روش کم‌ترین مانده تعمیم یافته پیش شرط سازشده برای حل معادله انتشار-هم رفت کسری

طیبه چراغزاده، مهدی قاسمی، رضا خوش سیر، علیرضا انصاری*؛
دانشگاه شهرکرد، گروه ریاضی کاربردی، شهرکرد، ایران

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله معادله انتشار-هم رفت با مشتق مرتبه کسری را در نظر می‌گیریم. برای به‌دست آوردن یک روش عددی، مشتقات کسری موجود در معادله با استفاده از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته جای‌گزین می‌شوند. برای بهبود روش عددی ارائه شده، مشتقات جزئی معادله را با روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون کسری گسسته‌سازی می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم این روش به‌صورت غیرمشروط پایدار است. سپس با معرفی یک ماتریس پیش‌شرط ساز، روش کم‌ترین مانده تعمیم یافته (GMRES) پیش‌شرط ساز شده را برای حل دستگاه معادلات جبری به‌دست آمده معرفی خواهیم کرد. در پایان با هدف تأیید نتایج نظری، با ارائه یک مثال روش GMRES پیش‌شرط سازشده را آزمایش می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلهٔ انتشار-هم رفت کسری، کرانک-نیکلسون کسری، گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته، GMRES پیش‌شرط ساز شده.

مقدمه

محاسبات کسری، تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال است که مشتق‌ها و انتگرال‌های در آن از مرتبه دلخواه باشند. به معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتقات جزئی که مشتقات در آن از مرتبه کسری باشند، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری گفته می‌شود. امروزه در بسیاری از علوم، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری کاربردی گسترده یافته است. به‌عنوان مثال می‌توان به‌بررسی جریان سیال در یک مایع، الکترمغناطیس و نظایر آن اشاره کرد [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]. هم‌چنین توصیف و مدل‌سازی مسائل فیزیکی، شیمیایی، دستگاه‌های زیست‌محیطی با دقت بالا از دیگر کاربردهای مهم حسابان کسری محسوب می‌شود [۶]، [۷]. در سال‌های اخیر با توجه به کاربردهای بسیار گسترده این‌گونه معادلات، حل آن‌ها اهمیت زیادی دارد. لازم به ذکر است برای حل این گونه معادلات همیشه جواب تحلیلی موجود نیست و به‌همین دلیل از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود. که درنهایت با حل یک دستگاه معادلات خطی با ابعاد بزرگ و تنک روبرو می‌شویم. به‌کار گرفتن روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های مذکور، هزینهٔ محاسباتی زیادی را به همراه خواهد داشت. استفاده از روش‌های تکراری کلاسیک نیز برای این‌گونه معادلات که روش ژاکوبی، گاوس-سایدل و فوق تخفیف متوالی نمونه‌ای از آن‌ها هستند، این مشکل را در پی دارد که تعداد تکرارهای الگوریتم افزایش یافته و جواب دقت زیادی ندارد. در راستای مرتفع ساختن این مشکلات روش‌های زیرفضای کرایلوف معرفی شده‌اند. یکی از روش‌های شناخته شده زیرفضای کرایلوف روش تکراری GMRES است که برای حل دستگاه‌های نامتقارن با ابعاد بزرگ و تنک بسیار کارامد و مفید است. دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر

*نویسنده مسئول alireza_1038@yahoo.com

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

می‌گیریم که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد است و مقادیر $b \in \mathbb{R}^n$ و $x \in \mathbb{R}^n$ هستند. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد [۸]. طبق قضیه کیلی- همیلتون داریم $q(A) = 0$. از نامنفرد بودن A نتیجه می‌گیریم اگر $q(\lambda)$، $a_0 = \det(A) \neq 0$، از این‌رو:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I)$$

بنابراین اگر x را جواب دقیق دستگاه در نظر بگیریم، داریم:

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \ldots + a_1 b) \in \operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$$

تعریف: به‌ازای بردار $b \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، زیرفضای کرایلوف k-بعدی $k_k(A, r_0)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$k_k(A, r_0) = \operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت بردارهای زیرفضای کرایلوف مستقل خطی است زیرا:

$$A^{-1}b = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \ldots + a_1 b) \in \operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$$

پس هر جواب دستگاه در $\operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$ واقع است. از این‌رو، می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j b \neq 0 \qquad \forall(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$$

نتیجه حاصل شده نشان می‌دهد، زیرفضای کرایلوف مستقل خطی است. برای محاسبهٔ x_k از روش‌های تکراری زیرفضای کرایلوف استفاده می‌کنیم. فرض کنید x_0 یک جواب تقریبی اولیه دستگاه باشد. روش GMRES جواب تقریبی x_k را در زیر فضای $x_0 + k_k(A, r_0)$ به‌گونه‌ای پیدا می‌کند که:

$$\min_{x \in x_0 + K_k(A, r_0)} \|b - Ax\|_2 . \qquad (۱)$$

کمینه شود. بنابراین $x \in x_0 + k_k(A, r_0)$، را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j r_0, \qquad (۲)$$

و نتیجه گرفت:

$$r = b - Ax_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^{j+1} r_0, \qquad (۳)$$

در گام بعدی چند جمله‌ای $\overline{p}_k(t)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\overline{p}_k(t) = (I - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j t^{j+1}) r_0 \qquad \overline{p}_k(0) = 1,$$

سپس نتیجه می‌شود:

$$r = \overline{p}_k(A) r_0,$$

که در آن $\overline{p}_k$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k است به‌طوری‌که $\overline{p}_k(0) = 1$ است. از محاسبات قسمت‌های قبل نتیجه می‌شود:

$$\|r_k\|_2 = \|b - Ax_k\|_2 = \min_{p_k(t) \in P_k} \|p_k(A) r_0\|_2 \leq \|\overline{p}_k(A) r_0\|_2 . \qquad (۴)$$

در آن $\overline{p}_k \in P_k$ و r_k بردار باقی‌مانده تکرار kام روش GMRES است [۹]. روش GMRES جواب تقریبی x_k را در

