مروری بر رده‌های عملگرهای ترکیبی

محمدرضا عظیمی

دانشگاه مراغه، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۷/۲۲ پذیرش ۹۷/۱۱/۲۸

چکیده

در این مقاله نخست به معرفی عملگر امید شرطی پرداخته، سپس رده‌های کلاسیک را برای عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزن‌دار مرور می‌کنیم. رده‌های زیادی از عملگرها روی فضای هیلبرت وجود دارند، به‌طوری‌که ضعیف‌تر از رده عملگرهای هیپونرمال هستند، مانند عملگرهای p- هیپونرمال، p- شبه‌هیپونرمال، p- پارانرمال، نرمالوئید و غیره، در این مقاله از دیدگاه نظریه اندازه، عملگرهای از نوع ترکیبی، ترکیبی وزن‌دار، الحاقی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار و تبدیلات آلوثگ تعمیم‌یافته وابسته به آنها را روی فضای $L^2(\Sigma)$ در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی برای تعلق این نوع عملگرها به هرکدام از رده‌های بالا بیان می‌شود. هم‌چنین زیرنرمال بودن عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزن‌دار نیز بررسی می‌شود. در پایان با ارائه مثال‌هایی متنوع، نشان می‌دهیم که عملگرها این رده‌ها را تفکیک می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: عملگرهای ترکیبی، امید شرطی، نرمال، زیرنرمال، هیپونرمال، ضعیف هیپونرمال.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۴۷B۳۷، ۲۰B۴۷

مقدمه

در آنالیز ریاضی در بخش نظریه عملگرها، بررسی عملگرها از سه زاویه عمده قابل تأمل است. یکی فضاهایی زیرساختی که این عملگرها روی آن فضاها تعریف می‌شوند و دیگری خاصیت‌هایی است که این عملگرها دارا هستند مانند کران‌داری، فشردگی، فردهلم بودن، برد بسته بودن، نرمال بودن، هیپونرمال بودن و غیره، و سرانجام طیف این عملگرها بررسی می‌شود. فضاهایی از توابع که عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی آن‌ها بررسی می‌شود، به سه دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱. فضاهای $L^p(\Sigma)$ که در آن $(X.\Sigma.\mu)$ یک فضای اندازه σ- متناهی است.
۲. فضاهای تابعی باناخ از توابع.
۳. فضاهای توابع موضعاً محدب.

در حالت $p=2$ فضای $L^p(\Sigma)$ یک فضای هیلبرت با ضرب درونی $\langle f.g\rangle=\int_X f\bar{g}d\mu$ است. تبدیل خطی و نامنفرد $T: X\to X$ و تابع وزن نامنفی و اندازه‌پذیر u روی X روی فضای $L^2(\Sigma)$ عملگر ترکیبی وزن‌دار با ضابطهٔ (۱) را القا می‌کند:

$$W_f=(uC_T)f := uf\circ T,\ f\in L^2(\Sigma) \qquad (۱)$$

رده‌های زیادی از عملگرها روی فضای هیلبرت $L^2(\Sigma)$ وجود دارند به‌طوری‌که ضعیف‌تر از رده عملگرهای هیپونرمال هستند مانند عملگرهای p- هیپونرمال، p- شبه‌هیپونرمال، p- پارانرمال، نرمالوئید و غیره،[۳]، [۴]، [۵]. با توجه به اهمیت و کلی‌بودن عملگرهای ترکیبی وزن‌دار $uC_\varphi=M_uC_\varphi$ که هم شامل عملگرهای ترکیبی و هم شامل عملگرهای

*نویسنده مسئول mhr.azimi@maragheh.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.1.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

ضربی است، در این مقاله از دیدگاه نظریه اندازه، عملگرهای از نوع ترکیبی وزن‌دار را روی فضای $L^2(\Sigma)$ در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی برای تعلق این نوع عملگرها به هرکدام از رده‌های بالا ارائه می‌شود. زیرنرمال بودن عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزن‌دار نیز مطالعه می‌شود. هم‌چنین با ارائه مثال‌هایی متنوع نشان داده می‌شود که این عملگرها به‌طور کامل این رده‌ها را تفکیک می‌کنند.

برای این کار، عملگر بسیار مفیدی به‌نام عملگر امید شرطی E را معرفی کرده و سپس خاصیت‌های عملگر امید شرطی تعریف شده بین فضاهای $L^p(\Sigma)$ ($p \geq 1$) را بررسی می‌کنیم.

در این مقاله فضای هیلبرت مختلط و با بعد نامتناهی با نماد H و جبر شامل تمام عملگرهای خطی و کران‌دار روی فضای هیلبرت H با نماد $\mathrm{B}(H)$ نشان داده می‌شود. هسته و برد عملگر $T \in B(H)$ به‌ترتیب با نمادهای $\mathrm{N}(T)$ و $R(T)$ نشان داده می‌شوند.

فرض کنید $(X.\Sigma.\mu)$ فضای اندازه کامل σ- متناهی و $\mathcal{A}$ زیر σ- جبر دلخواهی از Σ باشد، به‌طوری‌که $(X.\mathcal{A}.\mu)$ نیز یک فضای اندازه σ- متناهی کامل باشد. فضای متشکل از همه توابع Σ- اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X را با $L^\circ(\Sigma)$ نشان می‌دهیم (به‌طور مشابه $L^\circ(\mathcal{A})$ نشان‌دهندهٔ فضای تمام توابع $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X می‌باشد). به‌ازای $1 \leq p \leq \infty$، برای سهولت فضای $L^p(X.\mathcal{A}.\mu_{|\mathcal{A}})$ را با نماد $L^p(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم که در آن، $\mu_{|\mathcal{A}}$ تحدید اندازهٔ μ روی $\mathcal{A}$ است. هم‌چنین نرم آن با نماد $\|\cdot\|_p$ نشان داده می‌شود، به‌طوری‌که $L^p(\mathcal{A})$ یک زیرفضای باناخ $L^p(\Sigma)$ است. فضای تمام توابع Σ- اندازه‌پذیر و مختلط مقدار روی X که به‌طور اساسی کراندار هستند را با نماد $L^\infty(\Sigma)$ و نرم آن را با نماد $\|\cdot\|_\infty$ نشان می‌دهیم. برای $A \in \mathcal{A}$ مجموعه $\{S \cap A: S \in \Sigma\}$ را با نماد Σ_A نشان می‌دهیم. برای هر تابع $f \in L^\circ(\Sigma)$ محمل آن را به‌صورت $\sigma(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ تعریف می‌کنیم. تمامی مقایسه‌ها بین مجموعه‌ها و توابع، تقریباً همه‌جا در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱. نگاشت $T: X \to X$ یک *تبدیل اندازه‌پذیر* گفته می‌شود، اگر برای هر $S \in \Sigma$، $T^{-1}(S) \in \Sigma$. تبدیل *اندازه‌پذیر* T را *نامنفرد* می‌نامیم، اگر $\mu(T^{-1}(S)) = 0$، هرگاه $\mu(S) = 0$.

برای تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد T و برای هر $S \in \Sigma$ اندازه $\mu \circ T^{-1}$ به‌صورت $\mu \circ T^{-1}(S) := \mu(T^{-1}(S))$ تعریف می‌شود. به‌عبارت دیگر، $\mu \circ T^{-1}$ مطلقاً پیوسته نسبت به μ است که با نماد $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$ نشان داده می‌شود. اگر μ یک اندازه σ- متناهی باشد، آن‌گاه بنابر قضیه رادون-نیکودیم، تابع نامنفی یکتا مانند $h \in L^1(\Sigma)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\mu \circ T^{-1}(S) = \int_S h d\mu, \qquad S \in \Sigma. \qquad (۲)$$

تابع $h := \frac{d\mu \circ T^{-1}}{d\mu}$ را **مشتق رادون-نیکودیم** $\mu \circ T^{-1}$ نسبت به μ می‌نامیم.

لم ۲. [۱] اگر تبدیل $T: X \to X$ نامفرد باشد، آن‌گاه

$$h(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} |\frac{d}{dy} h(y)|. \qquad (۳)$$

هر تبدیل نامفرد T، عملگر خطی C_T از $L^p(\Sigma)$ به‌توی فضای خطی تمام توابع اندازه‌پذیر روی X، تعریف‌شده با ضابطهٔ

$$C_T f = f \circ T, \qquad f \in L^p(\Sigma) \qquad (۴)$$

القا می‌کند. در حالتی که C_T از $L^p(\Sigma)$ به‌توی $L^p(\Sigma)$ پیوسته باشد، آن‌گاه آن را یک **عملگر ترکیبی** روی $L^p(\Sigma)$ القا شده به‌وسیلهٔ T می‌نامیم. عملگر ترکیبی C_T کران‌دار است اگر و فقط اگر $h \in L^\infty(\Sigma)$ و در این حالت

$\|C_T\| = \|h\|_\infty^{\frac{1}{p}}$ [۱۹]. لازم به ذکر است که نامنفرد بودن T، خوش تعریف بودن C_T را تضمین می‌کند. برای اثبات، فرض کنید f و g دو تابع Σ- اندازه‌پذیر باشند، به‌طوری‌که تقریباً همه‌جا $f = g$. به‌عبارت دیگر، فرض کنید $\mu(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) = 0$، آن‌گاه از نامفرد بودن تبدیل T، می‌توان نوشت:

$$\mu(\{x \in X: f \circ T(x) \neq g \circ T(x)\}) = \mu \circ T^{-1}(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) \qquad (۵)$$

یعنی تقریباً همه‌جا $f \circ T = g \circ T$. در واقع نامفرد بودن T شرط لازم برای القای عملگر ترکیبی روی $L^p(\Sigma)$ به‌وسیلهٔ T است. برعکس اگر T نامنفرد نباشد، آن‌گاه عملگر ترکیبی C_T خوش‌تعریف هم نیست. برای مثال $X = [0,1]$ را با اندازه لبگ و تبدیل T به‌صورت (۶) را در نظر بگیرید.

