 قضیه بیشاب- فلیس در مخروطهای نرم‌دار

ایلدار صادقی، علی حسن زاده؛
دانشگاه صنعتی سهند، دانشکده علوم پایه مهندسی

پیام‌رسان: esadeqi@sut.ac.ir

1. O. Valero
2. P. Selinger

مقدمه

در سال‌های اخیر محققان زیادی به پژوهش در قضیه بیشاب- فلیس در فضاهای شبه متری، مخروطهای شیم‌نودار و قضیه برداری نرم‌دار نامتقاضی اعلام‌گذاشته‌اند. چنین قضیه‌آرایی‌های ابزاری مهم در بررسی مسائل متنوعی در علوم کامپیوتر و نظریه تقریب، فیزیک کاربردی، آنالیز محدود و بهینه‌سازی فراهم می‌کنند. اکثری از این قضیه‌ها زیادی روز تولوزولوی علوم و آنالیز تابعی، برای توسعه نتایج شناخته شده نظریه کلاسیک فضاهای برداری نرم‌دار به فضاهای برداری نرم‌دار نمی‌پایه و مخروطهای شیم‌نودار، انجام شده است.


قاتیه بیشاب-فلیس یکی از قضیه‌ای اساسی در آنالیز تابعی است که دارای کاربردهای فراوانی در آنالیز تابعی، هندسه قضیه باناخ و نظریه بهینه‌سازی است (برای جزئیات بیشتر به [2]، [3]، [5]، [15] رجوع شود) حالت...
مفاهیم اولیه

تعریف و مفاهیم اولیه این بخش از [1], [2], [16] است.

فرض کنید \( B \) یک زیرمجموعه تابعی از فضای بازیت \( X \) و \( f \) و \( X \) که تابع خطی پوششی نیست روبی \( X \) باشد. \( \lambda \) یک مجموعه از \( f \) که باشد. \( \lambda \) اگر \( \lambda \) را در نقطه \( x \) اختیار کند، \( \lambda \) را در نقطه \( x \) حمایت ۰ می‌کند.

و یک نقطه انتها (با حامی) \( B \) است.

مجموعه اعداد حقیقی نامنفی را با \( \mathbb{R}^+ \) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱. یک مخروط مجرد عبارت است از یک مجموعه \( V \) همراه با دو عملکر \( f: V \to \mathbb{V} \) و \( (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \) و \( v, w, u \in V \) بهطوری که بازیت \( 0 \in V \) به مخروط \( (V, +, 0) \) عبارت است از تابع

\[
\begin{align*}
\lambda v + w &= \lambda v + w, \\
(\lambda \mu) v &= \lambda (\mu v), \\
(\lambda + \mu) v &= \lambda v + \mu v, \\
\lambda v + w &= \lambda v + \lambda w, \\
v + w &= v + w, \\
v + w &= w + v, \\
v + w &= w + v, \\
v + w &= 0, \\
v + v &= v.
\end{align*}
\]

یادآوری می‌کنیم که یک نکته اصلی از مخروط \( (V, +, 0) \) به مخروط \( (V, +, 0) \) عبارت است از تابع

\[
\begin{align*}
\lambda v &= \lambda v, \\
v + v &= v.
\end{align*}
\]

تعریف ۲. مجموعه از اعداد حقیقی \( \mathbb{R}^+ \) و \( \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \) و \( v, w, u \in V \) به‌طوری که بازیت \( 0 \in V \) به مخروط \( (V, +, 0) \) عبارت است از تابع

\[
\begin{align*}
\lambda v &= \lambda v, \\
v + v &= v.
\end{align*}
\]

1. V. Klee
2. Support
\[ D = \downarrow D \]

و با نماد \( \downarrow D \) نشان می‌دهیم. گروپ مجموعه \( D \) پایینی است اگر

\[ \{ u \in V : \exists v \in D : v \subseteq u \} \]

تعریف \( \uparrow D \) نشان می‌دهیم. گروپ مجموعه \( D \) بالایی است اگر

\[ \mathcal{V} = \{ u \in V : u \leq V \} \quad \text{و} \quad v, w \in V \quad \text{و} \quad v \wedge w \in \mathcal{V} \]