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

زیر فضای $x_0 + k_k(A, r_0)$ به‌گونه‌ای پیدا می‌کند که مسئله کم‌ترین مربعات خطی (۱) کمینه شود. ابتدا فرض می‌کنیم ماتریس:

$$Q_k = [q_1, q_2, \ldots, q_k], \tag{۵}$$

که ستون‌های آن به‌وسیلهٔ الگوریتم آرنولدی[1] [۱۰] محاسبه شده یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای کرایلوف $k_k(A, r_0)$ باشد. از این‌رو برای هر بردار $x_k - x_0 \in k_k(A, r_0)$ بردار $y_k \in \mathbb{R}^k$ای یافت می‌شود که:

$$x_k = x_0 + Q_k y_k, \tag{۶}$$

هم‌چنین فرآیند آرنولدی رابطهٔ $AQ_k = Q_{k+1}H_{k+1,k}$ را نتیجه می‌دهد. با فرض این‌که $\beta = \|r_0\|$ و $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$ داریم:

$$\begin{aligned} \min_{y\in\mathbb{R}^k} \|b - A(x_0 + Q_k y_k)\|_2 &= \min_{y\in\mathbb{R}^k} \|r_0 - AQ_k y_k\|_2 \\ &= \min_{y\in\mathbb{R}^k} \|\beta\xi - H_{k+1,k} y_k\|_2 . \end{aligned} \tag{۷}$$

بر اساس رابطهٔ (۷) مشاهده می‌شود که بردار $y_k \in \mathbb{R}^k$ جواب مسئله کم‌ترین مربعات خطی است. اکنون با استفاده از روش های مختلف می‌توان مسئلهٔ (۷) را حل کرده و بردار y_k را به‌دست آورد. در واقع می‌توان گفت سرعت هم‌گرایی روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی تحت تأثیر عدد حالت ماتریس ضرایب است. بنابراین برای تسریع سرعت هم‌گرایی روش‌های زیرفضای کرایلوف می‌توان از ماتریس‌های پیش‌شرط‌ساز استفاده کرد. ماتریس پیش‌شرط‌ساز ماتریسی است که دستگاه معادلات خطی را به دستگاه هم‌ارزی تبدیل می‌کند که از عدد حالت کم‌تری نسبت به دستگاه اولیه برخوردار باشد [۱۱]، [۱۲]. در این مقاله معادلهٔ انتشار-هم‌رفت کسری با مشتق مرتبهٔ کسری روی مکان بررسی شد، ابتدا با استفاده از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته[2] [۱۳]، [۱۴] و سپس با روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون[3] کسری [۱۵] گسسته‌سازی می‌شود، در ادامه پایداری و سازگاری روش تفاضل متناهی بر پایهٔ تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته بحث شده است، که مشابه روش داده شده در [۱۵] است. در این مقاله از ماتریس پیش‌شرط‌سازی که رانگ لین و همکارانش برای حل معادلهٔ انتشار کسری معرفی کرده‌اند [۱۸]، برای حل معادلهٔ انتشار همرفت کسری استفاده می‌کنیم. روش GMRES پیش‌شرط‌ساز شده، برای حل دستگاه معادلات جبری به‌دست آمده مطرح می‌شود [۱۶]. در پایان با هدف تأیید نتایج نظری، با ارائهٔ یک مثال روش GMRES پیش‌شرط‌ساز شده را آزمایش می‌کنیم و ملاحظه می‌شود که نتایج عددی نشان از کارایی روش GMRES پیش‌شرط‌ساز شده دارند.

معادله انتشار-هم رفت کسری

معادله انتشار-هم رفت کسری یک بعدی زیر را با شرایط اولیه-مرزی داده شده در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -v(x,t)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + d_+(x,t)\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} + d_-(x,t)\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha} \\ \qquad +s(x,t), \qquad x_L \le x \le x_R, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x_L \le x \le x_R, \\ u(x_L,t) = 0, \qquad u(x_R,t) = 0, \qquad t > 0, \end{cases} \tag{۸}$$

1.Arnoldi
2. Shifted Grünwald-Letnikov
3. Crank-Nicholson

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

که در آن $s(x,t)$ منشأ اولیه، $1<\alpha<2$، $d_{\pm}(x,t)\geq 0$ ضرایب انتشار و $v(x,t)\geq 0$ راندگی از فرایند است و $u_0(x)$، $u(x_L,t)$، $u(x_R,t)$ به‌ترتیب شرایط اولیه و مرزی هستند.

مشتق کسری راست و چپ گرانوالد-لتنیکوف از مرتبه α به‌ترتیب برابراند با:

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{x_R-x}{h}\right]}g_k^{(\alpha)}u(x+kh,t), \tag{۹}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{x-x_L}{h}\right]}g_k^{(\alpha)}u(x-kh,t), \tag{۱۰}$$

ضرایب گرانوالد-لتنیکوف هستند که بدین‌صورت تعریف $g_k^{(\alpha)}$ تابع جزء صحیح و $[.]$ طول گام، h که در آن می‌شوند:

$$g_k^{(\alpha)}=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1);\qquad k=1,2,\cdots. \tag{۱۱}$$

ضرایب $g_k^{(\alpha)}$ به‌طور بازگشتی بدین‌صورت قابل محاسبه هستند:

$$g_0^{(\alpha)}=1,\qquad g_k^{(\alpha)}=(1-\frac{\alpha+1}{k})g_{k-1}^{(\alpha)}. \tag{۱۲}$$

یک برش مستقیم از روابط (۹) و (۱۰) در یک روش تفاضل متناهی ناپایداری ایجاد می‌کند. به‌همین دلیل از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته بدین‌صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x_n,t_m)}{\partial_{+}x^{\alpha}}=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n+1}g_k^{(\alpha)}u_{n-k+1}^{m}+O(h), \tag{۱۳}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x_n,t_m)}{\partial_{-}x^{\alpha}}=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{N-n+1}g_k^{(\alpha)}u_{n+k-1}^{m}+O(h). \tag{۱۴}$$

لم ۱: فرض کنید $1<\alpha<2$ و $g_j^{(\alpha)}$ با استفاده از رابطهٔ (۱۱) تعریف شده باشد. در این‌صورت:

الف) $g_0^{(\alpha)}=1,\qquad g_1^{(\alpha)}=-\alpha<0,\qquad g_2^{(\alpha)}>g_3^{(\alpha)}>\ldots>0,$

ب) $\sum_{j=0}^{\infty}g_j^{(\alpha)}=0,\qquad \sum_{j=0}^{n}g_j^{(\alpha)}<0,\qquad$ برای $n\geq 1,$

ج) $g_j^{(\alpha)}=O(j^{-(\alpha+1)})$.

