادداشت ۳، دنباله صعودی یافته شده، هم‌گراست. معیار توقف روند تکراری، مشابه الگوریتم کمینه‌سازی است.

الگوریتم ۲. بیشینه سازی مقدار ویژه
<p>ورودی: یک تابع چگالی آغازین ρ_0</p> <p>خروجی: دنباله ای صعودی از مقادیر ویژه $\lambda(\rho_n)$</p> <p>۱. قرار دهید $n = 0$</p> <p>۲. u_n و $\lambda(\rho_n)$ را با روش اجزا محدود محاسبه کنید.</p> <p>۳. ρ_{n+1} را با استفاده از لم ۲ بیابید.</p> <p>۴. u_{n+1} و $\lambda(\rho_{n+1})$ را با استفاده از روش اجزاء محدود بیابید.</p> <p>۵. اگر $\lambda(\rho_n) < \lambda(\rho_{n+1})$ به گام ۶ بروید.</p> <p>در غیر این صورت، ρ_{n+1} را با استفاده از یادداشت ۲ محاسبه کنید.</p> <p>۶. اگر $\ \delta\rho_n\ _{L^2(\Omega)} < \text{TOL}$ توقف کنید.</p> <p>در غیر این صورت، قرار دهید $n = n+1$، به گام ۲ بروید.</p>

در هر دو الگوریتم کمینه سازی و بیشینه سازی بالا (گام ۳ الگوریتمها)، لازم است که پارامترهای t_1, t_2, \dots, t_k یاد شده در لمهای ۲ و ۳ را محاسبه کنیم. با استفاده از ایده روش تنصیف، می توان دو الگوریتم را برای محاسبه این پارامترها در این لمها توسعه داد. چون الگوریتمها دارای سرشت یکسانی هستند، ما فقط الگوریتم متناظر لم ۲ را بیان می کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم می خواهیم پارامتر t_i را که

$$B_i = \{x \in S_i : u(x) \leq t_i\}, t_i = \inf\{s \in \mathbb{R} : |\{x \in S_i : u(x) \leq s\}| \geq \gamma_i |S_i|\}$$

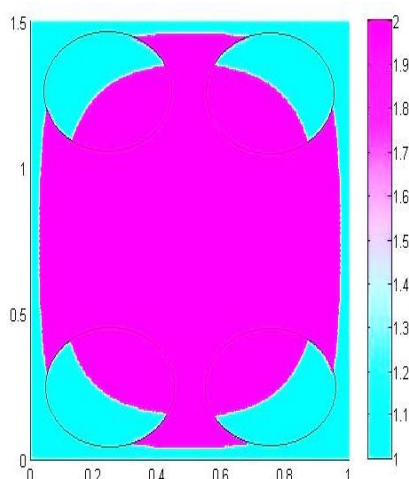
بیابیم. الگوریتم یاد شده برای یافتن t_i بدین صورت است:

الگوریتم ۳. الگوریتم تنصیف برای یافتن پارامتر t_i
<p>ورودی: تابع نامنفی $u(x)$ تعریف شده بر دامنه S_i، خروجی: پارامتر t_i</p> <p>قرار دهید $U = \max_{x \in S_i} u(x)$ و $L = \min_{x \in S_i} u(x)$</p> <p>قرار دهید $\theta = (U + L)/2$.</p> <p>مقدار $F(\theta) = \{x \in S_i : u(x) \leq \theta\}$ را محاسبه کنید.</p> <p>اگر $F(\theta) - \gamma_i S_i < \text{TOL}$ آن گاه $t_i = \theta$ و توقف کنید.</p> <p>در غیر این صورت،</p> <p>اگر $F(\theta) < \gamma_i S_i$، قرار دهید $L = \theta$ و به گام ۲ بروید.</p> <p>اگر $F(\theta) > \gamma_i S_i$، قرار دهید $U = \theta$ و به گام ۲ بروید.</p>

