روش برون‌یابی برای حل عددی یک مدل بیماری‌های عفونی بومی

بهمن بابایار رازلیقی؛ دانشگاه صنعتی قم، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله یک مدل بیماری عفونی را که به شکل دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی است در نظر می‌گیریم. این مدل از نوع مدل SIR است. روش برون‌یابی به‌سوی حد ریچاردسون را برای حل این سیستم طوری طراحی می‌کنیم که با یک فرایند تکرار، سیستم غیرخطی با درجهٔ دقت خوب قابل حل باشد. الگوریتم حل چنین سیستم‌هایی به‌طور کامل تشریح می‌شود. این الگوریتم دارای نوعی ساختار تو در تو است که باعث می‌شود از اطلاعات پیشین در زمان‌های بعدی بتوان استفاده کرد و همین امر برنامه‌نویسی این الگوریتم را جالب کرده است. این الگوریتم با هر زبان سطح بالا قابل برنامه‌نویسی است، که ما این فرآیند را با زبان برنامه‌نویسی *Mathematica* انجام داده‌ایم. تحلیل خطا هم از دیدگاه تئوری آنالیز عددی و هم با استفاده از چند مثال نمونه به‌طور شفاف نشان داده شده است، برای این منظور طیفی از نمونه مسائلی را با استفاده از تبدیلات لاپلاس طراحی کردیم که جواب تحلیلی داشته باشند.

واژه‌های کلیدی: روش برون‌یابی، بیماریهای عفونی، کلاس مستعد، کلاس عفونت‌زا، کلاس مصون، دستگاه انتگرالی ولترای غیر خطی.

مقدمه

بسیاری از بیماری‌های عفونی در یک جمعیت بومی هستند، یعنی برای چندین سال موجودیت خود را حفظ می‌کنند. فرض کنید اندازهٔ جمعیت ثابت است و جمعیت یک‌نواخت و به‌طور همگن توزیع شده است. جمعیت بررسی شده به چندین کلاس تقسیم‌بندی می‌شود، که با زمان تغییر می‌کند و این کلاس‌ها عبارتند از: کلاس $\boldsymbol{S(t)}$ شامل آن‌هایی که آلودگی در آن‌ها می‌تواند شروع شود، کلاس $I(t)$ آن‌هایی هستند که آلوده شده‌اند و کلاس $R(t)$ آن‌هایی هستند که مصونیت دائمی یافته‌اند. این مدل، مدل SIR نامیده می‌شود و به‌وسیلهٔ دستگاه معادلات انتگرالی ولترای نوع دوم غیرخطی زیر قابل نمایش است [۱].

$$\begin{cases} I(\mathrm{t}) = \mathrm{I}_0(\mathrm{t})e^{-\mu t} + \int_0^t \beta S(\tau)I(\tau)P(\mathrm{t}-\tau)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau, \\ R(\mathrm{t}) = \left[R_0 + I_0(0) - I_0(\mathrm{t}) - \varphi\right]e^{-\mu t} + \varphi + \int_0^t S(\tau)\left[\beta I(\tau)\left(1-P(\mathrm{t}-\tau)\right)+\theta\right]e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau, \quad (1) \\ S(t)+I(t)+R(t)=1, \quad t>0. \end{cases}$$

در این‌جا $S, \mathrm{I}, \mathrm{R}$ توابع مجهول هستند. عدد ثابت نرخ تماس β میانگین تماس‌های یک آلوده کننده در واحد زمان است. بنابراین افراد در معرض آلودگی با نرخی برابر βS به لیست افراد آلوده اضافه می‌شوند. $P(t)$ احتمال پا

*نویسنده مسئول babayar@qut.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

برجا بودن شیوع بیماری، t واحد زمان پس از شروع شیوع بیماری است. به‌علاوه $P(t)$ یک تابع ناصعودی با $P(0)=1$ و $P(\infty)=0$ است که تحت تسلط یک تابع نمایی میرا است. این شرایط $P(t)$های متفاوتی را به‌دست می‌دهد مثلاً دوره‌های شیوع ثابت (یک تابع ناصعودی تکه تکه پیوسته و ثابت در هر بازهٔ پیوستگی)، دوره‌های شیوع نمایی، هم‌چنین دوره‌های شیوع با توزیع‌های گاما (به‌عنوان مثال توزیع‌های گاما از فصل ۶ [۲] را ملاحظه کنید.) نسبت اولیهٔ مصون از آلودگی، به‌صورت $R_0 \geq 0$ بوده است و $I_0(t)e^{-\mu t}$ کسری از جامعه هستند که از اوّل عفونی بوده است و هنوز هم در لحظهٔ t از شیوع بیماری زنده‌اند. $I_0(t)$ یک تابع ناصعودی معلوم با $I_0(0)>0$ و $I_0(t)\leq I_0(0)P(t)$ است و از این رو، $I_0(t)$ به‌سمت صفر میل می‌کند وقتی که $t\to\infty$. ایمن‌سازی فعّال در مدل بدین‌معنی است که واکسن یا توکسوئید (شبه سم) وارد مدل شده است و کسر φ از نوزادان ایمن شده‌اند، بنابراین میزان شارش (فلوی) نوزادان ایمن شده به کلاس مصون یافته، برابر $\varphi\mu$ است. ایمن‌سازی کلاس در معرض آلودگی، با نرخ $\theta S(t)$ انجام می‌گیرد. این ایمن‌سازی با یک ایمن‌سازی عمومی برای افراد در معرض آلودگی، با هر سنی مطابقت دارد.