برهان [۱۳]: با استفاده از $g_j^{(\alpha)}=(-1)^j\binom{\alpha}{j}$ واضح است که:

$$g_0^{(\alpha)}=1,\qquad g_1^{(\alpha)}=-\alpha. \tag{۱۵}$$

هم چنین با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۱۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$g_2^{(\alpha)}>g_3^{(\alpha)}>\ldots>0$$

ضرایب $g_j^{(\alpha)}$ می‌توانند به‌عنوان ضرایبی از سری توان برای $(1-z)^{\alpha}$ به‌صورت (۱۶) در نظر گرفته شوند:

$$(1-z)^{\alpha}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}z^j=\sum_{j=0}^{\infty}g_j^{(\alpha)}z^j. \tag{۱۶}$$

اگر $z=1$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty}g_j^{(\alpha)}=0. \tag{۱۷}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

از طرفی:

$$\sum_{j=0}^{n} g_j^{(\alpha)} < \sum_{j=0}^{n} g_j^{(\alpha)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} g_j^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(\alpha)}. \qquad (۱۸)$$

از روابط (۱۸- ۱۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{j=0}^{n} g_j^{(\alpha)} < 0. \qquad (۱۹)$$

ج) با استفاده از فرمول استرلینگ [۱۹]:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x},$$

و

$$g_j^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)},$$

داریم:

$$\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \sim \frac{\sqrt{2\pi(j-1-\alpha)}(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)} e^{-(j-1-\alpha)}}{\sqrt{2\pi j} j^j e^{-j}}$$
$$= e^{\alpha+1} \sqrt{\frac{j-1-\alpha}{j}} \frac{(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)}}{j^j},$$

در نتیجه:

$$j^{\alpha+1} \frac{(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)}}{j^j} = (1-\frac{\alpha+1}{j})^j (\frac{j}{j-1-\alpha})^{\alpha+1} \to e^{-\alpha-1},$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \sim j^{-\alpha-1}. \qquad (۲۰)$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون کسری

بازهٔ $[x_L, x_R]$ را به N زیربازهٔ با طول گام مکانی h و بازهٔ $[0,T]$ را به M زیربازهٔ با طول گام زمانی Δt افراز می‌کنیم . بنابراین داریم:

$$h = \frac{x_R - x_L}{N}, \qquad x_n = x_L + nh; \qquad n = 0,1,2,\ldots,N. \qquad (۲۱)$$

و

$$\Delta t = \frac{T}{M}, \qquad t_m = m\Delta t; \qquad m = 0,1,2,\ldots,M. \qquad (۲۲)$$

شبکه عمومی نقاط مذکور را که عبارت است از (x_n, t_m) در نظر می‌گیریم و معادلهٔ دیفرانسیل را در این شبکه نقاط گسسته می‌سازیم. برای آسانی کار فرض می‌کنیم:

$$u_n^{(m)} = u(x_n, t_m), \qquad d_{\pm,n}^{(m)} = d_{\pm}(x_n, t_m), \qquad (۲۳)$$

$$s_n^{(m+1/2)} = s(x_n, (t_m + t_{m+1})/2), \qquad v_n^{(m)} = v(x_n, t_m). \qquad (۲۴)$$

برای گسسته‌سازی مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ به‌ترتیب از تقریب تفاضل پس‌رو نسبت به مکان و تقریب تفاضل

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

مرکزی با گام زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ نسبت به زمان استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$\frac{\partial u(x_n,t_m)}{\partial x}=\frac{u_n^{(m)}-u_{n-1}^{(m)}}{h}+O(h), \tag{۲۵}$$

$$\frac{\partial u(x_n,t_{m+1/2})}{\partial t}=\frac{u_n^{(m+1)}-u_n^{(m)}}{\Delta t}+O(\Delta t)^2. \tag{۲۶}$$

برای معادلهٔ (۸) شکل کلی معادله تفاضل متناهی بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{(x_n,t_{m+1/2})}&=\frac{1}{2}\left[-v(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+d_+(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha}+d_-(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}\right]_{(x_n,t_m)}\\&+\frac{1}{2}\left[-v(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+d_+(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha}+d_-(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}\right]_{(x_n,t_{m+1})}\\&+s(x,t)\Bigg|_{(x_n,t_{m+1/2})}.\end{aligned} \tag{۲۷}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۲۷-۲۶- ۲۵) و (۱۳-۱۲) و صرف نظر کردن از خطای برشی معادله تفاضلی حاصل بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned}\frac{u_n^{(m+1)}-u_n^{(m)}}{\Delta t}&+\frac{1}{2}\left[-\frac{v_n^{(m+1)}}{h}u_{n-1}^{(m+1)}+\frac{v_n^{(m+1)}}{h}u_n^{(m+1)}-\frac{d_{+,n}^{(m+1)}}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{n+1}g_j^{(\alpha)}u_{n-j+1}^{(m+1)}-\frac{d_{-,n}^{(m+1)}}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-n+1}g_j^{(\alpha)}u_{n+j-1}^{(m+1)}\right]=\\&-\frac{1}{2}\left[-\frac{v_n^{(m)}}{h}u_{n-1}^{(m)}+\frac{v_n^{(m)}}{h}u_n^{(m)}-\frac{d_{+,n}^{(m)}}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{n+1}g_j^{(\alpha)}u_{n-j+1}^{(m)}-\frac{d_{-,n}^{(m)}}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-n+1}g_j^{(\alpha)}u_{n+j-1}^{(m)}\right]+s_n^{(m+1/2)}.\end{aligned} \tag{۲۸}$$

