(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

قضیهٔ بیشاب- فلپس در مخروط‌های نرم‌دار

ایلدار صادقی*، علی حسن زاده؛
دانشگاه صنعتی سهند، دانشکدهٔ علوم پایه مهندسی

دریافت ۹۶/۰۱/۰۱ پذیرش ۹۷/۰۲/۰۳

چکیده

در این مقاله مفهوم نقاط اتکاء مجموعه‌های محدب در مخروط‌های نرم‌دار معرفی شده و نشان داده می‌شود که در یک مخروط نرم‌دار پیوسته، تحت شرط‌های مناسب، مجموعه نقاط اتکاء مجموعه‌ای محدب اسکات بسته کران‌دار، ناتهی است. هم‌چنین قضیه بیشاب- فلپس را برای مخروط‌های نرم‌دار بیان و اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه اتکاء، مخروط نرم‌دار، قضیه - بیشاب فلپس

مقدمه

در سال‌های اخیر محققان زیادی به پژوهش در فضاهای شبه‌متری، مخروط‌های شبه‌نرم‌دار و فضاهای برداری نرم‌دار نامتقارن علاقمند شده‌اند. چنین نظریه‌ای ابزاری مهم در بررسی مسائل متنوعی در علوم کامپیوتر نظری، نظریه تقریب، فیزیک کاربردی، آنالیز محدب و بهینه‌سازی فراهم می‌کند. اخیراً کارهای زیادی روی توپولوژی عمومی و آنالیز تابعی، برای توسیع نتایج شناخته شده نظریهٔ کلاسیک فضاهای برداری نرم‌دار به فضاهای برداری نرم‌دار نامتقارن و مخروط‌های شبه‌نرم‌دار، انجام شده است [۴]، [۱۴]، [۱۸].

ساختار یک مخروط مجرد مشابه یک فضای برداری حقیقی است با این تفاوت که مجموعه اسکالرها، $\mathbb{R}_+$ در نظر گرفته می‌شود. در سال ۲۰۰۴ اسکار ولرو[1] مخروط‌های نرم‌دار را معرفی کرده است [۹] و برخی نتایج نگاشت باز و گراف بسته را برای مخروط‌های نرم‌دار اثبات کرده است [۱۸]. هم‌چنین برخی ویژگی‌های مخروط‌های نرم‌دار خارج قسمت به‌وسیلهٔ او بررسی شده است [۱۷]. پیتر سلینگر[2] ویژگی‌های نرمی یک مخروط را همراه با ویژگی‌های ترتیبی آن بررسی کرده و قضایای‌هان باناخ را در این مخروط‌ها تحت شرط‌های خاص اثبات می‌کند. در مراجع [۱۶]. [۷] و [۹] به‌ترتیب، مترپذیری ایده‌آل یکهٔ دوگان مخروط‌های نرم‌دار و ایزومتری مخروط‌های نرم‌دار بررسی شده است. سایر ویژگی‌ها در سری مقالاتی که به‌وسیلهٔ ولرو و همکارانش نوشته شده‌اند، بررسی شده است. به‌عنوان نمونه در [۱۱] و [۱۳] مخروط‌های نرم‌دار یکنوای توسیع یافته و مونوئیدهای شبه نرم‌دار بررسی شده‌اند. برای جزئیات بیش‌تر به مرجع [۴] رجوع شود.

قضیهٔ بیشاب-فلپس یکی از قضایای اساسی در آنالیز تابعی است که دارای کاربردهای فراوانی در آنالیز تابعی، هندسهٔ فضای باناخ و نظریه بهینه‌سازی است (برای جزئیات بیش‌تر به [۲]، [۳]، [۵]، [۱۵] رجوع شود). حالت

*نویسندهٔ مسئول esadeqi@sut.ac.ir

1. O. Valero
2. P. Selinger

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.2.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.165]

کلاسیک قضیه بیشاب-فلپس، بیان می‌کند که مجموعه تابعک‌های اتکاء برای زیرمجموعهٔ محدب کراندار بسته B از یک فضای باناخ حقیقی مانند X، در دوگان توپولوژیکی X یعنی X^* و مجموعه نقاط اتکاء B در مرز B چگال است [۳]. در حقیقت بیشاب و فلپس با این قضیه به پرسشی که به‌وسیله ویکتور کلی[1] (۱۹۵۸) [۸] در مورد ناتهی بودن نقاط اتکاء یک مجموعه محدب بسته کران‌دار از یک فضای باناخ، مطرح شده بود، پاسخ داده‌اند. در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم که در یک مخروط نرم‌دار پیوسته، مجموعهٔ نقاط اتکاء از یک مجموعهٔ محدب اسکات بسته کران‌دار با در نظر گرفتن شرط‌های لازم ناتهی است و در نهایت قضیه بیشاب– فلپس را برای مخروط‌های نرم‌دار بیان و اثبات می‌کنیم.