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \qquad (۶)$$

چون $\mu(\{1\}) = 0$ و $\mu \circ T^{-1}\{1\} > 0$ از این‌رو، تبدیل T نامنفرد نیست. حال قرار دهید $f := \mathcal{X}_{[0,1)}$ و $g := \mathcal{X}_{[0,1]}$. آن‌گاه روی فضای $L^p(X.\Sigma.\mu)$ تابع‌های f و g تقریباً همه‌جا با هم برابر هستند در حالی‌که $f \circ T$ و $g \circ T$ تقریباً همه‌جا با هم برابر نیستند. بنابراین C_T خوش‌تعریف نیست. بهترین مرجع برای بررسی دقیق عملگرهای ترکیبی کتاب [۱۹] است.

عملگرهای امید شرطی روی فضای $L^p(\Sigma)$

فرض کنید $(X.\Sigma.\mu)$ یک فضای حقیقی اندازه σ- متناهی باشد و $\mathcal{A}$ یک زیر σ- جبر از Σ باشد، به‌طوری‌که $(X.\mathcal{A}.\mu)$ هم‌چنان σ- متناهی باشد. برای هر تابع نامنفی و Σ- اندازه‌پذیر f اندازه v_f روی A را با ضابطهٔ (۷) تعریف می‌کنیم.

$$v_f(A) := \int_A f d\mu_{|A}, \qquad A \in \mathcal{A} \qquad (۷)$$

که در آن $\mu_{|A}$ تحدید اندازهٔ μ روی $\mathcal{A}$ است. اندازه v_f نسبت به اندازهٔ $\mu_{|A}$ به‌طور مطلق پیوسته است و بنا بر قضیه رادون-نیکودیم، تابع نامنفی و $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر $E^{\mathcal{A}}f$ موجود است به‌طوری‌که

$$v_f(A) := \int_A E^{\mathcal{A}}f \, d\mu_A, \qquad A \in \mathcal{A}. \qquad (۸)$$

$E^{\mathcal{A}}f$، **امید شرطی** f نسبت به $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود. برای سادگی، $E^{\mathcal{A}}$ را با نماد E نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳. فرض کنید f یک تابع حقیقی‌مقدار Σ- اندازه‌پذیر باشد. گوییم f امیدپذیر شرطی نسبت به $\mathcal{A}$ است، هرگاه $\mu(B_f) = 0$ که در آن

$$B_f = \{x \in X: E(f^+)(x) = E(f^-)(x) = \infty\}. \qquad (۹)$$

اگر f مختلط مقدار باشد، f امیدپذیر شرطی است هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی f امیدپذیر شرطی باشند و امیدهای آن‌ها روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت هم‌زمان بی‌نهایت نباشد. در این حالت

$$Ef = E(Re\, f) + iE(Im\, f). \qquad (۱۰)$$

متناظر با هر زیر σ- جبر متناهی $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$، عملگر $E^{\mathcal{A}} = E$ موسوم به عملگر امید شرطی، تعریف‌شده روی فضای توابع اندازه‌پذیر نامنفی و یا روی فضای $L^p(\Sigma)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ با شرایط زیر به‌طور یکتا معین می‌شود.

- $E(f)$ یک تابع $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر است.
- برای هر $A \in \mathcal{A}$، اگر $\int_A f d\mu$ موجود باشد، آن‌گاه $\int_A f d\mu = \int_A E(f) d\mu$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.1.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

این عملگر، ابزار اصلی است. از این‌رو،؛ برخی از خواص مهم آن را در زیر می‌آوریم [۱۸]. در موارد زیر فرض بر این است که توابع f، g و ... اعضایی از دامنه تعریف عملگر امید شرطی E هستند.

۱. اگر f و g حقیقی مقدار با شرط $g \leq f$ باشد، آن‌گاه $E(f) \leq E(g)$.

۲. اگر a تابع مختلط مقدار و $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $E(af) = aE(f)$.

۳. اگر $f \in L^p(\Sigma)$، $g \in L^q(\Sigma)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آن‌گاه $E|fg| \leq (E|f|^p)^{\frac{1}{p}} (E|g|^q)^{\frac{1}{q}}$.

۴. $(E|f|)^p \leq E|f|^p$.

۵. $E(1) = 1$.

۶. $|E(f)|^p \leq E|f|^p$.

۷. $E|f - E(f)|^2 = \mathrm{E}|f|^2 - |E(f)|^2$.

۸. $\mathrm{E}|f|^2 = |E(f)|^2$ اگر و تنها اگر f، $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر باشد.

۹. اگر $f > 0$، آن‌گاه $E(f) > 0$.

۱۰. اگر $f \geq 0$، آن‌گاه $E(f) \geq 0$ و $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$.

خواص (۲) و (۵) مستلزم این است که E خودتوان بوده است و به‌عنوان یک عملگر روی $L^p(\Sigma)$، داریم $E\big(L^p(\Sigma)\big) = L^p(X.\mathcal{A}.\mu_{|A})$. بنابراین E عملگر همانی I است اگر و تنها اگر $\mathcal{A} = \Sigma$. اگر قرار دهیم $\mathcal{A} = T^{-1}(\Sigma)$، به‌آسانی ملاحظه می‌شود که برای هر تابع Σ- اندازه‌پذیر نامنفی f یا برای هر $f \in L^p(\Sigma)$، یک تابع Σ- اندازه‌پذیر مانند g وجود دارد، به‌طوری‌که $E(f) = g \circ T$. با فرض $\sigma(g) \subseteq \sigma(h)$، تابع g به‌طور منحصر به فرد تعیین می‌شود. به‌طور معمول تابع g را به‌صورت $g = E(f) \circ T^{-1}$ نشان می‌دهند. البته نماد مذکور لزوماً مستلزم وارون‌پذیری T نیست. برای بررسی‌های عمیق خواص مربوط به E، به‌عنوان یک ابزار قوی در نظریه آمار و احتمال، خصوصاً نظریه مارتینگلها، می‌توان به مراجع [۱۰] و [۱۸] اشاره کرد.

تعریف ۴. برای $1 \leq p \leq \infty$، نگاشت $E: L^p(\Sigma) \to L^p(\mathcal{A})$، با ضابطهٔ $f \to E(f)$، عملگر امید شرطی نسبت به $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود. E یک عملگر خطی و انقباض است و در حالت خاص $p = 2$، یک تصویر متعامد از $L^2(\Sigma)$ به روی $L^2\left(\mathcal{A}\right)$ است.

قرارداد: از این به بعد در سراسر مقاله، فرض بر این است که $\mathcal{A} = T^{-1}(\Sigma)$ و $E = E^{T^{-1}(\Sigma)}$.

فرض کنید u یک تابع حقیقی یا مختلط مقدار روی X و $T: X \to X$ تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد باشد. در این صورت، زوج $(u.T)$ یک عملگر خطی uC_T از $L^p(\Sigma)$ به‌توی $L^p(\Sigma)$ با ضابطهٔ (۱۱) را القا می‌کند:

$$uC_T(f) = uf \circ T, \qquad \left(f \in L^p(\Sigma)\right) \tag{۱۱}$$

در این‌جا نامنفرد بودن T، متضمن خوش‌تعریفی uC_T به‌عنوان یک نگاشت روی رده‌های هم‌ارزی از توابع روی $\sigma(u)$ است. در این حالت، uC_T را **عملگر ترکیبی وزن‌دار** از $L^p(\Sigma)$ به‌توی $L^p(\Sigma)$ می‌نامیم و جهت اختصار در نوشتار، با نماد $W = uC_T$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص، اگر T تبدیل همانی باشد، آن‌گاه W را با M_u نشان داده و آن را **عملگر ضربی** القا شده به‌وسیلهٔ u می‌نامیم.

هم‌چنین اگر $u = 1$، آن‌گاه $W = uC_T = M_uC_T$ را به‌صورت C_T نوشته و آن را **عملگر ترکیبی** القا شده به‌وسیلهٔ T می‌نامیم.

هم‌چنین ثابت شده است که عملگر W روی $L^p(\Sigma)$ کران‌دار است اگر و تنها اگر $J := hE(u^p) \circ T^{-1} \in L^\infty(\Sigma)$ و در این صورت داریم $\| W \| = \| J \|_\infty^{1/p}$ [۱۱].