اگر

$$u^{(m)}=(u_1^{(m)},u_2^{(m)},\ldots,u_{N-1}^{(m)})^T,\qquad s_n^{(m+1/2)}=(s_1^{(m+1/2)},s_2^{(m+1/2)},\ldots,s_{N-1}^{(m+1/2)})^T, \tag{۲۹}$$

و $D_L^{(m)}$ و $D_R^{(m)}$ ماتریس هایی قطری باشند:

$$D_L^{(m)}=\mathrm{diag}(d_{+,1}^{(m)},d_{+,2}^{(m)},\ldots,d_{+,N-1}^{(m)}),\qquad D_R^{(m)}=\mathrm{diag}(d_{-,1}^{(m)},d_{-,2}^{(m)},\ldots,d_{-,N-1}^{(m)}).$$

هم‌چنین I ماتریسی واحد از مرتبهٔ N-1، و $R^{(m)}$ و G_α به‌ترتیب ماتریس‌های دو قطری پایین و تاپ‌لیتز بدین‌صورت باشند [۲۰]، [۲۱].

$$R^{(m)}=\begin{bmatrix}v_1^{(m)}&0&0&\cdots&0&0\\-v_2^{(m)}&v_2^{(m)}&0&\cdots&0&0\\0&-v_3^{(m)}&v_3^{(m)}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&\cdots&-v_{N-1}^{(m)}&v_{N-1}^{(m)}\end{bmatrix},\qquad G_\alpha=\begin{bmatrix}g_1^{(\alpha)}&g_0^{(\alpha)}&0&\cdots&0&0\\g_2^{(\alpha)}&g_1^{(\alpha)}&g_0^{(\alpha)}&0&\cdots&0\\\vdots&g_2^{(\alpha)}&g_1^{(\alpha)}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\g_{N-2}^{(\alpha)}&\ddots&\ddots&\ddots&g_1^{(\alpha)}&g_0^{(\alpha)}\\g_{N-1}^{(\alpha)}&g_{N-2}^{(\alpha)}&\cdots&\cdots&g_2^{(\alpha)}&g_1^{(\alpha)}\end{bmatrix}$$

رابطهٔ (۲۸) را می‌توان به‌صورت ماتریسی (۳۰) نوشت:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

$$\left[I+\frac{1}{2}A^{(m+1)}\right]u^{(m+1)}=b^{(m+1)}, \tag{۳۰}$$

که در آن

$$A^{(m+1)}=(\frac{\Delta t}{h}R^{(m+1)}-\frac{\Delta t}{h^{\alpha}}(D_{L}^{(m+1)}G_{\alpha}+D_{R}^{(m+1)}G_{\alpha}^{T})), \tag{۳۱}$$

و

$$b^{(m+1)}=(I-\frac{1}{2}A^{(m)})u^{(m)}+\Delta t s^{(m+\frac{1}{2})}, \tag{۳۲}$$

است. درایه‌های ماتریس $A^{(m+1)}$ برای $i,j=1,2,\ldots,N-1$ به‌صورت (۳۳) تعریف می‌شوند:

$$a_{i,j}^{(m+1)}=\begin{cases} r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}-\eta_i^{(m+1)})g_1^{(\alpha)}; & j=i,\\ -r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}g_2^{(\alpha)}-\eta_i^{(m+1)}g_0^{(\alpha)}); & j=i-1,\\ -\xi_i^{(m+1)}g_0^{(\alpha)}-\eta_i^{(m+1)}g_2^{(\alpha)}; & j=i+1,\\ -\xi_i^{(m+1)}g_{i-j+1}^{(\alpha)}; & j<i-1,\\ -\eta_i^{(m+1)}g_{j-i+1}^{(\alpha)}; & j>i+1. \end{cases} \tag{۳۳}$$

که در آن می‌یابیم:

$$\eta_i^{(m+1)}=\frac{d_{-,i}^{(m+1)}\Delta t}{h^{\alpha}},\ \xi_i^{(m+1)}=\frac{d_{+,i}^{(m+1)}\Delta t}{h^{\alpha}},\quad r_i^{(m+1)}=\frac{v_i^{(m+1)}\Delta t}{h},$$

واضح است که برای $i\neq j$، $a_{i,j}^{(m+1)}\leq 0$. با استفاده از لم ۱ و رابطه (۳۳) خواهیم داشت [۲۲]:

$$\begin{aligned} &a_{i,i}^{(m+1)}-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{N-1}\left|a_{i,j}^{(m+1)}\right|\\ &=r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}+\eta_i^{(m+1)})g_1^{(\alpha)}-(r_i^{(m+1)}+\xi_i^{(m+1)}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq 1}}^{i+1}g_k^{(\alpha)}+\eta_i^{(m+1)}\sum^{N-i+1}g_k^{(\alpha)})\\ &>r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}+\eta_i^{(m+1)})g_1^{(\alpha)}-r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}+\eta_i^{(m+1)})\sum_{\substack{k=0\\ k\neq 1}}^{\infty}g_k^{(\alpha)}\\ &=r_i^{(m+1)}-(\xi_i^{(m+1)}+\eta_i^{(m+1)})g_1^{(\alpha)}-r_i^{(m+1)}+(\xi_i^{(m+1)}+\eta_i^{(m+1)})g_1^{(\alpha)}=0. \end{aligned} \tag{۳۴}$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود ماتریس ضرایب دستگاه (۳۰) یک ماتریس قطر غالب سطری اکید است. از این‌رو ماتریس معکوس‌پذیر و دستگاه (۳۰) جواب یکتا دارد.