مفاهیم اولیه

تعاریف و مفاهیم اولیه این بخش از [۱]، [۲]، [۱۶] است.

فرض کنید B یک زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای باناخ حقیقی X و f یک تابعک خطی پیوسته غیرصفر روی X باشد. اگر f بیشینه یا کمینه خود را روی B در نقطهٔ x اختیار کند، گویند f مجموعه B را در نقطه x حمایت[2] می‌کند و x یک نقطهٔ اتکاء (یا حامی) B *نسبت به* f است.

مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}_+$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱. یک مخروط مجرد عبارت است از یک مجموعهٔ V همراه با دو عملگر $+: V\times V \to V$ و $\cdot: \mathbb{R}_+ \times V \to V$ و عنصر خنثی $0 \in V$ به‌طوری‌که به‌ازای $v, w, u \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ این روابط برقرار باشند [۱۶]:

$$
\begin{array}{ll}
0+v=v, & 1v=v, \\
v+(w+u)=(v+w)+u, & (\lambda\mu)v=\lambda(\mu v), \\
v+w=w+v, & (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v, \\
 & \lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w, \\
v+u=w+u \Rightarrow v=w, & \\
v+w=0 \Rightarrow v=w=0. &
\end{array}
$$

یادآوری می‌کنیم که یک تابع خطی از مخروط $(V,+,0)$ به مخروط $(W,+,0)$، عبارت است از تابع $f: V \to W$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $v, w \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}_+$،

$$f(v+w)=f(v)+f(w), \quad f(\lambda v)=\lambda f(v).$$

ترتیب مخروطی روی یک مخروط مجرد V، بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$v \sqsubseteq w$ اگر عنصر $u \in V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $v+u=w$.

توجه کنید که ترتیب مخروطی یک ترتیب جزئی است.

برای دو عنصر v و w عنصر منحصر به فرد u به‌طوری‌که $v+u=w$، را با نماد $w-v$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید D یک زیرمجموعه از یک مخروط مجرد V باشد. بستار پایینی D را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\{u \in V : \exists v \in D; u \sqsubseteq v\}$$

1. V. Klee
2. Support

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.2.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.165]

و با نماد $\downarrow D$ نشان می‌دهیم. گوییم مجموعه D پایینی است اگر $D = \downarrow D$.
بستار بالایی D را به‌صورت

$$\{u \in V : \exists v \in D; v \sqsubseteq u\}$$

تعریف می‌کنیم و با نماد $\uparrow D$ نشان می‌دهیم. گوییم مجموعه D بالایی است اگر $D = \uparrow D$.
توجه کنید که هر دو بستار پایینی و بالایی یک مجموعهٔ محدب، محدب است.
تعریف ۲. تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ را یک نرم روی مخروط V گویند هرگاه به‌ازای هر $v, w \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}_+$ [۱۶]:

$$\| v + w \| \le \| v \| + \| w \|,$$
$$\| \lambda v \| = \lambda \| v \|,$$
$$\| v \| = 0 \Rightarrow v = 0,$$
$$v \sqsubseteq w \Rightarrow \| v \| \le \| w \|.$$