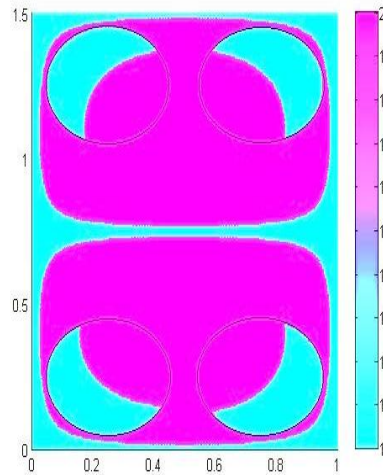
اجرای عددی الگوریتم‌ها

در این بخش چند مثال برای نمایش جواب‌های عددی مسئله‌های بهینه‌سازی (۶) و (۷) بر اساس الگوریتم‌های بیان شده در بخش پیش، ارائه می‌شود. به کمک الگوریتم‌های بیان شده می‌توانیم ساختار بهینه یا توزیع بهینه جرم را برای غشاء، به دست آوریم. الگوریتم‌ها برای غشاهایی با شکل مستطیل و دایره با چند وصله اجرا شده‌اند که نتایج کارایی الگوریتم‌ها را نمایش می‌دهند. در تمامی الگوریتم‌های بخش پیش، کمیت TOL برابر 5×10^{-7} در نظر گرفته شده است. الگوریتم‌های ۱ و ۲ در تمامی مثال‌ها در آغاز از یک ρ در کم‌تر از ۱۵ تکرار هم‌گرا شده‌اند که این حاکی از کارایی روش ارائه شده در قیاس با روش سطوح تراز برای بهینه‌سازی شکل است. در روش سطوح تراز معمولاً هم‌گرایی پس از چند صد تکرار حاصل می‌شود [15]. در الگوریتم ۳، معمولاً پارامتر t_i در همهٔ اجراهای این الگوریتم در کم‌تر از ۵۰ تکرار به دست می‌آید. نکته مهم دیگر این‌که، الگوریتم‌های ارائه شده را می‌توان برای بهینه‌سازی مقدارهای ویژه بالاتر مسئله (۱)، مثلاً λ_n ، به کار برد. بدین ترتیب که در الگوریتم‌های ۱ و ۲ همه جا به جای محاسبهٔ مقدار ویژه اصلی، λ_n محاسبه شود. در این حالت نیز هم‌گرایی روش عددی به روش مشابه مقدار ویژه اصلی ثابت می‌شود و نتایج عددی به دست آمده دقت، کارایی و سازگاری این نتایج با مشاهدات فیزیکی را نمایش می‌دهند. در همهٔ مثال‌های اجرا شده، $A = 0/5|\Omega|$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 2$ و $\gamma_i = 0/5$ برای $i = 1..k$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج با اجرای الگوریتم‌ها با نرم افزار متلب ۲۰۱۴ به دست آمده‌اند. برای یافتن تابع ویژه و مقدار ویژه معادله (۱) با روش اجزای محدود، از جعبه ابزار pdeTool استفاده شده است.

مثال ۱. در این مثال غشایی به شکل مستطیل با چهار وصله دایره‌ای شکل در نظر گرفته شده است. هدف یافتن چگونگی توزیع جرم در سطح غشاء است که بسامد کمینه گردد. دایره‌ها دارای شعاع $0/2$ هستند. در شکل ۱ چگونگی توزیع ماده با چگالی بالاتر (ناحیهٔ قرمز رنگ) برای داشتن غشایی با بسامد حالت پایه کمینه نمایش داده شده است. چنان‌که بیان شد می‌توان الگوریتم ۱ را برای کمینه‌سازی دومین مقدار ویژه نیز به کار بست. توزیع بهینه مواد در این حالت در شکل ۲ نمایش داده شده است.