تحلیل پایداری

در این بخش قضیه‌ای را در راستای پایداری معادله انتشار-هم رفت کسری مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۱: روش تفاضل متناهی (۳۰) بر پایه تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته به‌صورت غیرمشروط پایدار است.

برهان: فرض می کنیم λ یک مقدار ویژه ماتریس A و $V=(v_1,v_2,\ldots,v_{N-1})$ بردار ویژه متناظر با آن باشد. اگر $|v_k|=\max_{1\leq i\leq N-1}|v_i|$ فرض شود آن‌گاه:

$$\lambda-a_{kk}=\sum_{j=0,j\neq 1}^{N-1}a_{kj}V_j/V_k \tag{۳۵}$$

با گرفتن قدر مطلق از رابطهٔ (۳۵) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

$$\left|\lambda - a_{kk}\right| = \left|\sum_{j=0, j\neq 1}^{N-1} a_{kj}\, v_j / v_k\right| \qquad \xrightarrow{\left|v_j/v_k\right| \le 1} \qquad \left|\lambda - a_{kk}\right| \le \sum_{j=0, j\neq 1}^{N-1} \left|a_{kj}\right|$$

از این‌رو:

$$\sum_{j=0, j\neq 1}^{N-1} \left|a_{kj}\right| \le r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)}, \tag{۳۶}$$

از محاسبه‌های قسمت‌های قبل نتیجه می‌شود:

$$0 \le \lambda \le 2(r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)}),$$

با توجه به این‌که $g_1^{(\alpha)} < 0$ است، نتیجه می‌گیریم $(1-\lambda/2) < 1$. بنابراین $(1-\lambda/2)(1+\lambda/2)^{-1} < 1$. از این‌رو، شعاع طیفی $\left(I + \frac{A}{2}\right)^{-1}\left(I - \frac{A}{2}\right)$ کم‌تر از یک است در نتیجه روش تفاضل متناهی (۳۰) به‌صورت غیرمشروط پایدار است.

تبصره: می‌دانیم روش سازگار است اگر هریک از روابط (۱۴ - ۱۳) و (۲۶ - ۲۵)، سازگار باشد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت این روش سازگار با یک خطای برشی موضعی $O(h + (\Delta t)^2)$ به ازای هر h و Δt دلخواه است. بنابراین بر اساس نظریه هم‌ارزی لکس [۲۳] نتیجه می‌شود روش تفاضل متناهی (۳۰) همگرا است.

ماتریس پیش‌شرط ساز

در این بخش هدف معرفی ماتریس پیش‌شرط‌سازی است که رانگ لین و همکارانش معرفی کرده‌اند [۱۸]. برای رسیدن به این هدف ویژگی‌هایی از ماتریس G_α را مطرح و اثبات می‌کنیم.

تعریف [۹]: ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$،

L-ماتریس گفته می‌شود اگر به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ رابطهٔ $a_{ii} > 0$ و به‌ازای $i \neq j$ رابطهٔ $a_{ij} \le 0$ برقرار باشد، M-ماتریس گفته می‌شود اگر L-ماتریسی نامنفرد با $A^{-1} \ge 0$ باشد.

لم ۲: ماتریس $-G_\alpha$ یک M–ماتریس است.

برهان: فرض کنید $E = -G_\alpha$. به‌وضوح ماتریس E را می‌توان به‌صورت (۳۹) نوشت:

$$\begin{aligned} E &= D - (D - E) = D(I - (I - D^{-1}E)), \\ B &= I - D^{-1}E, \end{aligned} \tag{۳۹}$$

که در آن D بخش قطری ماتریس $-G_\alpha$ است. با توجه به این‌که:

$$(I - D^{-1}E)x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (D - E)x = \lambda D x, \tag{۴۰}$$

از این‌رو،

$$\lambda g_1^{(\alpha)} x_i = g_1^{(\alpha)} x_i - \sum_{j=0}^{N-1} g_j^{(\alpha)} x_j; \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{۴۱}$$

بنابراین:

$$\left| - \sum_{j=0, j1}^{N-1} g_j^{(\alpha)} x \right| = \left|\lambda g_1^{(\alpha)} x_i\right|, \tag{۴۲}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

$$\left|\lambda\right|\left|g_1^{(\alpha)}\right|\left|x_j\right| \le \sum_{j=0,j\neq 1}^{N-1}\left|g_j^{(\alpha)}\right|\left|x_j\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda\right| \le \frac{\sum_{j=0,j\neq 1}^{N-1}\left|g_j^{(\alpha)}\right|}{\left|g_1^{(\alpha)}\right|}, \tag{۴۳}$$

از لم ۱ خواهیم داشت:

$$\left|g_1^{(\alpha)}\right| > \sum_{j=0,j\neq i}^{n} g_j^{(\alpha)}$$

بنابراین E یک ماتریس قطری غالب سطری اکید است. نتیجه می‌شود $\rho(I-D^{-1}E)<1$ یا $\rho(B)<1$ داریم:

$$I-D^{-1}E = B \quad \Rightarrow \quad I-B = D^{-1}E, \tag{۴۴}$$

$$(D^{-1}E)^{-1} = (I-B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i \ge 0, \tag{۴۵}$$

$$\left(I-B\right)^{-1} = E^{-1}D \ge 0. \tag{۴۶}$$

رابطهٔ (۴۶) نشان می‌دهد:

$$E^{-1} = -G_\alpha \ge 0. \tag{۴۷}$$

از این‌که $\left[-G_\alpha\right]$ یک L–ماتریس و $\left[-G_\alpha\right]^{-1} \ge 0$ است، نتیجه می‌گیریم که یک M-ماتریس است.