زوج $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ را یک مخروط نرم‌دار گویند.
مجموعهٔ $U_V = \{u \in V : \| u \| \le 1\}$ را ایده‌آل یکه مخروط نرم‌دار V گویند.
تعریف ۳. مجموعهٔ جزئاً مرتب $(D, \sqsubseteq)$ را یک $dcpo$[1] گویند اگر هر زیر مجموعه جهت‌دار A از D دارای کوچک‌ترین کران بالا در D باشد [۱].
کوچک‌ترین کران بالای یک زیرمجموعه جهت‌دار A را با نماد $\sqcup^{\uparrow} A$ نشان می‌دهند و آن را سوپریمم جهت‌دار A گویند.
تعریف ۴. مخروط نرم‌دار V را کامل گویند اگر ایده‌آل یکه آن یک $dcpo$ باشد [۱۶].
در مرجع [۱۶] نشان داده شده است که اگر $(a_i)_{i \in I}$ یک تور صعودی در یک مخروط نرم‌دار کامل باشد و $\sqcup^{\uparrow} a_i$ موجود باشد، آن‌گاه $\| \sqcup^{\uparrow} a_i \| = \sqcup^{\uparrow} \| a_i \|$.
تعریف ۵. الف) فرض کنید w و v عناصری از یک $dcpo$ باشند. گوییم w پایین-مسیر v است و با نماد $w \ll v$ نشان می‌دهیم هرگاه به‌ازای هر مجموعه جهت‌دار A به‌طوری‌که $v \sqsubseteq \sqcup^{\uparrow} A$، یک عنصر $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $w \sqsubseteq a$ [۱۶].
مجموعهٔ $\Downarrow v$ به‌صورت $\{w : w \ll v\}$ و مجموعهٔ $\Uparrow v$ به‌صورت $\{w : v \ll w\}$ تعریف می‌شود.
ب) یک $dcpo$ را پیوسته گویند اگر به‌ازای هر عنصر v از آن، مجموعهٔ $\Downarrow v$ جهت‌دار باشد و $v = \sqcup^{\uparrow} \Downarrow v$.
تعریف ۶. فرض کنید D یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. زیرمجموعه A را اسکات بسته گویند اگر پایینی و تحت سوپریمم زیرمجموعه‌های جهت‌دار (در صورت وجود سوپریمم) بسته باشد [۱]. متمم مجموعه‌های اسکات بسته را اسکات باز گویند. خانواده مجموعه‌های اسکات بسته را با σ_D نشان می‌دهیم و آن را توپولوژی اسکات روی D گویند.
در یک $dcpo$ پیوسته (به‌ویژه در یک مخروط نرم‌دار پیوسته) به‌ازای هر v، مجموعهٔ $\Uparrow v$ یک مجموعهٔ محدب و باز است و به‌ازای هر v، $\Uparrow v = int(\uparrow v)$ (برای اثبات به گزارهٔ Prop ۲.۳۵ از [۱] و Cor. ۲.۱۵ از [۱۶] رجوع شود).
تعریف ۷. یک مخروط نرم‌دار پیوسته یک مخروط نرم‌دار کامل است که ایده‌آل یکه آن یک $dcpo$ پیوسته است [۱۶].

1. Directed complete partially ordered

مثال ۸. مخروط‌های نرم‌دار کامل $\mathbb{R}_+^n$ و l^∞ (مجموعه دنباله‌های کراندار در $\mathbb{R}_+$ همراه با نرم $\|(x_i)_i\|=\sup_i x_i$) و l_1 (مجموعه دنباله‌هایی در $\mathbb{R}_+$ با جمع متناهی همراه با نرم $\|(x_i)_i\|=\sum_i x_i$) پیوسته هستند (مثال ۲.۷ از [۱۶]).

تعریف ۹. فرض کنید V و W مخروط‌های نرم‌دار کامل باشد. تابع $f:V\to W$ را اسکات پیوسته (یا پیوسته) گویند هرگاه به‌ازای تورهای جهت‌دار کراندار، حافظ سوپریمم جهت‌دار باشد [۱].

تعریف ۱۰. تابع خطی $f:V\to W$ بر روی مخروط‌ها را کران‌دار گویند اگر عنصر $c\in\mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $v\in V$، $\|f(v)\|\le c\|v\|$ [۱۶].

مجموعهٔ B از یک مخروط نرم‌دار را کران‌دار گویند هرگاه عدد حقیقی مثبت m وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $b\in B$ داشته باشیم $\|b\|\le m$.

فرض کنید V یک مخروط مجرد و $B\subset V$ یک زیرمجموعهٔ محدب پایینی باشد. گویند B، مخروط V را تولید می‌کند اگر به‌ازای هر $v\in V$، وجود داشته باشد $\lambda>0$ به‌طوری‌که $\lambda v\in B$.