مدل‌سازی، وجود، یکتایی، و تحلیل پایداری دستگاه معادلات ولترای (۱) به‌وسیلهٔ برخی از نویسندگان بررسی شده است [۱]، [۳]، [۴]. در این مقاله الگوریتمی ارائه می‌شود که ابتدا جواب سیستم غیرخطی (۱) به‌وسیلهٔ روش ذوزنقه‌ای مرکب برآورد اولیه شده، سپس این برآورد خام به‌وسیلهٔ برون‌یابی رامبرگ دقیق‌تر می‌شود. این فرایند طوری طراحی شده است که سیستم کوپل شده (۱) را تحت تسلط خود قرار دهد.

روش‌های زیادی برای حل سیستم‌های ولترا ارائه شده است، که بسته به خطی و غیرخطی بودن و هم‌چنین تکین یا غیرتکین بودن معادلات متفاوت است. به‌عنوان مثال روش انتگرال‌گیری ضربی [۵]-[۹]، روش موجک‌ها [۱۰]، [۱۱]، روش‌های هم‌محلی [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] و... با توجه به ساختار مسئله متفاوتند. با توجه به ساختار غیرخطی و غیرتکین معادلات (۱)، خواهیم دید روش ارائه شده دراین مقاله؛ یک روش کاملاً مناسب در این گونه مسائل است.

روش برون‌یابی برای حل دستگاه معادلات ولترای غیر خطی

در این بخش روش برون‌یابی برای حل دستگاه غیرخطی زیر تشریح می‌شود:

$$X(t)-\int_0^t K(t,\tau,X(\tau))\,d\tau = r(t), \qquad t>0, \tag{۲}$$

که در آن $X(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_d(t)\right)^T$ تابع برداری مجهول، K هسته پیوسته به‌صورت

$$K(t,\tau,X(\tau))=\left(k_1(t,\tau,X(\tau)),\ldots,k_d(t,\tau,X(\tau))\right)^T$$

و $\boldsymbol{r}$ تابع برداری مقدار معلوم سمت راست به‌صورت $r(t)=\left(r_1(t),\ldots,r_d(t)\right)^T$ است. به‌ازای $n_0\in\mathbb{N}$، معادلهٔ (۲) را در بازهٔ $t\in[0,n_0]=\bigcup_{k=1}^{n_0}[k-1,k]$ حل می‌کنیم. برای این منظور هر بازه جزء $[k-1,k]$ را به N زیربازهٔ مساوی با طول گام $\boldsymbol{h}=\frac{1}{N}$ تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم به‌ازای $n\in I_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$ مسئله در $t\in[0,n]$ حل شده است و می‌خواهیم مسئله را در $t\in[n,n+1]$ حل کنیم. برای این منظور معادلهٔ (۲) را در نقاط $t_{n,i}=n+ih, i=1,\ldots,N$ می‌نویسیم: (۳)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

$$\mathrm{X}\left(t_{n,i}\right)-\int_{0}^{t_{n,i}}K\left(t_{n,i},\tau,X\left(\tau\right)\right)d\tau=r\left(t_{n,i}\right), \qquad (۳)$$

و یا

$$\mathrm{X}\left(t_{n,i}\right)-\int_{t_n}^{t_{n,i}}K\left(t_{n,i},\tau,X\left(\tau\right)\right)d\tau=r\left(t_{n,i}\right)+F_n\left(t_{n,i}\right). \qquad (۴)$$

که در آن $t_n=t_{n-1,N}=n$ و

$$F_n\left(t_{n,i}\right)=\int_{0}^{t_n}K\left(t_{n,i},\tau,X\left(\tau\right)\right)d\tau, \qquad (۵)$$

جمله پیشین نامیده می‌شود. $\boldsymbol{F_0\equiv 0}$ و به ازای $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ با استفاده از قاعده انتگرال گیری ذوزنقه‌ای مرکب داریم

$$\begin{aligned}F_n\left(t_{n,i}\right)&\approx\frac{h}{2}\Big(K\left(t_{n,i},0,r\left(0\right)\right)+K\left(t_{n,i},t_n,X_{n-1,N}\right)\Big)+\\&h\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{N}K\left(t_{n,i},t_{l,j},X_{l,j}\right)+h\sum_{j=1}^{N-1}K\left(t_{n,i},t_{n-1,j},X_{n-1,j}\right)=:\tilde{F}_n\left(t_{n,i}\right).\end{aligned} \qquad (۶)$$