با در نظر داشتن اینکه ماتریس قطری یک انتخاب مناسب برای M-ماتریس‌ها است [۲۴]، برای به‌دست‌آوردن یک ماتریس پیش‌شرط ساز، G_α را به‌صورت (۴۸) تجزیه می‌کنیم [۱۸]:

$$G_\alpha = G_{\alpha,k} + (G_\alpha - G_{\alpha,k}), \tag{۴۸}$$

که در آن داریم:

$$G_{\alpha,k} = \begin{bmatrix} g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} & & & & \\ \vdots & g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} & & & \\ g_k^{(\alpha)} & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & g_0^{(\alpha)} \\ & & & g_k^{(\alpha)} & \cdots & g_1^{(\alpha)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & g_{k+1}^{(\alpha)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sum_{j=k+1}^{N-1} g_j^{(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

$G_{\alpha,k}$ مجموعی از یک ماتریس با پهنای نوار k+1 شامل قطرهای مرکزی از G_α و یک ماتریس قطری است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد [۱۸]:

الف) $-G_{\alpha,k}$ یک M- ماتریس است.

ب) $G_{\alpha,k}$ یک ماتریس قطری غالب سطری اکید است.

ج) از $g_k^{(\alpha)} = O(k^{-(\alpha+1)})$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left\|G_\alpha - G_{\alpha,k}\right\|_\infty = O(k^{-\alpha}).$$

بنابراین ماتریس $A^{(m+1)}$ را می‌توان به دو بخش زیر تجزیه کرد:

$$A^{(m+1)} = A_k^{(m+1)} + B_k^{(m+1)}, \tag{۴۹}$$

که در آن می‌یابیم:

$$A_k^{(m+1)} = \left(\frac{\Delta t}{h}R^{(m+1)} - \frac{\Delta t}{h^\alpha}(D_L^{(m+1)}G_{\alpha,k} + D_R^{(m+1)}G_{\alpha,k}^T)\right), \qquad B_k^{(m+1)} = A^{(m+1)} - A_k^{(m+1)}. \tag{۵۰}$$

اگر ماتریس $(I-A_k^{(m+1)})$ تقریبی از ماتریس $(I-A^{(m+1)})$ باشد. خطای نسبی آن عبارت است از:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

$$\frac{\left\|(I-A^{(m+1)})-(I-A_k^{(m+1)})\right\|_\infty}{\left\|(I-A^{(m+1)})\right\|_\infty} \le \frac{\frac{\Delta t}{2h^\alpha}\left\|D_L^{(m+1)}(G_\alpha - G_{\alpha,k}) + D_R^{(m+1)}(G_\alpha - G_{\alpha,k})^T\right\|_\infty}{\frac{\Delta t}{2h^\alpha}\left\|D_L^{(m+1)}G_\alpha + D_R^{(m+1)}G_\alpha^T\right\|_\infty} = O(k^{-\alpha}).$$

مشاهده می‌شود خطای نسبی بین $(I-A^{(m+1)})$ و $(I-A_k^{(m+1)})$، وقتی k به اندازه کافی بزرگ باشد، خیلی کوچک است. بنابراین $P_k^{(m+1)} = (I-A_k^{(m+1)})$ را می‌توان به‌عنوان یک ماتریس پیش‌شرط ساز کارا در نظر گرفت.

روش GMRES پیش‌شرط ساز شده

در سال ۱۹۸۶ روش GMRES به‌وسیلهٔ سعد و شولتز[1] به‌عنوان یکی از روش‌های زیرفضای کرایلوف ارائه شد[۲۵]. چنان‌که گفته شد سرعت همگرایی روش‌های تکراری به عدد حالت ماتریس ضرایب یعنی $C^{(m+1)} = (I-A^{(m+1)})$ بستگی دارد. اگر $C^{(m+1)}$ بد وضع باشد، ممکن است سرعت همگرایی روش کند بوده، از این‌رو، برای افزایش سرعت همگرایی روش‌های زیرفضای کرایلوف می‌توان از روش‌های پیش‌شرط سازی استفاده کرد این امر باعث افزایش سرعت همگرایی خواهد شد. دستگاه معادلات خطی با استفاده از روش‌های پیش‌شرط سازی به دستگاه‌های پیش‌شرط ساز شده تبدیل می‌شوند. روش‌های متفاوتی برای پیش‌شرط سازی این دستگاه‌ها وجود دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان بدین‌صورت اشاره کرد که به‌ترتیب پیش‌شرط سازی از راست، دوطرفه و چپ نامیده می‌شود بنابراین به‌جای حل دستگاه معادلات (۳۱) یکی از سه دستگاه هم ارز زیر را حل می‌کنیم:

$$C^{(m+1)}(P_k^{(m+1)})^{-1}v^{(m+1)} = b^{(m+1)}, \quad u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})^{-1}v^{(m+1)}, \tag{۵۱}$$

$$(P_k^{(m+1)})_L^{-1}C^{(m+1)}(P_k^{(m+1)})_R^{-1}v^{(m+1)} = b^{(m+1)}, \quad u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})_R^{-1}v^{(m+1)}. \tag{۵۲}$$

$$(P_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})^{-1}b^{(m+1)}. \tag{۵۳}$$

باید توجه داشت که نیازی به محاسبهٔ ماتریس $(P_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}$، نیست. کافی است $(P_k^{(m+1)})x^{(m+1)} = r^{(m+1)}$ را حل‌کنیم. اکنون از روش GMRES برای حل دستگاه (۵۳) استفاده می‌کنیم. الگوریتم این روش برای یافتن این جواب بدین‌صورت خواهد بود [۱۶]:

الگوریتم روش GMRES پیش‌شرط ساز شده

1. $u^{(m+1)} = u_0$
2. compute $r_0 = p_k^{(m+1)}(b^{(m+1)} - C^{(m+1)}u^{(m+1)})$, $\beta = \|r_0\|_2$, and $q_1 = \frac{r_0}{\beta}$
3. For $j = 1, 2, \ldots, k$
4. $\quad q_j = (p_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}q_j$
5. $\quad$ For $i = 1:j$
6. $\quad\quad h_{ij} = q_i^T q_{j+1}$
7. $\quad\quad q_{j+1} = q_{j+1} - hq_i$
8. $\quad$ end
9. $h_{ij} = \|q_{j+1}\|_2$
10. $q_{j+1} = \frac{q_{j+1}}{h_{j,j+1}}$

1 Saad and Schult

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

11. end
12. Define the $(k+1)\times k$ Hessenberge Matrix $H_{k+1,k}\{h_{ij}\}$ and $Q_{k+1}=[Q_k, q_{k+1}]$
13. Compute y_k, the minimizer of $\|\beta e_1 - H_{k+1,k}y\|_2$, and $u^{(m+1)} = u_0^{(m)} + Q_k y_k$

نتایج عددی

برای اثبات کارایی روش GMRES پیش‌شرط ساز شده، این روش را برای معادله انتشار-هم‌رفت کسری بدین‌صورت به‌کار می‌بریم.