قضیهٔ ۱۱. (قضیهٔ ۳.۱ از [۱۶]). (قضیهٔ جداسازی) فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار پیوسته و B و U مجموعه‌های محدب باشند به‌طوری‌که B پایینی و مجموعه U باز و بالایی است و $B\cap U=\varnothing$. به‌علاوه فرض کنید B، V را تولید می‌کند. آن‌گاه تابع خطی پیوسته $f:V\to\mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $v\in B$، $f(v)\le 1$ و به‌ازای هر $u\in U$، $f(u)>1$.

توجه کنید که نرم تعریف شده در این بخش برای مخروط‌ها، لزوماً با روش متداول در آنالیز کلاسیک، توپولوژی بر روی مخروط‌ها القا نمی‌کند. در [۱۶] با فرض این‌که p یک نرم روی مخروط V باشد، تابع e_p روی $V\times V$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$e_p(x,y)=\begin{cases} p(\mathrm{a}), & x\in V, y\in x+V; y=x+a,\\ \infty, & x\in V, y\notin x+V.\end{cases}$$

تابع e_p یک T_0 توپولوژی روی V القا می‌کند. به‌ازای هر $x\in V$ و $r>0$ قرار دهید

$$B_{e_p}(x,r):=\{y\in X: e_p(x,y)<r\}.$$

خانوادهٔ τ- گوی‌های باز

$$\{B_{e_p}(x,r): x\in X, r>0\},$$

یک پایهٔ باز برای این توپولوژی هستند [۹]. این توپولوژی را با نماد τ نشان می‌دهیم.

به‌ازای هر $x\in V$، $r\in\mathbb{R}_+$ و $\epsilon>0$،

$$rB_{e_p}(x,\epsilon)=rx+\{y\in V: p(y)<r\epsilon\}$$

و انتقال‌های آن τ - باز (یا گوییم نرم باز) هستند (برای جزئیات بیش‌تر به [۹] رجوع شود).

نتایج اصلی

در تعریف ذیل مفهوم نقطهٔ اتکاء را برای مخروط‌های نرم‌دار معرفی می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.2.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.165]

تعریف ۱۲. فرض کنید B یک مجموعه اسکات بسته محدب در مخروط V باشد. نقطه $x \in B$ را یک نقطه اتکاء گویند، اگر تابعک اسکات پیوسته خطی $f: V \to \mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x) = \sup f(B)$.

چنین تابعک f را یک تابعک اتکاء گویند.

فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار باشد. مخروط V^* شامل تمام تابعک‌های خطی پیوسته $f: V \to \mathbb{R}_+$ را دوگان V گویند.

اگر به‌ازای هر $f \in V^*$ نرم تابع f را بدین‌صورت تعریف کنیم:

$$\| f \| = \sup_{\|x\| \le 1} f(x)$$

آن‌گاه V^* یک مخروط نرم‌دار است.

تذکر ۱۳. فرض کنید B یک مجموعه اسکات بستهٔ محدب در مخروط V باشد. آن‌گاه:

الف) اگر مجموعهٔ B دارای بیشینه باشد، آن‌گاه هر تابعک خطی اسکات پیوسته $f: V \to \mathbb{R}_+$ یک تابعک اتکاء برای B است.

ب) اگر مجموعه B دارای درون ناتهی باشد، آن‌گاه B یک مجموعه بیکران است. بنابراین هر تابعک خطی اسکات پیوسته $f: V \to \mathbb{R}_+$ روی B بیکران هست.

می‌دانیم که هر نرم روی فضای برداری X یک متر القا می‌کند. این مطلب برای هر نرم روی یک مخروط الزاماً درست نیست. توجه کنید که روی مخروط نرم‌دار دو نوع توپولوژی وجود دارد؛ یکی توپولوژی اسکات (یا ترتیبی) و دیگری τ توپولوژی (یا توپولوژی حاصل از نرم).

مثال ۱۴. فرض کنید $V = \mathbb{R}_+^2$ و $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 ; x + y \le 1\}$. آن‌گاه B یک مجموعه اسکات بسته محدب است که دارای بیشینه نیست. به راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعهٔ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y = 1\}$$

مجموعهٔ نقاط اتکاء B است.

فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار باشد. گوییم V دارای ویژگی SWB است اگر به‌ازای هر اسکالر $1 < \lambda$ و $x > 0$، داشته باشیم $\lambda x \gg x$.

برای مثال مخروط‌های نرم‌دار پیوسته $\mathbb{R}_+^n$، l^∞ و l_1 دارای ویژگی SWB هستند.

فرض کنید B یک زیرمجموعهٔ نرم کراندار اسکات بسته محدب ناتهی از یک مخروط نرم‌دار پیوسته V باشد که V را تولید می‌کند. با به‌کار بستن قضیهٔ جداسازی، نشان می‌دهیم که مجموعه نقاط اتکاء B ناتهی است.

گزارهٔ ۱۵. فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار پیوسته و B یک مجموعه نرم کران‌دار اسکات بستهٔ محدب ناتهی در V باشد. به‌علاوه فرض کنید B مخروط V را تولید کند و V دارای ویژگی SWB باشد. در این‌صورت مجموعه نقاط اتکاء B ناتهی است.

اثبات. با در نظر گرفتن مجموعه جزئاً مرتب $(B, \sqsubseteq)$، نشان می‌دهیم که B دارای عنصر ماکسیمال است. با استفاده از لم زورن[1]، کافی است نشان دهیم که هر زنجیر در B دارای کران بالا در B است. فرض کنید Z یک زنجیر در B

1. Zorn's Lemma

باشد. چون ایده‌آل یکه V یک $dcpo$ است و مجموعه B نرم کران‌دار است، بنابراین Z دارای سوپریمم در B است که با m نشان می‌دهیم. عنصر m در رابطهٔ $B\cap(m+V)=\{m\}$ صدق می‌کند که نشان می‌دهد $B\cap int(m+V)=\varnothing$. از این‌که $int(m+V)=\Uparrow m$ یک مجموعه باز محدب ناتهی است، از این‌رو، بنابه قضیه جداسازی، تابع خطی پیوسته $f:V\to\mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $b\in B$ و هر $x\in\Uparrow m$، $f(b)\le f(x)$. بنابراین به‌ازای هر $b\in B$ و هر $\lambda>1$،

$$f(b)\le f(\lambda m).$$

از این‌رو، به‌ازای هر $b\in B$، $f(b)\le f(m)$. بنابراین $f(m)=\sup f(B)$ و m یک نقطه اتکاء B است.

برای بررسی قضیه بیشاب- فلپس، به برخی مخروط‌های خاص نیاز داریم. فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار باشد. به‌ازای $f\in V^*$ و $0<\delta<1$، تعریف می‌شود:

$$K(f,\delta)=\{x\in V:\delta\|x\|\le f(x)\}.$$

$K(f,\delta)\subseteq V$ یک مخروط محدب است.

لم ۱۶. فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار کامل، $f:V\to\mathbb{R}_+$ یک تابعک خطی پیوسته و B یک مجموعه کران‌دار اسکات بستهٔ محدب ناتهی در V باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $d\in B$، عنصر $m\in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $B\cap(m+K(f,\delta))=\{m\}$ و $m\in d+K(f,\delta)$.

اثبات. فرض کنید $d\in B$ یک عنصر دلخواه باشد. چون تابع f و نرم، سوپریمم جهت‌دار را حفظ می‌کنند، بنابراین $K:=K(f,\delta)$ تحت سوپریمم زیرمجموعه‌های جهت‌دار(در صورت وجود)، بسته است. ترتیب جزیی $\ge$ را روی B بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$x\ge y\Leftrightarrow x\in y+K.$$