در آنالیز تابعی کلاسیک ثابت می‌شود که عملگر کران‌دار A روی فضای هیلبرت H تجزیه یکتا موسوم به **تجزیهٔ قطبی** به‌صورت $A = U|A|$ دارد که در آن $|A| := (A^*A)^{1/2}$ و U عملگر طولپای جزئی[۱] است به‌طوری‌که $N(U) = \mathrm{N}(A)$. A^* همان الحاق عملگر A است. لازم به توضیح است که عملگر U طولپای جزئی نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathrm{N}(U)^\perp$ داشته باشیم $\|Ux\| = \|x\|$ [۸].

تعریف ۵. [۸] اگر $A = U|A|$، **تبدیل آلوثگ**[۲] عملگر A به‌صورت $\tilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}} U|A|^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۶. فرض کنید A یک عملگر کران‌دار روی فضای هیلبرت H باشد ($0 < p < \infty$). در این صورت

- عملگر A نرمال نامیده می‌شود هرگاه $A^*A = AA^*$ و شبه‌نرمال است اگر $A(A^*A) = (A^*A)A$.
- عملگر A یکانی نامیده می‌شود هرگاه $A^*A = AA^* = I$ که I عملگر همانی روی H است.
- عملگر A را p- هیپونرمال نامند هرگاه $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$ [۷].
- عملگر A را ∞- هیپونرمال نامند هرگاه به ازای تمام مقادیر p، p- هیپونرمال باشد [۱۷].
- عملگر A را p- شبه‌هیپونرمال نامند هرگاه داشته باشیم $A^*(A^*A)^pA \geq A^*(AA^*)^pA$ [۸].
- عملگر A را p- پارانرمال نامند هرگاه برای هر بردار یکه $x \in H$، داشته باشیم [۸]

$$\| \, |A|^p \mathrm{U}|A|^p \mathrm{x} \, \| \geq \| \, |A|^p \mathrm{x} \, \|.$$

- عملگر A را مطلقاً p- پارانرمال نامند هرگاه به ازای تمام بردارهای واحد $x \in H$ داشته باشیم [۸]

$$\| \, |A|^p Ax \, \| \geq \| Ax \|^{p+1}.$$

- عملگر A را نرمالوئید نامند هرگاه به ازای هر $n \in N$، $\| A^n \| = \| A \|^n$.
- عملگر A را w- هیپونرمال یا ضعیف هیپونرمال نامند هرگاه $|\tilde{A}| \geq |A| \geq |(\tilde{A})^*|$ [۸].
- عملگر A را از رده $A(p)$ نامند هرگاه $(A^*|A|^{2(p)}A)^{\frac{1}{p+1}} \geq |A|^2$ [۸].
- عملگر A زیرنرمال نامیده می‌شود هرگاه آن را بتوان به یک عملگر نرمال تعریف‌شده روی یک فضای هیلبرت گسترده‌تر از H توسیع داد، یا به‌طور معادل تحدید یک عملگر نرمال به یک زیرفضای پایا باشد [۸].

نخست شرایط معادل برای رده‌های مطلقاً p- پارانرمال و p- پارانرمال را از مراجع [۸] و [۲۱] یادآوری می‌کنیم.

لم ۷. با فرض $p \in (0, +\infty)$، عملگر کران‌دار A تعریف‌شده روی فضای هیلبرت H:

الف) [۸، ص۱۷۴] مطلقاً p- پارانرمال است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\lambda \geq 0$،

$$A^*|A|^{2(p)}A - (p+1)\lambda^p |A|^2 + p\lambda^{p+1} \geq 0. \qquad (۱۲)$$

ب) [گزارهٔ ۳،۱.۲] p - *پارانرمال است اگر و تنها اگر به‌ازای هر* $k \geq 0$،

$$|A|^p \mathrm{U}^*|A|^{2(p)}\mathrm{U}|A|^p - 2(k)|A|^{2(p)} + k^2 \geq 0. \qquad (۱۳)$$

توجه ۸. چند مورد از ارتباط‌های اساسی بین این رده‌های عملگری را از مرجع [۸] یادآوری می‌کنیم.

- هر عملگر p- هیپونرمال، p- شبه‌هیپونرمال است؛
- هر عملگر p- شبه‌هیپونرمال از رده $A(p)$ است؛

1. Partial isometry
2. Aluthge transformation

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.1.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

- هر عملگر از رده $A(p)$، مطلقاً p- پارانرمال است؛
- هر عملگر مطلقاً p- پارانرمال، نرمالوئید است؛
- برای $p \geq 1$، هر عملگر مطلقاً p- پارانرمال، p- پارانرمال است؛
- برای $p \in (0.1)$، هر عملگر p- پارانرمال، مطلقاً p- پارانرمال است؛
- هر عملگر w- هیپونرمال، $\frac{1}{2}$-پارانرمال است؛
- برای $0 < p < q$، هر عملگر p- پارانرمال، q- پارانرمال است.
- هر عملگر نرمال شبه‌نرمال، هر عملگر شبه‌نرمال زیرنرمال و هر عملگر شبه‌نرمال هیپونرمال است.

توجه ۹. فرض کنید A و B، عملگرهای مثبت و کران‌دار روی فضای هیلبرت H باشند به‌طوری‌که $A \leq B$. در این صورت به‌ازای هر $\alpha \in [0, 1]$، بنا بر نامساوی لونر-هنز[1] همواره $A^{\alpha} \leq B^{\alpha}$. از این‌رو، برای $0 < q < p$، هر عملگر p- هیپونرمال، یک عملگر q- هیپونرمال است.

گزارهٔ ۱۰. فرض کنید $(X.\Sigma.\mu)$ فضای اندازه σ- متناهی و $T: X \to X$ یک تبدیل Σ- اندازه‌پذیر و $h \in L^{\infty}(\Sigma)$، آن‌گاه

آ) همواره $h \geq 0$ تقریباً همه‌جا.

ب) همواره $h \circ T > 0$ تقریباً همه‌جا.

ت) $T^{-1}\big(\sigma(h)\big) = X$ تقریباً همه‌جا.

ج) به‌ازای هر $g.f \in L^p(X.\Sigma.\mu)$ داریم $f \circ T = g \circ T$ اگر و تنها اگر $X_{\sigma(h)}f = \chi_{\sigma(h)}g$ تقریباً همه‌جا که در آن $\chi_{\sigma(h)}$، تابع مشخصه روی تکیه‌گاه h است.

د) اگر $f \geq 0$ آن‌گاه $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$.

ر) اگر $f \geq 0$ آنگاه $\sigma(f \circ T) \subseteq \sigma(E(f) \circ T)$.

ز) همواره $E(h) \circ T > 0$ تقریباً همه‌جا.

ژ) فرمول تغییر متغیر: به‌ازای هر $f \in L^p(\Sigma)$ و هر $A \in \Sigma$، همواره

$$\int_{T^{-1}A} f \circ T d\mu = \int_A hf d\mu. \tag{۱۴}$$

برای اثبات و جزئیات بیش‌تر به [۳]، [۶]، و [۱۸] مراجعه کنید.

قضیهٔ ۱۱. [۱۱] عملگر *ترکیبی وزن‌دار* $W: L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$ با ضابطهٔ $f \to uf \circ T$ کران‌دار است اگر و تنها اگر $J = hE(|u|^p) \circ T^{-1} \in L^{\infty}(\Sigma)$.

اثبات. فرض کنید $f \in L^p(\Sigma)$، دلخواه باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\| Wf \|_p^p &= \int_X |Wf|^p d\mu \qquad (۱۵)\\
&= \int_X |uf \circ T|^p d\mu = \int_X |u|^p |f|^p \circ T f d\mu\\
&= \int_X E(|u|^p)|f|^p \circ T d\mu\\
&= \int_X hE(|u|^p) \circ T^{-1} |f|^p d\mu\\
&= \int_X \left|J^{1/p} f\right|^p d\mu = \int_X \left|M_{J^{1/p}} f\right|^p d\mu = \| M_{J^{1/p}} f \|_p^p.
\end{aligned}$$

1. Lowner-Heinz

از این‌رو، $\| W \| = \| M_{J^{\frac{1}{p}}} \| = \| J^{\frac{1}{p}} \|_{\infty}$. پس W کران‌دار است اگر و تنها اگر $J^{\frac{1}{p}} \in L^{\infty}(\Sigma)$ و یا به‌طور هم‌ارز $J \in L^{\infty}(\Sigma)$ که همان حکم قضیه است.

قضیهٔ ۱۲. [۱۲] فرض کنید عملگر ترکیبی وزن‌دار $W: L^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$ کران‌دار و $f \in L^2(\Sigma)$، یک تابع دلخواه باشد. در این صورت داریم:

آ) $W^*f = hE(\bar{u}f) \circ T^{-1}$؛

ب) $W^*Wf = hE(|u|^2) \circ T^{-1}f$ ؛

ج) $WW^*f = u(h \circ T)E(\bar{u}f)$.