تعریف ۲. تابع \( \| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_+ \) را یک نرم روبرو مخروط \( V \) گویند هرگاه تابع

\[ \| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| \]

\[ \| \lambda v \| = \| v \| \]

\[ \| v \| = 0 \implies v = 0 \]

\[ v \subseteq w \implies \| v \| \leq \| w \| \]

تعریف ۳. مجموعه ژانر متبرک \( (D, \subseteq) \) را یک \( dcpo \) گویند اگر زیر مجموعه ژانر \( D \) از \( A \) دارد

\[ \text{کوشک طی کردن کران بالا در } D \text{ باشد} \]

تعریف ۴. مخروط \( V \) را کامل گویند اگر ایدئال \( I \) یک \( dcpo \) باشد که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

در مرجع \( I \) نشان داده شده است که اگر \( (a_i)_{i \in I} \) یک تور صعودی در یک مخروط نرم‌دار کامل باشد و

\[ \| a_i \| \subseteq \| a_i \| \]

موجود باشد، آن گاه \( w \subseteq a \) باشد. نشان می‌دهیم که \( dcpo \) نشانی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) و با نماد \( v \subseteq w \) عناصری از یک \( dcpo \) باشد. گروپ مجموعه \( V \) پایینی-مسیر \( v \) است و با نماد \( v \subseteq w \) وجود داشته باشد \( w \in A \)، یک عناصر \( v \subseteq a \) در \( A \) داشته باشد \( a \in A \) با طولی که

\[ \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۵. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۶. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۷. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۸. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۹. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۰. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۱. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۲. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۳. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۴. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۵. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۶. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۷. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۸. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]

تعریف ۱۹. فرض کنید \( a \subseteq V \) یک قبیل \( dcpo \) باشد که

\[ \| v \| \subseteq \| v \| \]

نیازی از یک مخروط نرم‌دار \( V \) باشد. نشان می‌دهیم که

\[ \| a \| \subseteq \| a \| \]

بطروری که

\[ \| a \| \]
در تعریف دیل مفهوم نقطه اتکاء بر مخروط‌های نرم‌دار، مکرر می‌کنیم.


de نکته‌ی اصلی

در تعریف دیل مفهوم نقطه اتکاء بر مخروط‌های نرم‌دار مکرر می‌کنیم.
قضیه بیشاب-فلپس در مخروط‌های نرم‌دار

تعریف ۲۴. فرض کنید $\mathcal{B}$ یک مجموعه اسکات بر روی یک مخروط باشد. نقطه $x \in \mathcal{B}$ را یک نقطه اتکاء می‌گویند، اگر تابعک اسکات پیوسته خطي $\lambda : V \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $V$ شامل تمام تابعک‌های خطي پیوسته $\lambda$ می‌باشد.

چنین تابعکی اگر یک نقطه اتکاء اگر و تنها اگر $\lambda$ محدود باشد.

گویند. $\mathcal{B}$ یک مخروط نرم‌دار باشد. مخروط $V^*$ شامل تمام تابعک‌های خطي پیوسته $\lambda : V \to \mathbb{R}$ می‌باشد.

اگر از این مجموعه اتکاء‌ها به دوین صورت تعیین کنیم:

$$\|f\| = \sup_{x \in V} |f(x)|$$

آن گاه $V^*$ یک مخروط نرم‌دار است.

تذکر ۱۳. فرض کنید $\mathcal{B}$ یک مجموعه اسکات است. فرض کنید $\lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ یک تابعک خطي اسکات پیوسته باشد. اگر تابعک $\lambda$ نقطه اتکاء برای نقطه اتکاء $\mathcal{B}$ باشد، آن گاه $\lambda$ می‌تواند نقطه اتکاء اتکاء $\mathcal{B}$ باشند.

فرض کنید $\mathcal{B}$ یک مجموعه اتکاء در مخروط درست نیست. فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه اتکاء در مخروط درست نیست و تابعک $\lambda$ نقطه اتکاء اتکاء $\mathcal{B}$ باشد. عضوی از مجموعه اسکات $\mathcal{B}$ می‌تواند نقطه اتکاء $\mathcal{B}$ باشد.

مطالعه ۱۴. فرض کنید $\mathcal{B}$ یک مجموعه اتکاء در مخروط باشد. درست‌نیست. فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه اتکاء در مخروط درست نیست و تابعک $\lambda$ نقطه اتکاء $\mathcal{B}$ باشد. عضوی از مجموعه اسکات $\mathcal{B}$ می‌تواند نقطه اتکاء $\mathcal{B}$ باشد.