مثال ۱: معادلهٔ انتشار-هم‌رفت کسری (۸) را با $\alpha = 1.8$ و ضرایب انتشار چپ و راست:

$$d_+(x,t) = \Gamma(1.2)x^{1.8}, \qquad d_-(x,t) = \Gamma(1.2)x^{1.8},$$

در بازهٔ مکانی $(x_L, x_R) = (0,2)$ و بازهٔ زمانی $[0,T] = [0,1]$، با منشأ اولیه، راندگی از فرایند و شرط اولیه بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$s(x,t) = -32e^{-t}[x^2 + (2-x)^2 + 0.125x^2(2-x)^2,$$
$$-2.5(x^3 + (2-x)^3) + \frac{25}{22}(x^4 + (2-x)^4)],$$
$$v(x,t) = 0.25x,$$
$$u_0(x) = 4x^2(2-x)^2.$$

جواب دقیق این معادله عبارت است از:

$$u(x,t) = 4e^{-t}x^2(2-x)^2.$$

نتایج با استفاده از MATLABR2010a روی لپ‌تاپ msi با مشخصات core(TM)i3-4000 M CPU, 2.40 GHz , 4.00 RAM Intel(R) به‌دست آمده است. دستگاه حاصل را به‌ازای مقادیر مختلف N و M روش GMRES و پیش‌شرط ساز شده آن حل کرده و به نتایج مطلوب که در جدول ۱، ۲ و ۳ درج شده است، دست یافته‌ایم. در جدول ۱ میانگین تعداد تکرارها و بیشینهٔ خطای بین جواب‌های دقیق و عددی به‌دست آمده در آخرین گام نشان داده شده است. در جدول ۲ زمان محاسبات و در جدول ۳ عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه (۳۰) و (۵۳) نشان داده شده است. بردار اولیه را بردار صفر و شرط توقف را $\|r_k\| \le 10^{-6}$ فرض کرده‌ایم. هم‌چنین در شکل ۱ و ۲ نمودار منحنی نمایش همگرایی GMRES و PGMRES به‌ازای $N = 2^6$ و $M = 2^5$ نشان داده شده است.

جدول ۱. میانگین تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی معادلهٔ انتشار-هم رفت کسری

N	M	GMRES	PGMRES	Error
$۲^۴$	$۲^۳$	۱۵	۳	۴/۲۸۱۸e-۴
$۲^۵$	$۲^۴$	۲۸/۳۳	۳	۱/۶۶۱۹e-۵
$۲^۶$	$۲^۵$	۴۳/۸۴	۴	۱/۲۵۰۵e-۵
$۲^۷$	$۲^۶$	۶۸/۳	۴/۱۱	۱/۱۹۰۶e-۵

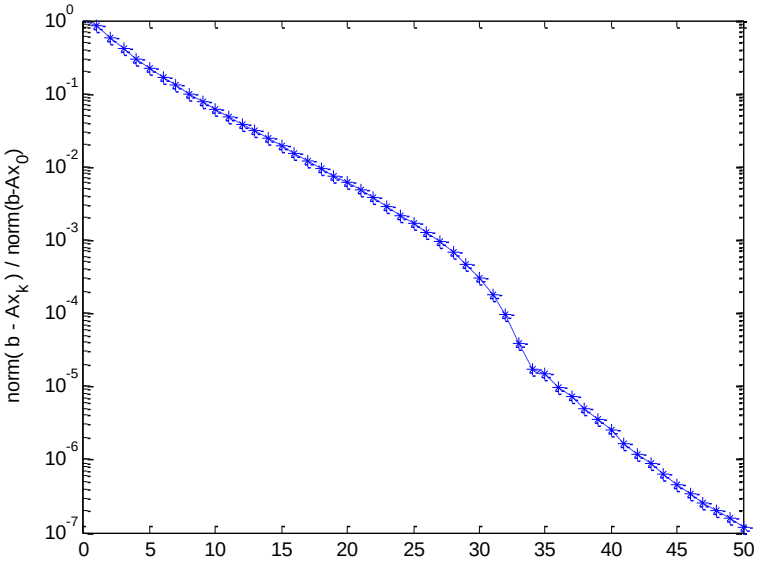
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