اثبات. فرض کنید $g, f \in L^2(\Sigma)$ دلخواه باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \langle W^*f, g\rangle &= \langle f, Wg\rangle = \int_X f\overline{ug} \circ Td\mu \\ &= \int_X E(\bar{u}f)\bar{g} \circ Td\mu \\ &= \int_X hE(\bar{u}f) \circ T^{-1}\bar{g}d\mu \\ &= \langle hE(\bar{u}f) \circ T^{-1}, g\rangle. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

از این‌رو $W^*f = hE(\bar{u}f) \circ T^{-1}$. هم‌چنین

$$\begin{aligned} \langle W^*Wf, g\rangle = \langle Wf, Wg\rangle &= \int_X uf \circ T\, \overline{ug \circ T}d\mu \\ &= \int_X E(|u|^2)f \circ T\bar{g} \circ Td\mu \\ &= \int_X hE(|u|^2) \circ T^{-1}\, f\bar{g}d\mu \\ &= \langle hE(|u|^2) \circ T^{-1}\, f. g\rangle \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &\langle WW^*f, g\rangle = \langle W^*f, W^*g\rangle \\ &= \int_X hE(\bar{u}f) \circ T^{-1}hE(u\bar{g}) \circ T^{-1}d\mu = \int_X E(\bar{u}f) \circ T^{-1}hE(u\bar{g}) \circ T^{-1}d\mu \circ T^{-1} \\ &= \int_X h \circ TE(\bar{u})E(u\bar{g})d\mu = \int_X E(h \circ TE(\bar{u}f)u\bar{g})d\mu \\ &= \int_X h \circ TE(\bar{u}f)u\bar{g}d\mu = \langle u(h \circ T)E(\bar{u}f), g\rangle. \end{aligned}$$

بنابراین، حکم‌های (آ)، (ب) و (ج) به‌ترتیب برقرار هستند.

وایتلی[۱] [۲۰]، نشان داد که عملگر ترکیبی C_T نرمال است اگر و تنها اگر $T^{-1}\Sigma$ به‌طور اساسی تمام Σ باشد (یعنی $\mu(\Sigma - T^{-1}\Sigma) = 0$ و $h \circ T = h$. هم‌چنین او ثابت کرد که در فضای با اندازه متناهی، C_T متعلق به رده‌های تطبیقی نرمال و یکانی است اگر و تنها اگر $T^{-1}\Sigma$ به‌طور اساسی تمام Σ باشد و T حافظ اندازه باشد، یعنی به‌عبارت دیگر $h = 1$.

در مرجع [۵] ثابت شده است که عملگر W نرمال است اگر و تنها اگر داشته باشیم $uE(u)h \circ T = hE(u^2) \circ T^{-1}$ و $(T^{-1}\Sigma)_{\sigma(u)} = \Sigma_{\sigma(u)}$. در مرجع [۱۵] لمبرت[۲] ثابت کرد که عملگر ترکیبی وزن‌دار W هیپونرمال است

1. Whitley
2. Lambert

اگر و تنها اگر $\sigma(u) \subseteq \sigma(hE((u^2)\circ T^{-1})$ و $h\circ TE(\frac{u^2}{hE(u^2)\circ T^{-1}}) \leq 1$ که کسر، خارج $\sigma(hE((u^2)\circ T^{-1})$ صفر تعیین می‌شود.

کمپیل و هورنور[1] در [۶] نشان دادند که W کوهیپونرمال (یعنی W^* هیپونرمال) است اگر و تنها اگر

$$J \leq J\circ T \text{ و } \Sigma_{\sigma(J)} \subseteq (T^{-1}\Sigma)_{\sigma(u)}.$$

رده‌های به‌طور ضعیف هیپونرمال از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار

در این بخش شرایط لازم و کافی برای p- هیپونرمال بودن، p- شبه‌هیپونرمال بودن، p- پارانرمال بودن و نرمالوئید بودن عملگر کران‌دار از نوع ترکیبی وزن‌دار روی فضای هیلبرت $L^2(\Sigma)$ داده می‌شود. ممکن است خواننده تصور کند همان نقشی که h در بررسی رده‌های بالا برای عملگرهای ترکیبی بازی می‌کند، J نیز همان نقش را برای عملگرهای ترکیبی وزن‌دار ایفا می‌نماید، اما چنان‌که در ادامه می‌بینیم، این حدس وقتی u، $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر نباشد، درست نیست.

در [۹] ثابت شده است که عملگر ترکیبی C_T نرمال است اگر و تنها اگر $T^{-1}\Sigma = \Sigma$ و $h = h\circ T$. هم‌چنین C_T شبه‌نرمال است اگر و تنها اگر $h = h\circ T$. عملگر C_T هیپونرمال است اگر و تنها اگر $h > 0$ و $E\left(\frac{1}{h}\right) \leq \frac{1}{h\circ T}$ [۱۵]. در [۳] نشان داده شده است که C_T، p- هیپونرمال است اگر و تنها اگر $h > 0$ و $E\left(\frac{1}{h^p}\right) \leq \frac{1}{h^p\circ T}$. هم‌چنین C_T، ∞- هیپونرمال است اگر و تنها اگر $h\circ T \leq h$. سرانجام ثابت شده است که C_T ضعیف هیپونرمال است اگر و تنها اگر $\sqrt{h\circ T} \leq E(\sqrt{h})$.

در [۳] برای عملگر ترکیبی C_T، نشان داد می‌شود که رده‌های p- شبه‌هیپونرمال، p- پارانرمال، مطلقاً p- پارانرمال و $A(p)$ منطبق بر هم‌دیگر هستند و شرط لازم و کافی برای تعلق به این رده‌ها، نابرابری $h^p\circ T \leq E(h^p)$ است.

در ادامه، می‌خواهیم این رده‌ها را برای عملگرهای ترکیبی وزن‌دار بررسی کنیم. بدین‌منظور برای سهولت در محاسبات و بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که تابع وزن u نامنفی باشد.

قضیهٔ ۱۳. [۱۲] فرض کنید $p \in (0.\infty)$ و $f \in L^2(\Sigma)$. اگر A عملگری روی $L^2(\Sigma)$ بدین‌صورت باشد:

$$Af := u(h\circ T)E(uf), \tag{۱۷}$$

باشد. در این صورت داریم:

$$A^p f = u(h^p\circ T)[E(u^2)]^{p-1}E(uf). \tag{۱۸}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $f \in L^2(\Sigma)$. قرار دهید

$$Kf = u\sqrt{\frac{h\circ T}{E(u^2)}}E(uf). \tag{۱۹}$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} K(Kf) &= u\sqrt{\frac{h\circ T}{E(u^2)}}E\left(u^2\sqrt{\frac{h\circ T}{E(u^2)}}\,E(uf)\right) \\ &= u\frac{h\circ T}{E(u^2)}E(u^2)E(uf) = Af. \end{aligned} \tag{۲۰}$$

1. Hornor and Campbell

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

در نتیجه، $K = A^{1/2}$. حال اگر قرار دهیم

$$Kf = u\sqrt[3]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}}E(uf) \tag{۲۱}$$

به‌راحتی می‌توان دید که

$$\begin{aligned} K(Kf) &= u\sqrt[3]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}}E\left(u^2\sqrt[3]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}}\,E(uf)\right) \\ &= u\left(\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}\right)^{\frac{2}{3}}E(u^2)E(uf). \end{aligned} \tag{۲۲}$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} K(K^2f) &= u\sqrt[3]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}}E\left(u^2\left(\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}\right)^{\frac{2}{3}}E(u^2)E(uf)\right) \\ &= u\frac{h\circ T}{E(u^2)^2}E(u^2)^2\,E(uf) = Af. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

بنابراین، $K = A^{1/3}$. سرانجام به استقرا می‌توان نشان داد که

$$A^{\frac{1}{n}}f = u\sqrt[n]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^{n-1}}}\,E(uf). \tag{۲۴}$$

در این مرحله سعی می‌کنیم توان‌های mام عملگر $A^{\frac{1}{n}}$ را محاسبه کنیم. برای راحتی محاسبه، قرار می‌دهیم $B = A^{\frac{1}{n}}$ و $C = \sqrt[n]{\frac{h\circ T}{E(u^2)^{n-1}}}$. در این صورت برای هر $f \in L^2(\Sigma)$ داریم:

$$\begin{aligned} Bf &= uCE(uf) \\ B^2f &= uCE\big(u^2CE(uf)\big) = uC^2E(u^2)E(uf) \\ B^3f &= uCE\big(u^2C^2E(u^2)E(uf)\big) = uC^3E(u^2)^2E(uf). \end{aligned} \tag{۲۵}$$

مجدداً می‌توان به استقرا نشان داد

$$B^mf = uC^mE(u^2)^{m-1}E(uf), \qquad f \in L^2(\Sigma). \tag{۲۶}$$

با جاگذاری B و C به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A^{\frac{m}{n}}f &= u\left(\frac{h\circ T}{E(u^2)^{n-1}}\right)^{\frac{m}{n}}E(u^2)^{m-1}E(uf) \\ &= u\left(h^{\frac{m}{n}}\circ T\right)E(u^2)^{\frac{m}{n}-1}E(uf). \end{aligned} \tag{۲۷}$$

زیرا به‌ازای هر $p \in (0.\infty)$، تابع $g(x) = x^p$ روی طیف عملگر مثبت $A^{\frac{m}{n}}$ پیوسته است، از این‌رو، با استفاده از حسابان تابعی داریم:

$$A^pf = u(h^p\circ T)[E(u^2)]^{p-1}E(uf) \tag{۲۸}$$

و سرانجام اثبات به پایان می‌رسد.