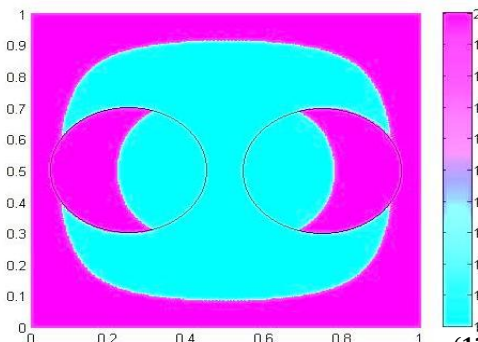


شکل ۱. $\lambda_1^{(10)} = 7/2230240$ مقدار ویژه بهینه پس از ۱۰ تکرار از الگوریتم ۱. ناحیهٔ قرمز رنگ، ناحیهٔ با چگالی ۲ است

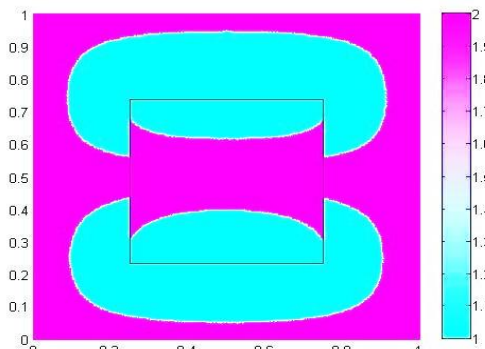


شکل ۲. مقدار ویژه بهینه پس از ۱۰ تکرار از الگوریتم ۱. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی $\lambda_2^{(10)} = 14/254674$ است

مثال ۲. در این مثال به دنبال بیشینه سازی بسامد غشاء هستیم. یک غشاء مربعی شکل به طول ضلع یک داریم. غشاء دارای دو وصله دایره ای است که شعاع دایره ها $0/25$ است. در شکل ۳ چگونگی توزیع ماده با چگالی بالاتر (ناحیه قرمز رنگ) برای داشتن غشایی با بسامد حالت پایه بیشینه نمایش داده شده است.

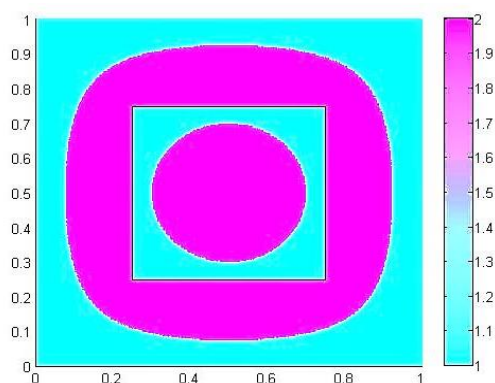


شکل ۳. مقدار ویژه بهینه پس از ۱۳ تکرار از الگوریتم ۲. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی $\lambda_1^{(13)} = 17/099939$ است



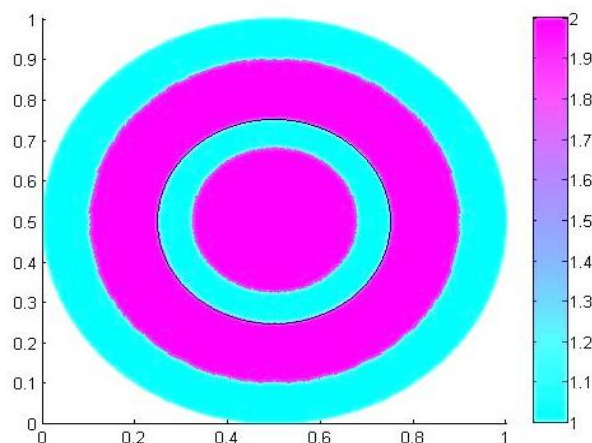
شکل ۴. مقدار ویژه پنجم بهینه پس از ۲ تکرار از الگوریتم ۲. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی $\lambda_5^{(2)} = 67/39070$ است

مثال ۳. در این مثال یک غشاء مربعی با یک وصله مربعی در نظر گرفته شده است. توزیع ماده با چگالی بالاتر برای داشتن کمترین بسامد حالت پایه در شکل ۵ نمایش داده شده است.