حال قرار دهید $B_d=\{y\in B:y\ge d\}$. مجموعه B_d لزوماً پایینی نیست. نشان می‌دهیم که مجموعه جزئاً مرتب $(B_d,\ge)$ دارای عنصر ماکسیمال است. ابتدا نشان می‌دهیم که $(B_d,\sqsubseteq)$ دارای عنصر ماکسیمال است. بنابه لم زورن، کافی است نشان دهیم که هر زنجیر در B_d دارای یک کران بالا در B_d است. فرض کنید Z یک زنجیر در B_d باشد. به‌ازای هر $\alpha\in Z$، قرار می‌دهیم $x_\alpha:=\alpha$. می‌توان Z را با تور صعودی $\{x_\alpha\}$ نشان داد. با توجه به این‌که B یک مجموعهٔ اسکات بسته کراندار است و $\{x_\alpha\}$ یک تور صعودی است، بنابراین $x=\bigsqcup^{\uparrow}x_\alpha\in B$ (با ترتیب $\sqsubseteq$). به‌علاوه به‌ازای هر α، $x_\alpha\in d+K$، که نتیجه می‌دهد $x\in d+K$ یا $x\ge d$. بنابراین $x\in B_d$. برای $\beta\ge\alpha$، $x_\beta\in x_\alpha+K$. عنصر α را ثابت در نظر بگیرید، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $x\in x_\alpha+K$. بنابراین به‌ازای هر α، $x\ge x_\alpha$. از این‌رو، x یک کران بالای زنجیر Z است و B_d دارای عنصر ماکسیمال m است، که نشان می‌دهد $B\cap(m+K)=\{m\}$ و $m\in d+K$.

لم ۱۷. فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار پیوسته و K یک زیر مخروط محدب V باشد. هم‌چنین فرض کنید B یک مجموعه اسکات بسته محدب V و $m\in B$ باشد به‌طوری‌که $B\cap(m+K)=\{m\}$. در این‌صورت

$$B\cap\uparrow(m+(K\setminus\{0\}))=\varnothing.$$

اثبات. فرض کنید $x\in B\cap\uparrow(m+(K\backslash\{0\}))$. آن‌گاه $k\in K\backslash\{0\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $m+k\sqsubseteq x$. از این‌رو، $m+k\in B$. بنابه فرض داریم $m+k=m$، بنابراین $k=0$، که غیر ممکن است.

در یک مخروط نرم‌دار پیوسته V، به‌ازای هر مجموعهٔ محدب B، مجموعهٔ $\Uparrow B$ باز و محدب است. در حقیقت، چون $\Uparrow B=\cup_{x\in B}\Uparrow x$، بنابراین $\Uparrow B$ یک مجموعه باز است و بنابه Lemma ۲.۱۶ از [۱۶]) $\Uparrow B$ یک مجموعهٔ محدب است.

مثال ۱۸. مخروط نرم‌دار $\mathbb{R}_+$ را با توپولوژی اسکات در نظر بگیرید و فرض کنید که

$$\mathrm{B}=\left\{x+y\le 1: x,y\ge 0\right\}.$$

در این‌صورت مرز مجموعه B با توپولوژی اسکات، برابر خود مجموعه B است که نشان می‌دهد مجموعه نقاط اتکاء B که برابر مجموعه $\left\{x+y=1: x,y\ge 0\right\}$ است در B اسکات چگال است.

با به‌کار بستن لم‌های ۱۶و ۱۷ قضیهٔ بیشاب - فلپس را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۹. فرض کنید V یک مخروط نرم‌دار پیوسته با ویژگی SWB باشد و B یک مجموعه کران‌دار اسکات بسته محدب ناتهی در V باشد که V را تولید می‌کند. در این‌صورت

الف) فرض کنیم U ایده‌آل یکه V باشد و

$$\mathrm{B}_1=\left\{x\in B:\forall\varepsilon>0\ \exists y_1\in B, y_2\in B^c: y_1,y_2\in x+\varepsilon U\right\}.$$

آن‌گاه به‌ازای هر عنصر $x\in B_1$ و $\varepsilon>0$ نقطه اتکاء m از مجموعهٔ B وجوددارد به‌طوری‌که $m=x+k$ و $\|k\|\le\varepsilon$.

ب) مجموعه نقاط اتکاء B در اسکات-مرز B چگال است.

ج) به‌ازای هر تابعک خطی پیوسته $f:V\to\mathbb{R}_+$، تابعک اتکاء h برای B وجود دارد به‌طوری‌که روی یک زیرمخروط V داریم $0\le h\le f$.

اثبات. الف) فرض کنید $x_0\in B_1$ و $\epsilon>0$. آن‌گاه $y_o\in B^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $y_0\in x_0+\epsilon U$، که U ایده‌آل یکه V است. مجموعه $A:=\Uparrow y_0$ یک مجموعه اسکات باز محدب ناتهی است. چون B یک مجموعهٔ پایینی محدب که V را تولید می‌کند و $A\cap B=\varnothing$، بنابراین تابعک خطی پیوسته $f:V\to\mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $b\in B$ و هر $a\in A$، $f(b)\le f(a)$. چون f نرم کراندار است، تابع f را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که $\|f\|\le 1$.