قضیهٔ ۱۴. [۱۲] فرض کنید $W = u\,C_T$ عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار روی $L^2(\Sigma)$ و $J = hE(u^2)\circ T^{-1}$. در این‌صورت این حکم‌ها هم‌ارزند:

- W، p- شبه‌هیپونرمال است.
- $E(u^2J^p) \geq h^p\circ T[E(u^2)]^{p+1}$.

- W، p- پارانرمال است.
- W، مطلقاً p- پارانرمال است.
- W، عملگری از رده $A(p)$ است.

قضیهٔ ۱۵. [۱۲] عملگر طولپای جزئی U در تجزیهٔ قطبی الحاق عملگر ترکیبی وزن‌دار $W^*: L^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$ بدین‌صورت است:

$$Uf = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{E(u^2)\circ T^{-1}}} E(uf) \circ T^{-1}, \qquad f \in L^2(\Sigma) \tag{۲۹}$$

قضیهٔ ۱۶. [۱۲] فرض کنید C_T عملگر ترکیبی کران‌دار روی $L^2(\Sigma)$ باشد. در این‌صورت، این حکم‌ها برقرارند:

- C_T^*، عملگر p- شبه‌هیپونرمال است اگر و تنها اگر $h^p \circ TE(h) \geq h^{p+1}$.
- C_T^*، عملگر p- پارانرمال است اگر و تنها اگر $h^p \circ TE(h^{\frac{p+1}{2}}) \geq h^{\frac{3(p)+1}{2}}$.

قضیهٔ ۱۷. [۱۲] فرض کنید $h \in L^\infty(\mathcal{A})$ ، در این‌صورت این گزاره‌های هم‌ارزند؛

- C_T^*، عملگر p- شبه‌هیپونرمال است،
- C_T^*، عملگر p- پارانرمال است،
- روی $\sigma(h)$، $h \circ T \geq h$.

اثبات. چون $h \in L^\infty(\mathcal{A})$، داریم $E(h) = h$ و $E\left(h^{\frac{p+1}{2}}\right) = h^{\frac{p+1}{2}}$. حال حکم از قضیهٔ ۱۶ نتیجه می‌شود.

لم ۱۸ که در اثبات قضیه‌های بعدی استفاده می‌شود را از [۴] یادآوری می‌کنیم.

لم ۱۸. فرض کنید α و β توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشند و $f \in L^2(\Sigma)$. در این‌صورت داریم:

$$\int_X \alpha |f|^2 d\mu \geq \int_X |E(\beta f)|^2 d\mu \tag{۳۰}$$

اگر و تنها اگر $\sigma(\beta) \subseteq \sigma(\alpha)$ و $E(\frac{\beta^2}{\alpha}\chi_{\sigma(\alpha)}) \leq 1$.

قضیهٔ ۱۹. [۱۲] عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار $W = uC_T$ بر $L^2(\Sigma)$، p- هیپونرمال است اگر و تنها اگر $\sigma(u) \subseteq \sigma(J)$ و

$$h^p \circ TE\left(\frac{u^2\left(E(u^2)\right)^{p-1}\chi_{\sigma(J)}}{J^p}\right) \leq 1. \tag{۳۱}$$

یادآوری می‌کنیم که تبدیل آلوثگ برای عملگر $A \in B(H)$ عملگری است مانند $\tilde{A}$ که این عملگر به‌صورت $\tilde{A} := |A|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. حال برای عملگر $A \in B(H)$ و $0 \leq r \leq 1$ تبدیل آلوثگ تعمیم‌یافته متناظر با عملگر A به‌صورت $A_r := |A|^r U|A|^{1-r}$ در [۸] معرفی شده است. ملاحظه می‌شود که به‌ازای $r = \frac{1}{2}$، $A_{\frac{1}{2}}$ همان تبدیل آلوثگ کلاسیک است. در قضیه زیر A_r، $|A_r|$ و $|A_r^*|$ برای عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار $W = uC_T$ روی $L^2(\Sigma)$ محاسبه می‌شود.

قضیهٔ ۲۰. [۱۲] فرض کنید W یک عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار روی $L^2(\Sigma)$ باشد. در این صورت

$$W_r = \omega_r C_T, \qquad |W_r| = M_{\sqrt{h[E(\omega_r{}^2)]\circ T^{-1}}} \tag{۳۲}$$

و

$$|W_r^*| f = P_{v_r} f := v_r E(v_r f) \tag{۳۳}$$

که در آن $\omega_r := u\left(\frac{J\chi_{\sigma(E(u))}}{h\circ TE(u^2)}\right)^{\frac{r}{2}}$ و $v_r := \frac{\omega_r\sqrt{h\circ T}}{\sqrt[4]{E(|\omega_r\sqrt{h\circ T}|)^2}}$.

در قضیهٔ ۲۱، رده ضعیف هیپونرمالی برای عملگر ترکیبی وزن‌دار بررسی می‌شود.

قضیهٔ ۲۱. [۱۲] فرض کنید W عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار روی $L^2(\Sigma)$ باشد. در این‌صورت

آ) $|W_r| \geq |W|$ اگر و تنها اگر روی $\sigma(h)$، $E(\omega_r^2) \geq E(u^2)$.

ب) $|W| \geq |W_r^*|$ اگر و تنها اگر $E\left(\frac{v_r^2}{\sqrt{J}}\chi_{\sigma(J)}\right) \leq 1$.

اثبات:

آ) توجه کنید که بر $\sigma(h)$، $|W_r| \geq |W|$ اگر و تنها اگر $hE(\omega_r^2)\circ T^{-1} \geq hE(u^2)\circ T^{-1}$ اگر و تنها اگر $E(\omega_r^2) \geq E(u^2)$.

ب) بنابر قضیه، $|W_r^*| = P_{v_r}$. بنابراین $|W| \geq |W_r^*|$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$ داشته باشیم $\langle (W^*W)^{\frac{1}{2}} f.f\rangle \geq \langle |W_r^*| f.f\rangle$. یعنی

$$\int_X \sqrt{J}\,|f|^2 d\mu \geq \int_X v_r\, E(v_r f)\, \bar{f} d\mu = \int_X |E(v_r f)|^2\, d\mu. \qquad (۳۴)$$

حال با توجه به این‌که $\sigma(\omega_r) \subseteq \sigma(J)$ و با استفاده از لم ۱۸، $|W| \geq |W_r^*|$ اگر و تنها اگر $\sigma(\omega_r) \subset \sigma(J)$ و هم‌چنین $E\left(\frac{v_r^2}{\sqrt{J}}\chi_{\sigma(J)}\right) \leq 1$.

در این قسمت، سعی می‌کنیم نرمالوئید بودن عملگر ترکیبی وزن‌دار و کران‌دار W را روی $L^2(\Sigma)$ بررسی کنیم. برای این کار ابتدا اندازه μ_{u^2,T^n} را با ضابطهٔ $\mu_{u^2,T^n}(\mathrm{F}) = \int_{T^{-n}(F)} |u|^2 d\mu,\quad n \in \mathbb{N},\quad F \in \Sigma$ تعریف می‌کنیم. این اندازه نسبت به‌اندازه μ به‌طور مطلق پیوسته است که مشتق رادون-نیکودیم آن را با نماد $H_n = \frac{d\mu_{u^2,T^n}}{d\mu}$ نشان می‌دهیم.

گزارهٔ ۲۲. [۱۲] فرض کنید W عملگر ترکیبی وزن‌دار کران‌دار روی $L^2(\Sigma)$ باشد. آن‌گاه به‌ازای هر $n \epsilon \mathbb{N}$، داریم $\| W^n \| = \| M_{\sqrt{H_n}} \| = \left\|\sqrt{H_n}\right\|_\infty$.

اثبات. به‌ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$ و هر $n \epsilon \mathbb{N}$ داریم

$$\|W^n f\|_2^2 = \int_X \left|\prod_{i=0}^{n-1}(u\circ T^i)(f\circ T^n)\right|^2 d\mu = \int_X \left|\prod_{i=0}^{n-2}(u\circ T^i)(f\circ T^{n-1})\right|^2 d\mu_{u^2,T} = \cdots$$
$$= \int_X |f|^2 d\mu_{u^2,T^n} = \int_X |f|^2 H_n d\mu = \int_X \left|M_{\sqrt{H_n}}\right|^2 d\mu = \left\|M_{\sqrt{H_n}} f\right\|_2^2.$$

بنابراین حکم گزاره به‌دست می‌آید.