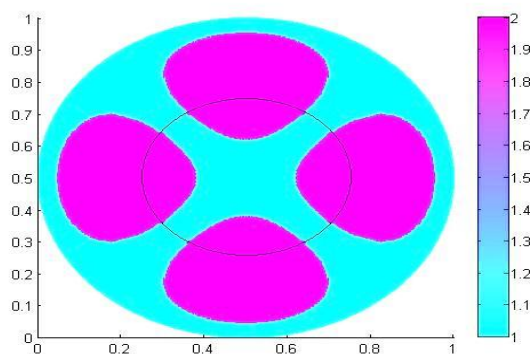
شکل ۵. مقدار ویژه بهینه پس از ۱۵ تکرار از الگوریتم ۱. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی $\lambda_1^{(15)} = 11/467736$ است.

مثال ۴. در آخرین مثال یک غشاء دایره‌ای به شعاع ۰/۵ در نظر گرفته شده است. یک وصله دایره‌ای شکل در مرکز غشاء تعبیه شده است. ناحیه کمینه‌ساز در شکل ۶ نمایش داده شده است. چنان‌که ملاحظه می‌کنیم جواب به‌دست آمده با روش عددی ارائه شده در این مقاله با جواب تحلیلی به‌دست آمده برای این حالت خاص در [4] هم‌خوانی دارد.



شکل ۶. مقدار ویژه بهینه پس از ۸ تکرار از الگوریتم ۱. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی $\lambda_1^{(8)} = 13/473379$ است.

در آخرین شکل نیز توزیع ماده با چگالی بالاتر در ساختار غشاء چنان‌که چهارمین مقدار ویژه کمینه گردد نمایش داده شده است.



شکل ۷. مقدار ویژه چهارم کمینه پس از ۲ تکرار از الگوریتم ۱. ناحیه قرمز رنگ، ناحیه با چگالی ۲ است

منابع

1. Banichuk N. V., "Introduction to optimization of structures, New York: Springer (1990).
2. Berdy D. F., "Srisungsitthisunti P., Jung B., Xianfan X., Rhoads J. F., "Low-frequency meandering piezoelectric vibration energy harvester, IEEE transactions on ultrasonics", ferroelectrics, and frequency control, 59 (2012) 846-858.
3. Dong L., Grissom M., Fisher F. T., "Resonant frequency of mass-loaded membranes for vibration energy", Energy, 3, (2015) 344-359.
4. Cuccu F., Porru G., "Emamizadeh B., "Design of a Composite Membrane with Patches", Appl. Math. Optim, 62 (2010) 169-184.
5. Chanillo S., Grieser D., Imai M., Kurata K., Ohnishi I., "Symmetry breaking and other phenomena in the optimization of eigenvalues for composite membranes", Commun. Math. Phys, 214 (2000) 315-337.
6. Cox S. J., McLaughlin J. R., "Extremal eigenvalue problems for composite membranes", I. Appl. Math. Optim, 22 (1990) 153-167.
7. Henrot A., "Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators", Basel: Birkhäuser-Verlag (2006).
8. Mohammadi S. A., Voss H., "A minimization problem for an elliptic eigenvalue problem with nonlinear dependence on the eigenparameter", Nonlinear Anal. RWA. 31 (2016) 119-131.
9. Mohammadi S. A., "Extremal energies of Laplacian operator: Different configurations for steady vortices", J. Math. Anal. Appl. 448 (2017) 140-155.
10. Mohammadi S. A., Bahrami F., "A nonlinear eigenvalue problem arising in a nanostructured quantum dot, Commun. Nonlinear", Sci. Numer Simulat, 19, (2014) 3053-3062.

11. Zivari-Rezapour M., "Maximax rearrangement optimization related to a homogeneous Dirichlet problem", Arab. J. Math, 2, (2013) 427-433.
12. Zivari-Rezapour M., Emamaizadeh B., "Optimization of the principal eigenvalue of the pseudo p-Laplacian operator with Robin boundary conditions", International Journal of Mathematics, 23 (2012) 25-127.
13. Kao C.Y., Su S., "An efficient rearrangement algorithm for shape optimization on eigenvalue problems", J. Sci. Comput, 54 (2013) 492–512.
14. Burton G. R., "Variational problems on classes of rearrangements and multiple configurations for steady vortices", Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. NonLinéaire, 6 (1989) 295-319.
15. Osher J., Santosa F., "Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints i. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum", J. Comput, Phys, 7 (2001) 1272–288.