از این‌رو، به‌ازای هر $b\in B$، $f(b)\le f(y_0)$. بنابه گزارهٔ ۱۵، $m\in B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$B\cap(m+K)=\{m\},\ \ m\in x_0+K(f,\delta).$$

بنابه لم ۱۷ داریم: $B\cap\Uparrow(m+K\backslash\{0\})=\varnothing$. قرار دهید. $D:=B\cap\Uparrow(m+K\backslash\{0\})$ با استفاده از قضیهٔ جداسازی، تابعک خطی پیوسته $g:V\to\mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $b\in B$ و $d\in D$، $g(b)\le g(d)$.

حال با توجه به ویژگی SWB، به‌ازای هر $b\in B$ و $k\in K\backslash\{0\}$ داریم $g(b)\le g(m)+g(k)$. اگر $z\in K\backslash\{0\}$، آن‌گاه به‌ازای هر $\lambda>0$، $\lambda\cdot z\in K\backslash\{0\}$ و بنابراین به‌ازای هر $b\in B$،

$$g(b)\le g(m)+\lambda g(z).$$

در نتیجه، به‌ازای هر $b \in B$، $g(b) \leq g(m)$ و m یک نقطهٔ اتکاء B است. چون $m \in x_0 + K$، بنابراین $k \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $m = x_0 + k$ و

$$\delta \| k \| \leq f(k) = f(m) - f(x_0) \leq f(y_0) - f(x_0) \leq \| f \| \epsilon.$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم اگر $x_0 \in B \setminus \Downarrow B$، آن‌گاه x_0 یک نقطهٔ اتکاء برای مجموعه B است. با توجه به این‌که $B \cap \Uparrow x_0 = \varnothing$ از این‌رو، تابعک $f : V \to \mathbb{R}_+$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $b \in B$ و $y \in \Uparrow x_0$، $f(b) \leq f(y)$. بنابه ویژگی SWB مخروط V، به‌ازای هر $b \in B$، $f(b) \leq f(x_0)$. بنابراین x_0 یک نقطهٔ اتکاء است.

حال نشان می‌دهیم مجموعه نقاط اتکاء B در خود مجموعهٔ B چگال است. فرض کنیم $x_0 \in B$ و U یک مجموعهٔ اسکات باز دلخواه شامل x_0 باشد. اگر $x_0 \notin \Downarrow B$، آنگاه x_0 یک نقطه اتکاء است. فرض کنید $x_0 \in \Downarrow B$. از این‌رو، $y_0 \in B$ موجود است به‌طوری‌که $x_0 \ll y_0$. مجموعه جزئاً مرتب $\Uparrow x_0$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح هر زنجیر در $\Uparrow x_0$ دارای کران بالا در $\Uparrow x_0$ است، از این‌رو، بنابه لم زورن مجموعه $\Uparrow x_0$ دارای عنصر ماکسیمال مانند m است. چون $m \in \Uparrow x_0$ از این‌رو $x_0 \leq m$. نقطه m یک عنصر ماکسیمال برای B نیز است. می‌توان نتیجه گرفت که $m \notin \Downarrow B$، زیرا در غیر این‌صورت $y \in B$ موجود است به‌طوری‌که $m \ll y$ و این یک تناقض است. بنابراین m یک نقطهٔ اتکاء برای B است. چون U یک مجموعه بالایی شامل نقطه x_0 است از این‌رو، شامل m نیز است.

ج) فرض کنید $f : V \to \mathbb{R}_+$ یک تابعک خطی پیوسته باشد و $0 < \delta < 1$. مخروط $K(f, \delta)$ را در نظر بگیرید. بنابه لم‌های ۱۶ و ۱۷، عنصر $m \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$B \cap \Uparrow (m + K(f, \delta) \setminus \{0\}) = \varnothing.$$

بنابه قضیهٔ جداسازی، تابعک خطی پیوسته $h : \mathrm{V} \to \mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $b \in B$ و $c \in K(f, \delta) \setminus \{0\}$، $h(b) \leq h(m + c)$. این نشان می‌دهد که h بیشینهٔ خود را روی B می‌گیرد و $h(\delta c) \leq f(c) \cdot \| h \|$. عدد δ و تابع h را می‌توان طوری انتخاب کرد که $h(\mathrm{c}) \leq f(c)$. بنابراین روی یک زیرمخروط V، $0 \leq h \leq f$ که اثبات را کامل می‌کند.