تذکر ۲۳. [۱۲] قرار دهید $E_n := E^{T^{-n}\Sigma}$. چون $d\mu_{u^2,T^n} = h_n[E_n(|u|^2)]\circ T^{-n} d\mu$ از این‌رو، می‌توان نتیجه گرفت که $H_n = h_n[E_n(|u|^2)]\circ T^{-n}$. چون $\|W\| = \|J\|_\infty^{\frac{1}{2}}$ و از طرفی بنابر گزارهٔ ۲۲، $\|W^n\| = \left\|\sqrt{H_n}\right\|_\infty$ از این‌رو، عملگر W نرمالوئید است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $n \epsilon \mathbb{N}$، داشته باشیم $\| H_n \|_\infty^{1/n} = \| J \|_\infty$.

عملگرهای ترکیبی وزن‌دار زیرنرمال

در این بخش مروری بر عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزن‌دار زیرنرمال روی فضای هیلبرت $L^2(\Sigma)$ داریم. مقاله [۱۴] بهترین مرجع برای بررسی عملگرهای ترکیبی زیرنرمال است که در ادامه نتایج آن را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۲۴. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را گشتاوری می‌نامیم هرگاه بتوان تابعی با تغییر کراندار $m(t)$ روی بازه‌ای مانند $[0,\ r]$ چنان یافت که تساوی $f_n = \int_0^r t^n dm(t)$ برقرار باشد.

قضیهٔ ۲۵. [۱۶] عملگر $A: H \to H$ با $ker\ (A) = \{0\}$ زیرنرمال است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x \in H$ دنبالهٔ $\{\|A^n x\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ گشتاوری باشد.

شرط لازم وکافی برای یک به‌یک بودن عملگر ترکیبی C_T این است که تقریباً همه جا $h > 0$ باشد (یا به‌طور معادل T پوشا باشد) [۱۹]. اما عملگر ترکیبی وزن‌دار W یک به‌یک است اگر و فقط اگر T به‌طور اساسی پوشا باشد بدین‌معنی که $\mu\big(X - T(X)\big) = 0$ [۱۳].

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ ۲۵ می‌توان گفت که C_T زیرنرمال است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$، دنباله $\left\{\int_X\ h_n |f|^2 d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ گشتاوری باشد [۱۴] که در آن $h_n = \frac{d\mu \circ T^{-n}}{d\mu}$. زیرا

$$\|{C_T}^n f\|_2^2 = \int_X\ |f o T^n|^2 d\mu = \int_X\ h_n |f|^2 d\mu.$$

مجموعهٔ همه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $I = [0, \|\ h\ \|_\infty]$ را با نماد $P(I)$ نشان می‌دهیم. تبدیل خطی $\mathcal{L}: P(I) \to L^\infty(\Sigma)$ را با ضابطهٔ $\mathcal{L}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h_n$ در نظر بگیرید.

قضیهٔ ۲۶. [۱۴] عملگر ترکیبی C_T زیرنرمال است اگر و فقط اگر تبدیل خطی $\mathcal{L}$ مثبت باشد یعنی هرگاه روی بازه I ، $P \geq 0$ آن‌گاه $\mathcal{L}(P) \geq 0$.

نتیجهٔ ۲۷. [۱۴] عملگر C_T زیرنرمال است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{\mu \circ T^{-n}(A)\}_{n=1}^{\infty}$ به ازای هر مجموعه $A \in \Sigma$ با اندازهٔ مثبت، یک دنباله گشتاوری باشد.

نتیجهٔ ۲۷. [۱۴] عملگر C_T زیرنرمال است اگر و تنها اگر تقریباً برای هر $x \in X$، $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ گشتاوری باشد ($h_n = \frac{d\mu \circ T^{-n}}{d\mu}$).

با استفاده از قضیهٔ ۲۵ هم‌چنین می‌توان زیرنرمال بودن عملگر ترکیبی وزن‌دار $W \in \mathcal{B}(L^2(\Sigma))$ را نیز بررسی کرد. برای این کار ابتدا فرض می‌کنیم که تبدیل T به‌طور اساسی کراندار باشد.

قضیهٔ ۲۸. [۲] عملگر ترکیبی وزن‌دار $W \in \mathcal{B}(L^2(\Sigma))$ زیرنرمال است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f \in L^2(\Sigma)$، دنبالهٔ $\{\int_X J_n\ |f|^2 d\mu\}_{n=1}^{+\infty}$ گشتاوری باشد.

قضیهٔ ۲۹. [۲] فرض کنید $I = [0, \|\ J\ \|_\infty]$ و $\mathcal{L}: P(I) \to L^\infty(\Sigma)$ تبدیلی خطی با ضابطهٔ $\mathcal{L}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_n$ باشد. آنگاه عملگر $W \in \mathcal{B}(L^2(\Sigma))$ زیرنرمال است اگر و تنها اگر تبدیل $\mathcal{L}$ مثبت باشد. به این معنی که تقریباً همه‌جا $\mathcal{L}(p) \geq 0$ زمانی که $p \geq 0$ روی I.

نتیجهٔ ۳۰. [۲] عملگر $W \in \mathcal{B}(L^2(\Sigma))$ زیرنرمال است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه Σ- اندازه‌پذیر A با اندازهٔ متناهی، $\{\int_{T^{-n}A}\ |u|^2 d\mu\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله گشتاوری باشد.

در نهایت در این مرجع، معیار جالبی برای زیرنرمالی W بیان می‌شود.

گزارهٔ ۳۱. [۲] عملگر $W \in \mathcal{B}(L^2(\Sigma))$ زیرنرمال است اگر و تنها اگر $\{J_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله گشتاوری تقریباً برای هر $x \in X$ باشد که در آن $J_n = h_n[E_n(|u|^2)] \circ T^{-n}$، $h_n = \frac{d\mu \circ T^{-n}}{d\mu}$ و $E_n = E^{T^{-n}\Sigma}$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.1.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

مثال‌ها

در این فصل با ارائه مثال‌هایی متنوع بر اساس قضیه‌ها و نتایج فصل قبل نشان می‌دهیم که عملگر ترکیبی وزن‌دار روی فضای هیلبرت $L^2(\Sigma)$ به‌خوبی رده‌های عملگری مانند p- هیپونرمال، p- شبه‌هیپونرمال، p- پارانرمال، مطلقاً p- پارانرمال، نرمالوئید و ... را تفکیک می‌کنند [۱۲].

مثال ۳۲. فرض کنید $w = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیق مثبت و $l^p(w)$ فضای دنباله‌ای وزن‌دار l^p با وزن w باشد. به‌عبارتی دیگر، $l^p(w) = L^p(\mathbb{N}.2^{\mathbb{N}}.\mu)$، که در آن $2^{\mathbb{N}}$ مجموعه توانی اعداد طبیعی، $p \geq 1$ و μ یک اندازه روی $2^{\mathbb{N}}$ به‌صورت $\mu(\{n\}) = m_n$ باشد. فرض می‌کنیم $u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی بوده است و $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد باشد، به این معنی که $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$. محاسبات مستقیم نشان می‌دهد که برای هر $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$h(k) = \frac{1}{m_k}\sum_{j \in T^{-1}(k)} m_j\,, \qquad E(f)(k) = \frac{\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} f_j m_j}{\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} m_j}. \tag{۳۵}$$

بنا بر قضیهٔ ۱۴، W، p- شبه‌هیپونرمال (p- پارانرمال) است اگر و تنها اگر

$$\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} (u(j))^2 (J(j))^p m_j \geq m_{T(k)} \left\{\frac{\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} (u(j))^2 m_j}{m_{T(k)}}\right\}^{p+1}. \tag{۳۶}$$

هم‌چنین بنا به قضیهٔ ۱۶، C_T^* عملگر p- شبه‌هیپونرمال است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{1}{{m^p}_{T(k)}}\left\{\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} m_j\right\}^{p-1} \left\{\sum_{j \in T^{-1}(T(k))} (h(j))^{\frac{p+1}{2}} m_j\right\} \geq \left\{\frac{1}{m_k}\sum_{j \in T^{-1}(k)} m_j\right\}^{\frac{3(p)+1}{2}}. \tag{۳۷}$$

مثال ۳۳. فرض کنید μ اندازه لبگ روی زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ $X = [1,\ \infty)$ باشد. تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد T و تابع وزن u را به‌صورت $T(x) = \sqrt{x}$ و $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

$$h(x) = 2.x \quad . \quad J = \frac{2.x}{1+x^2} \quad . \quad h \circ T(x) = 2\sqrt{x} \quad . \quad J \circ T(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \tag{۳۸}$$

$\sigma(J) = X$ و $E = I$ (عملگر همانی). چون بنا بر قضیهٔ ۱۴، p- شبه‌هیپونرمال بودن، p- پارانرمال بودن و p- هیپونرمال بودن عملگر W هم‌ارز با $J \geq J \circ T$ است، از این‌رو، W ای مربوط به این مثال در هیچ‌کدام از رده‌های فوق نیست. با این وجود، عملگر ترکیبی متناظر C_T، هم p- شبه‌هیپونرمال، هم p- پارانرمال و هم p- هیپونرمال است. هم چنین ملاحظه می‌شود که C_T^*، p- شبه‌هیپونرمال نیست، اما بنا بر قضیهٔ ۱۴، C_T و $\widetilde{C_T}$ هر دو p- شبه‌هیپونرمال هستند. لازم به ذکر است که $\widetilde{C_T}$ عملگری به فرم ترکیبی وزن‌دار با تابع وزن $u = (\frac{h}{h \circ T})^{1/4}$ است.