اگر $\mathcal{B}$ بیشینه در مخروط باشد، آن گاه مشابه می‌باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\mathcal{B}$ مجموعه اتکاء $\mathcal{B}$ در مخروط درست نیست.

موفقیت. فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه اتکاء در مخروط باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\mathcal{B}$ مجموعه اتکاء $\mathcal{B}$ در مخروط درست نیست.

\[1\] Zorn's Lemma
در این صورت، 

\[ f(b) \leq \lambda \alpha \]

از این رو، به‌زای‌های یک مجموعه محدود باشد.

برای بررسی قضیه بیشاب، فلپس، به برخی مخروط‌های خاص نیاز دارم. فرض کنید \( V \) یک مخروط نرم‌دار باشد.

به‌زای‌های یک مجموعه محدود باشد.

\[ K(f, \delta) = \{ x \in V : \delta \| x \| \leq f(x) \} \]

یک مجموعه محدود است.

\[ f : V \to \mathbb{R} \]

\[ dB \in \mathcal{B} \]

اگر باشد.

\[ B \cap (m + K) = \{ m \} \]

\[ \mu \geq \alpha \]

\[ \lambda \geq 1 \]

\[ m \in d + K \]

\[ \lambda \geq 1 \]

\[ \mu \geq \alpha \]

\[ \delta \geq 1 \]

\[ m \in d + K \]

\[ m \in d + K \]

\[ B \cap (m + K) = \{ m \} \]

\[ B \cap m + K \]

\[ dB \in \mathcal{B} \]

\[ V \subseteq (m + (K \setminus \{ 0 \})) = \emptyset \].
مثال ۱۸. مخروط نرم‌دار را با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]

\[ B \] در این صورت مجموعه مخروط اسکات بیان دارد. من نشان می‌دهم مجموعهای با فرض \( B \) است که هر نقطه اتکاگ می‌باشد و اکنون مجموعه زیرمجوعه اسکات بیش ازای هر، با استفاده از لفم (۱۶) قابل است. \[ \exists B \subseteq \mathbb{R}^n \] بنابراین با توبولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

\[ B = \{ x + y \leq 1: x, y \geq 0 \}. \]
کلاسی از اعداد $b$ به دست آمده که $b \in B$ و $m \in \mathbb{R}$. در نتیجه، به آرایه $B$ و $g(b) \leq g(m)$، $b \in B$ و $m = x_0 + k$ وجود دارد بر طوری که

$$
\delta \| k \| \leq f(k) = f(m) - f(x_0) \leq f(y) - f(x_0) \leq \| f \| \epsilon.
$$

پس این انتظار گرفته شده که مجموعه $m$، مجموعه سطح و تابع خطی پیوسته باشد و $f$ مجموعه اندازه نداشته باشد. اگر $b \in B$ و $m \notin B$، آنگاه $x_0 \in B \setminus \{x_0\}$ مجموعه سطح $y \notin B$ است. با توجه به این که $x_0 \notin B$, آنگاه $x_0 \notin B \setminus \{x_0\}$. اگر $x_0 \in B$ در نظر گرفته شده باشد، به دست می‌آید $m < 0$.

مثال 1

فرض کنید $\ell_1 \subset \ell_\infty$ بانه‌ای مجموعه $\ell_1$ باشد. به عنوان مثال، $\ell_1$ مجموعه هر $x \in \ell_\infty$ که $\| x \| = 1$ است. در این صورت، $e = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$ و $\ell_\infty \subset \ell_\infty$. در نتیجه، بررسی کردن $z$ که متعلق به $\ell_\infty$ است، می‌تواند به این صورت باشد. در این صورت، $z \subset \ell_\infty$ و $\ell_\infty \subset \ell_\infty$. بررسی کردن $z$ که متعلق به $\ell_\infty$ است، می‌تواند به این صورت باشد.
پیام تقدیر
از آقای دکتر اصغر رنجبری عضو هیئت علمی دانشگاه علوم ریاضی دانشگاه تبریز به دلیل نظرات و پیشنهادات مفید برای ارتقای کیفی این پژوهش تشکر می‌کنیم.

منابع