این بخش را با یک مثال در خصوص قضیه اساسی فوق به پایان می‌رسانیم.

مثال ۲۰. فرض کنید

$$\ell_1 = \{(x_i)_i \;:\; x_i \in \mathbb{R}_+, \sum_i x_i \leq +\infty\}.$$

واضح است که مجموعه $U := \{(x_i)_i \in \ell_1 \;:\; \sum_i x_i \leq 1\}$ یک مجموعه کران‌دار اسکات بسته در ℓ_1 است. می‌توان بررسی کرد که $\ell_\infty \subset (\ell_1)^*$. فرض کنید z متعلق به $D := \{(x_i)_i \in U : \| x \| = 1\}$ باشد. قرار دهید $e := (1,1,1,\ldots) \in \ell_\infty$، در این‌صورت e یک تابعک اتکاء و z یک نقطه اتکاء برای Uاست. ازاین‌رو، D مجموعهٔ نقاط اتکاء U است.

سپاس‌گزاری

از آقای دکتر اصغر رنجبری عضو هیأت علمی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه تبریز، به‌دلیل نظرات و پیشنهادات مفید برای ارتقا کیفی این پژوهش تشکر می‌کنیم.

منابع

1. Abramsky S., Jung A., "Domain theory, In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, handbook of logic in computer science", Clarendon Press 3 (1994) 1-168.
2. Aliprantis C. D., Border K. C., "Infinite dimensional analysis: A hitchhiker's guide", Springer; 3rd edition (2007).
3. Bishop E., Phelps R. R., "The support functionals of a convex set", Convexity, Proc. Sympos. Pure Math, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 7 (1963) 27-35.
4. Cobzas S., "Functional analysis in asymmetric normed spaces", Birkhäuser (2013).
5. Fabian M., et al., "Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis", Springer (2010).
6. Fletcher P., Lindgren W. F., "Quasi-Uniform spaces", Marcel Dekker (1982).
7. García-Raffi L. M., Romaguera S., Sánchez-Pérez E. A., Valero O., "Metrizability of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone", Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. 7-B No. 2 (2004) 483-492.
8. Klee V., "Extremal structures of convex sets", Math. Z. 69 (1958) 98.
9. Valero O., Oltra S., "Isometries on quasi-normed cones and bicompletion", New Zealand Journal of Mathematics, 33 (2004) 83-90.
10. Romaguera S., Sánchez-Pérez E. A., Valero O., "Dominated extensions of functionals and v-convex functions on cancellative cones", Bull. Austral. Math. Soc. 67, No. 1 (2003) 87-94.
11. Romaguera S., Sánchez-Pérez E. A., Valero O., "Quasi-normed monoids and quasi-metrics", Publ. Math. Debrecen 62, No. 1-2 (2004) 53-69.
12. Romaguera S., Sánchez-Pérez E. A., Valero O., "Duality and dominating extension theorems in noncancellative normed cones", Bol. Soc. Mat. Mexicana 12, No. 3 (2006) 33-42.
13. Romaguera S., Sánchez-Pérez E. A., Valero O., "A characterization of generalized monotone normed cones", Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23 (2007) 1067-1074.
14. Romaguera S., Schellekens M., "Quasi-metric properties of complexity spaces", Topol. Appl., 98 (1999) 311-322.
15. Sadeqi I., "Support functionals and their realation to the Radon-Nikodym property", IJMMS, 16 (2004) 827-832.

16. Selinger P., "Towards a semantics for higher-order quantum computation", In Proceedings of the 2nd International Workshop on Quantum Programming Languages, Turku, Finland. TUCS General Publication, No. 33 (2004) 127-143.

17. Valero O., "Quotient normed cones", Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 116 (2003) 175-191.

18. Valero O., "Closed graph and open mapping theorems for normed cones", Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 118, No. 2 (2008) 245-254.