با وجود این اگر فضای زمینه را با مجموعه $X = (0, 1)$ تعویض کنیم، بنا بر قضیهٔ ۱۶، برای هر $p > 0$، C_T^*، عملگر p- شبه‌هیپونرمال است، ولی هیچ‌کدام از عملگرهای C_T و $\widetilde{C_T}$ عملگر p- شبه‌هیپونرمال نیستند.

مثال ۳۴. فرض کنید X مجموعه اعداد صحیح نامنفی و σ- جبر Σ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های X باشد. فرض کنید m اندازه تعریف‌شده روی هر عضو $n \in \Sigma$ به ترتیب به‌صورت (۳۹) باشد

$$m = 1, 1, 1, c, d, c^2, d^2, c^3, d^3, \ldots \tag{۳۹}$$

که در آن c و d اعداد حقیقی مثبت و ثابتی هستند. تعریف می‌کنیم

$$T(k) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1, 2 \\ k - 2 & k \geq 3. \end{cases} \tag{۴۰}$$

لازم به ذکر است که این مثال جالب ابتدا در [۴] و سپس در [۳] برای نشان دادن این‌که عملگرهای ترکیبی تفکیک‌کنندهٔ خوبی برای رده‌های جزئاً نرمال هستند، استفاده شده است.

قرار می‌دهیم

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0,1,2 \\ k & k \geq 3\,. \end{cases} \tag{۴۱}$$

در ذیل چند رابطهٔ مفید که استفاده می‌شود، بیان می‌شود.

$$h_n(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-1}(k)} h_{n-1}(j)\, m_j, \tag{۴۲}$$

$$J(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-1}(k)} (u(j))^2\, m_j, \tag{۴۳}$$

$$H_n(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-n}(k)} (u(j))^2\, m_j, \tag{۴۴}$$

$$(E(u^2) \circ T^{-1})(k) = \frac{\sum_{j \in T^{-1}(k)} (u(j))^2\, m_j}{\sum_{j \in T^{-1}(k)} m_j}. \tag{۴۵}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$h = 3, c, d, c, d, \ldots \tag{۴۶}$$

$$h \circ T = 3, 3, 3, c, d, c, d, \ldots$$

$$E(u^2) = 1, 1, 1, 9, 16, 25, \ldots.$$

هم‌چنین داریم

$$h_2 : 3 + (c + d), c^2, d^2, c^2, d^2, \ldots \tag{۴۷}$$

$$h_3 : 3 + (c + d) + (c^2 + d^2), c^3, d^3, c^3, d^3, \ldots$$

$$\vdots$$

$$h_n : 1 + \frac{c^n - 1}{c - 1} + \frac{d^n - 1}{d - 1}, c^n, d^n, c^n, d^n, \ldots.$$

گیریم $p > 0$. با استفاده از محاسبات مذکور به‌دست می‌آوریم

$$J^p(k) = \begin{cases} 3^p\,, & k = 0, \\ (2\,n + 2)^{2\,p}\, d^p, & k = 2\,n, \\ (2\,n + 1)^{2\,p}\, c^p, & k = 2\,n - 1, \end{cases} \tag{۴۸}$$

و

$$E(u^2 J^p)(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3^p + 9^p c^p + 16^p d^p), & k = 0,1,2, \\ 4\,n^{2\,p}(2\,n + 2)^{2\,p}\, d^p, & k = 2\,n, \\ (2\,n - 1)^2\,(2\,n + 1)^{2\,p}\, c^p, & k = 2\,n - 1. \end{cases} \tag{۴۹}$$

بنا بر قضیهٔ ۱۴، W عملگر p- پارانرمال است اگر و تنها اگر

$$3^p c^p + \left(\frac{16}{3}\right)^p d^p \geq 2. \tag{۵۰}$$

اما این نابرابری موقعی برقرار است که $c \in (0.5,\ \infty)$ و $d \in (0.2,\ \infty)$. حال تابع وزن دیگری را به‌صورت (۵۱) در نظر می‌گیریم

$$u(k) = \begin{cases} 1\,, & k = 0,1,2\,, \\ c\,, & \text{فرد}\ k \geq 3, \\ d\,, & \text{زوج}\ k \geq 3. \end{cases} \tag{۵۱}$$

در این‌صورت داریم:

$$J : 3, c^3, d^3, c^3, d^3, \ldots \tag{۵۲}$$

$$H_1 : 3, c^3, d^3, c^3, d^3, \ldots$$
$$H_2 : 3 + (c^3 + d^3), c^4, d^4, c^4, d^4, \ldots$$
$$H_3 : 3 + (c^3 + d^3) + (c^4 + d^4), c^5, d^5, c^5, d^5, \ldots$$
$$\vdots$$
$$H_n : 3 + \frac{c^{n+2} - c^3}{c - 1} + \frac{d^{n+2} - d^3}{d - 1}, c^{n+2}, d^{n+2}, c^{n+2}, d^{n+2}, \ldots.$$

اگر $c < \sqrt[3]{3}$ و $d < \sqrt[3]{3}$، آن‌گاه $\| J \|_\infty = 3$. چون به‌ازای هر $n \in N$، $\| H_n \|_\infty^{\frac{1}{n}} < 3$، از این‌رو، بنابر تذکر۲۳، W نمی‌تواند نرمالوئید باشد.

مثال ۳۵. فرض کنید μ اندازه لبگ روی زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ $X = [0, 1]$باشد. تبدیل اندازه‌پذیر $T: X \to X$ را با ضابطهٔ $T(x) = 2\,x(1 - x)$ در نظر می‌گیریم. چون T پیوسته و روی هیچ زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت از X ثابت نیست، یک تبدیل نامنفرد است، زیرا فرض کنید $E \subseteq X$ ای موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(T^{-1}(E)) > 0$. با توجه به این‌که فضای اندازه X غیراتمی است، پس مجموعه اندازه‌پذیر لبگی مانند $B \subseteq T^{-1}(E)$ با اندازه مثبت (و لزوماً شامل زیربازه‌ای) می‌توان یافت. پس $T(B) \subseteq E$ و $\mu\big(T(B)\big) = 0$، اما با توجه به پیوستگی تبدیل T نتیجه می‌گیریم که T روی B ثابت است.

محاسبات مستقیم نشان می‌دهد که برای $f \in L^2(\Sigma)$ داریم:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x}}\, \chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x) \tag{۵۳}$$
$$E(f)(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(1 - x)\right] \chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x)$$
$$hE(f) \circ T^{-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\,x}} \times \left\{f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\,x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\,x}\right)\right\} \chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x).$$

با در نظر گرفتن $u(x) = x - \frac{1}{2}$ و $p > 0$ به‌دست می‌آوریم:

$$J(x) = \frac{1}{4}\sqrt{1 - 2\,x}\ \chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x), \tag{۵۴}$$
$$E(u^2)(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\ \chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x)$$

و نهایتاً داریم:

$$E(u^2 J^p)(x) = \frac{4^{-(p+1)}}{2}\ (1 - 2\,x)^{\frac{p}{2}+2}\left[1 + (-1)^{\frac{p}{2}+2}\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x). \tag{۵۵}$$

حال اگر p عدد صحیح نامنفی و $\frac{p}{2} + 2$ عدد فردی باشد، آن‌گاه روی $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$، $E(u^2 J^p)(x) = 0$. در نتیجه W نمی‌تواند عملگر p- پارانرمال باشد. با این وجود اگر p عدد صحیح نامنفی و $\frac{p}{2} + 2$ عدد زوجی باشد، آن‌گاه W عملگر p- پارانرمال است. با توجه به نمودار تبدیل T، ملاحظه می‌شود که $\mu \circ T^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\right) = 0$، از این‌رو، روی بازه $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$، $h = 0$. بنابراین روی بازه $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ ضابطهٔ تصویر وارون تبدیل T به‌صورت $T^{-1}(x) = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\,x}$ مشخص می‌شود. از این‌رو، بنا بر لم ۲، داریم:

$$h(x) = \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\,x}\right)\right| + \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\,x}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x}}. \tag{۵۶}$$

حال مطابق شکل ۱، فرض کنید $0 \le a \le b \le \frac{1}{2}$، از این‌رو، بنا بر قضیهٔ تغییرمتغیر و قضیهٔ رادون–نیکودیم داریم

$$\int_{(a.b)} hE(f) \circ T^{-1} d\mu = \int_{(a.b)} E(f) \circ T^{-1} d\mu \circ T^{-1} \tag{۵۷}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.1.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.243]

$$= \int_{T^{-1}(a.b)} E(f) d\mu = \int_{T^{-1}(a.b)} f d\mu = \int_{T^{-1}(a.b)} f(x)\, dx.$$