جدول۲. زمان لازم برای همگرایی معادلهٔ انتشار-هم رفت کسری

N	M	GMRES	PGMRES
$۲^۴$	$۲^۳$	۰/۲۲	۰/۰۱۸
$۲^۵$	$۲^۴$	۱/۲۳	۰/۰۸۲
$۲^۶$	$۲^۵$	۱/۲۶	۰/۶۹
$۲^۷$	$۲^۶$	۱۶/۹۸	۱۰/۸۲

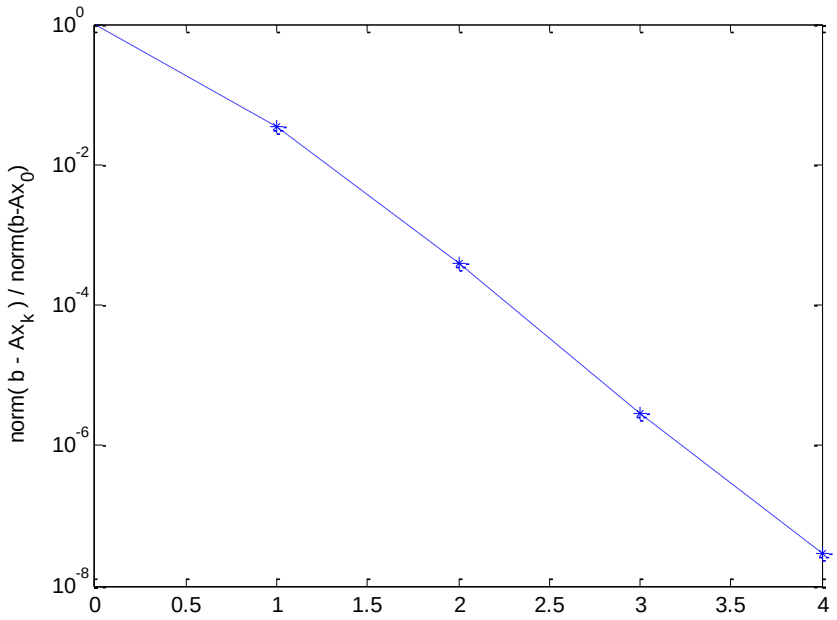
جدول۳. عدد حالت ماتریس ضرایب برای معادله انتشار-هم رفت کسری

N	M	$\kappa(A^{(1)})$	$\kappa((P_{\wedge}^{(1)})^{-1}A^{(1)})$
$۲^۴$	$۲^۳$	۱۷/۲۴۲۲	۱/۰۱۴۷
$۲^۵$	$۲^۴$	۳۷/۱۹۴۳	۱/۰۴۲۹
$۲^۶$	$۲^۵$	۷۳/۸۰۶۲	۱/۰۷۲۸
$۲^۷$	$۲^۶$	۱۳۸/۸۰۶۴	۱/۱۰۱۷



شکل ۱. نمودار همگرایی روش GMRES به ازای $N = ۲^۶$ و $M = ۲^۵$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]



شکل۲. نمودار همگرایی روش PGMRES به ازای $N = ۲^۶$ و $M = ۲^۵$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله انتشار-هم رفت کسری بررسی شد. برای حل عددی آن از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته و روش تفاضل‌متناهی کرانک-نیکلسون کسری استفاده کردیم، سپس روش GMRES برای حل معادله جبری به‌دست آمده مطرح شد. جدول‌های مربوط به مثال بالا، نتیجه می‌دهند که روش GMRES پیش‌شرط ساز شده برای حل دستگاه‌های نامتقارن کارا و مفید است، هم‌چنین نتایج عددی نشان می‌دهند که استفاده از پیش‌شرط ساز باعث شده عدد حالت ماتریس ضرایب کوچک‌تر و در نتیجه تعداد تکرارها و زمان محاسبات کاهش یافته و سرعت همگرایی افزایش پیدا کند.

منابع

1. Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J., "Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence", Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 1100-1103.
2. Zaslavsky G. M., Stevens D., Weitzner H., "Self-similar transport in incomplete chaos", Phys. Rev. E, 48 (1993) 1683-1694.
3. Benson D., Wheatcraft S. W., Meerschaert M. M., "Application of a fractional advection-dispersion equation", Water Resour. Res., 36 (2000) 1403-1413.
4. Benson D., Wheatcraft S.W., Meerschaert M.M., "The fractional-order governing equation of Lévy motion", Water Resour. Res., 36 (2000) 1413-1423.
5. Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M.M., aeumer B. B., " Multiscaling fractional advection–dispersion equations and their solutions", Water Resour. Res., 39 (2003) 1022-1032.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]

6. Chaves A., "Fractional diffusion equation to describe Lévy flights", Phys. Lett. A, 239 (1998) 13-16.

7. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M.F., "Stochastic pathways to anomalous diffusion", Phys. Rev. A,35 (1987) 3081-3085.

۸. خجسته سالکویه داود، "روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی"، انتشارات موج چهارم (۱۳۹۴).

۹. حجاریان مسعود، "نخستین درس در جبرخطی عددی"، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی (۱۳۹۴).

10. Bai Z.-Z., "Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems", J. Comput. Appl. Math., 283 (2015) 71-78.

11. Broyden C. G., Vespucci M. T., "Krylov Solvers for Linear Algebraic Systems", San Diego, ELSEVIER Inc (2004).

12. Chen K., "Matrix Preconditioning Techniques and Applications", Cambridge University Press (2005).

13. Meerschaert M. M., Tadjeran C., "Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations", J. Comput. Appl. Math., 172 (2004) 65-77.

14. Meerschaert M. M., Tadjeran C., "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations", Appl. Numer. Math., 56 (2006) 80-90.

15. Su L., Wang W., Yang Z.,"Finite difference approximations for the fractional advection–diffusion equation", Phys. Lett. A, 373 (2009) 4405-4408.

16. Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", SIAM, Philadelphia (2003).

17. Podlubny I., " Fractional Differential Equations", Academic Press, New York (1999).

18. Lin F.-R., Yang S.-W., Jin X.-Q., "Preconditioned iterative methods for fractional diffusion equation", J. Comput. Phys. 256 (2014) 109-117.

19. Wrench J. W. Jr., "Concerning Two Series for the Gamma Function", Math. Comput., 22 (1968) 617-626.

20. Chandrasekeran S., Gu M., Sun X., Xia J.,Zhu J., "A superfast algorithm for Toeplitz systems of linear equations", SIAM. J. Matrix Anal. & Appl., 29 (4) (2007) 1247-1266.

21. Golub G.H., Van Loan C. F., "Matrix Computations", third ed., The Johns Hoopkins University Press, Baltimore and London (1996).

22. Wang H., Wang K., Sircar T., "A direct O(N $\log^2$ N) finite difference method for fractional diffusion equations", J. Compute. Phys., 229 (2010) 8095-8104.

23. Lax P.D., Richtmyer R. D., "Survey of the stability of linear finite difference equations", Comm. Pure Appl. Math, 9 (1956) 267-293.

24. Axelsson O., "Iterative Solution Methods", Cambridge University Press, (1996).

25. Saad Y., Schultz M. H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput, 7 (3) (1986) 856-869.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.5.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.39]