اما با توجه به شکل ۱ و ضابطهٔ $T^{-1}(x)$،

$$\int_{T^{-1}(a.b)} f(x)\, d\mu = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2\,a}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2\,b}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2\,b}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2\,a}} f(x)dx. \tag{۵۸}$$

حال با اعمال تغییرمتغیر $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}$ در انتگرال اولی و $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}$ در انتگرال دومی، برابری بالا را به‌صورت (۵۹) ادامه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \int_{T^{-1}(a.b)} f(x)\, dx &= \int_a^b f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right)\frac{1}{2\sqrt{1-2\,t}}\, dt \\ &+ \int_a^b f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right)\frac{1}{2\sqrt{1-2\,t}}\, dt \\ &= \int_{(a.b)} \left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{1-2\,t}}\, dt. \end{aligned} \tag{۵۹}$$

در نتیجه داریم

$$\int_{(a.b)} h(x)E(f)\circ T^{-1}(x)dx = \int_{(a.b)} \left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,t}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{1-2\,t}}\, dt.. \tag{۶۰}$$

بنابراین

$$hE(f)\circ T^{-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-2\,x}}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,x}\right)\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x). \tag{۶۱}$$

حال می‌خواهیم ضابطهٔ تابع $E(f)$ را به‌دست آوریم. چون در بازه $\left[0,\ \frac{1}{2}\right)$ همواره $h > 0$، در نتیجه می‌توانیم آن را از طرفین برابری بالا حذف کنیم.

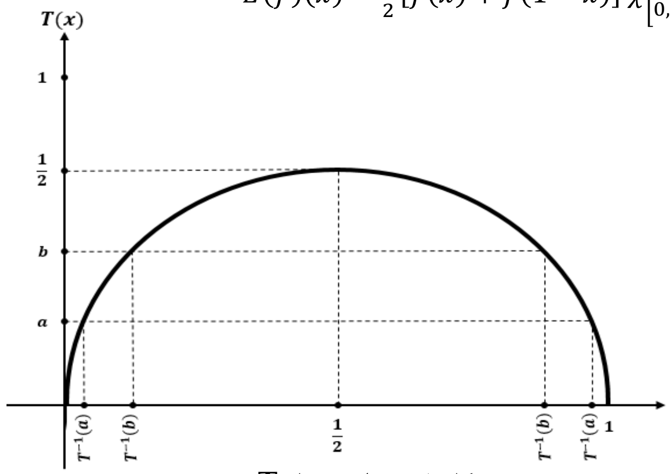
$$(f)\circ T^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,x}\right)\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x). \tag{۶۲}$$

حال با اثر دادن تبدیل T بر طرفین برابری مذکور و با توجه به ضابطهٔ T داریم:

$$\begin{aligned} E(f)(x) &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,T(x)}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2\,T(x)}\right)\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x) \\ &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\,x(1-x)}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\,x(1-x)}\right)\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x). \end{aligned} \tag{۶۳}$$

اما روی بازهٔ $\left[0,\ \frac{1}{2}\right)$، $\sqrt{1-4\,x(1-x)} = |2\,x-1| = -(2\,x-1)$ پس

$$E(f)(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(1-x)\right]\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right)}(x). \tag{۶۴}$$



شکل ۱. نمودار تبدیل T

مثال ۳۶. فرض کنید X مجموعه اعداد صحیح مثبت، Σ σ- جبر شامل تمام زیرمجموعه‌های X و μ اندازه جرم نقطه به‌صورت $k \in X$ و $\mu(k) := m_k$ باشد. تبدیل اندازه‌پذیر T با ضابطهٔ

$$T(k) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1 \\ k-1 & k \geq 2 \end{cases} \tag{۶۵}$$

و تابع وزن

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1 \\ k & k \geq 2 \end{cases} \tag{۶۶}$$

را در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$h(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-1}(k)} m_j, \tag{۶۷}$$

$$h_n(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-1}(k)} h_{n-1}(j)\, m_j,$$

$$J_n(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j \in T^{-n}(k)} (u(j))^2\, m_j,$$

و

$$J_1(0) = \frac{1}{m_0}(m_0 + m_1); \tag{۶۸}$$

$$J_n(0) = \frac{1}{m_0}(m_0 + m_1 + 2^2 m_2 + 3^2 m_3 + \cdots + n^2 m_n);$$

$$J_n(k) = \frac{m_{k+n}}{m_k}, \qquad k \geq 1.$$

به‌ویژه برای ثابت $a > 0$ و برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، قرار دهید $m_0 = \varepsilon$. برای $k \geq 1$ نیز قرار دهید

$$m_k = \frac{1}{k^2} \int_a^{a+\varepsilon} \left(t^k - t^{k-1}\right) dt. \tag{۶۹}$$

بنابراین طبق گزارهٔ ۳۱، W زیرنرمال است اگر و تنها اگر برای هر $k \geq 1$ دنباله‌های $\{m_0 + \sum_{i=1}^n i^2\, m_i\}_{n=0}^{+\infty}$ و $\{\frac{m_{k+n}}{m_k}\}_{n=0}^{+\infty}$ گشتاوری باشند. خوشبختانه هر دو دنباله اخیر، گشتاوری هستند، زیرا

$$m_0 + \sum_{i=1}^n i^2\, m_i = m_0 + \sum_{i=1}^n \int_a^{a+\varepsilon} \left(t^i - t^{i-1}\right) dt = \int_a^{a+\varepsilon} t^n\, dt \tag{۷۰}$$

و

$$\frac{m_{k+n}}{m_k} = \frac{1}{(k+n)^2\, m_k} \int_a^{a+\varepsilon} \left(t^{k+n} - t^{k+n-1}\right) dt \tag{۷۱}$$

$$= \int_a^{a+\varepsilon} t^n \left(\frac{t^k - t^{k-1}}{(k+n)^2\, m_k}\right) dt$$

$$= \int_a^{a+\varepsilon} t^n\, d\mu(t)$$

که در آن، $d\mu = \left(\frac{t^k - t^{k-1}}{(k+n)^2\, m_k}\right) dt$ یک اندازه مثبت روی $[a,\ a+\varepsilon]$ است. بنابراین W زیرنرمال است.

منابع

1. Antoniou I., Tasaki S., "Spectral decomposition of the Rnyi map", J. Phys. 26, No. 1 (1993) 9-73.
2. Azimi M. R., "Subnormality and weighted composition operators on L^2 spaces", Kyungpook Math. J. 55, No. 2 (2015) 345-353.

3. Burnap C., Jung I. B., "Composition operators with weak hyponormality", J. Math. Anal. Appl. 337, No. 1 (2008) 686-694.
4. Burnap C., Jung I. B., Lambert A., "Separation partial normality classes with composition operators", J. operator Theory 53, No. 2 (2005) 381-397.
5. Campbell J. T., Embry-Wardrop M., Fleming R. J., Narayan S. K., "Normal and quasinormal weighted composition operators", Glasgow Math. J. 33, No. 3 (1991) 275-279.
6. Campbell J. T., Hornor W. E., "Seminormal composition operators", J. Operator Theory 29, No. 2 (1993) 323-343.
7. Fujii M., Nakatsu Y., "On subclasses of hyponormal operators", Proc. Japan Acad. 51, No. 4 (1975) 243-246.
8. Furuta T., "Invitation to linear operators", Taylor & Francis, Ltd., London (2001).
9. Harringston D. J., Whitley R., "Seminormal composition operators", J. Operator Theory 11, No. 1 (1984) 125-135.
10. Herron J. D., "Weighted conditional expectation operators of L^p space", Thesis (Ph.D.)-The University of North Caolina at Charlotte. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI (2004).
11. Hoover T., Lambert A., Quinn J., "The Markov procces determined by a weighted composition operator", Studies Math. 72, Nno. 3 (1982) 225-235.
12. Jabbarzadeh M. R., Azimi M.R., "Some weak hyponormal classes of weighted composition operators", Bull. Korean Math. Soc. 47, No. 4 (2010) 793-03.
13. Kumar R., "Ascent and descent weighted composition operators on Lp-spaces", Math. Vesnik, 60 (2008) 47-51.
14. Lambert A., "Subnormal composition operators", Proc. Amer. Math. Soc. 103, No. 3 (1988) 750-754.
15. Lambert A., "Hyponormal composition operators", Bull. London Math. Soc. 18, No. 4, (1986) 395-400.
16. Lambert A., "Subnormality and weighted shifts", Bull. Lond. Math. Soc., 14(2) (1976) 476-480.
17. Miyajima S., Saito I., "∞-hyponormal operators and their spectral properties", Acta Sci. Math. (Szeged) 67, No. 1-2 (2001) 357-371.
18. Rao M. M., "Conditional measures and applications", Second edition. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 271. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2005).
19. Singh R. K., Manhas J. S., "Composition operators on function spaces", North-Holland Mathematics Studies, 179. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1993).
20. Whitley R., "Normal and quasinormal composition operators", Proc. Amer. Math. Soc.70, No. 2 (1978) 114-118.
21. Yamazaki T., Yanagida M., "A further generalization of paranormal operators", Sci. Math. 3, No. 1 (2000) 23-31.