در رابطهٔ مذکور به‌ازای $\boldsymbol{n=1}$ سیگمای مضاعف برابر صفر است. انتگرال سمت چپ معادلهٔ (۴) به‌صورت رابطهٔ (۷) تقریب می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n,i}}K\left(t_{n,i},\tau,X\left(\tau\right)\right)d\tau&\approx\frac{h}{2}\Big(K\left(t_{n,i},t_n,X_{n-1,N}\right)+K\left(t_{n,i},t_{n,i},X_{n,i}\right)\Big)\\&+h\sum_{j=1}^{i-1}K\left(t_{n,i},t_{n,j},X_{n,j}\right),\end{aligned} \qquad (۷)$$

که در آن $i=1,\dots N$ و به ازای $\boldsymbol{i=1}$ سیگمای سمت راست برابر صفر است. با جای‌گذاری تقریب‌های (۶) و (۷) در معادلهٔ (۴) ، دستگاه معادلات (۸) را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}X_{n,i}&=r\left(t_{n,i}\right)+\tilde{F}_n\left(t_{n,i}\right)+\frac{h}{2}\Big(K\left(t_{n,i},t_n,X_{n-1,N}\right)+K\left(t_{n,i},t_{n,i},X_{n,i}\right)\Big)\\&+h\sum_{j=1}^{i-1}K\left(t_{n,i},t_{n,j},X_{n,j}\right),\quad i=1,\dots,N.\end{aligned} \qquad (۸)$$

دستگاه معادلات (۸) شامل N معادله با N مجهول $X_{n,i},i=1,\dots,N$ است و برای حل آن از روش تکرار (۹) استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}X_{n,i}^{(m)}&=r\left(t_{n,i}\right)+\tilde{F}_n\left(t_{n,i}\right)+\frac{h}{2}\Big(K\left(t_{n,i},t_n,X_{n-1,N}\right)+K\left(t_{n,i},t_{n,i},X_{n,i}^{(m-1)}\right)\Big)\\&+h\sum_{j=1}^{i-1}K\left(t_{n,i},t_{n,j},X_{n,j}\right),\qquad i=1,\dots,N,\ m=1,2,\dots,\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $X_{n,1}^{(0)}=X_{n-1,N},\ X_{n,i}^{(0)}=X_{n,i-1}$ و روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که به‌ازای $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ مفروض و به حد کافی کوچک $\left|X_{n,i}^{(m)}-X_{n,i}^{(m-1)}\right|<\varepsilon$، و به‌ازای چنین mای قرار می‌دهیم $X_{n,i}=X_{n,i}^{(\mathrm{m})}$. البته شرط توقف دیگری هم می‌توان قرار داد، مثلاً می‌توانیم روند را تاجایی ادامه دهیم که به‌ازای عددی طبیعی مانند n_1 داشته باشیم $m\le n_1$. جوابی که به وسیلهٔ (۹) به‌دست می‌آید، جواب اولیه است که باید روش برون‌یابی برایش اِعمال شود. در الگوریتم زیر این روش را به تعداد n_2 بار اِعمال کرده‌ایم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

۱. الگوریتم

مرحلهٔ ۱: اعداد طبیعی N, n_2, n_1, n_0، داده‌های $t \in [0, n_0], \mathrm{I}_0(t), \mathrm{P}(t), \varepsilon > 0$ و توابع برداری

$$\mathrm{r}(t) = \left(r_1(t), \ldots, \mathrm{r}_d(t)\right)^T, K(t, \tau, \mathrm{X}(\tau)) = \left(\mathrm{k}_1(t, \tau, \mathrm{X}(\tau)), \ldots, \mathrm{k}_d(t, \tau, \mathrm{X}(\tau))\right)^T, t \in [0, n_0]$$

را در نظر می‌گیریم (توضیح این‌که n_0 برابر تعداد بازه‌های واحد است که الگوریتم بازه به بازه جواب را دنبال می‌کند تا نهایتاً جواب کلی را ارائه دهد. n_1 برابر تعداد انجام مراحل ۳ است که برای توقف این مرحله می‌تواند به‌کار رود. برای انعطاف الگوریتم در مرحلهٔ ۳ از خطای مطلق برای شرط توقف استفاده کرده‌ایم. شرط توقف‌های دیگری هم می‌توان استفاده کرد. مثلاً از خطای نسبی برای شرط توقف می‌توان استفاده کرد. عدد n_2 برابر با تعداد برون یابی‌های مورد استفاده در مرحلهٔ ۴ و عدد d برابر با بعد دستگاه معادلات است. در هر بازهٔ واحد N تقریب به‌دست می‌آید.)

مرحلهٔ ۲: قرار بده $\mathrm{P}_j = \{(0, \mathrm{r}_j(0))\}, \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{d}$ و $X_0 = r(0)$

مرحلهٔ ۳: در این مرحله رویّهٔ $T(n, a, b, X)$ را تعریف می‌کنیم. این رویّه جواب تقریبی معادله انتگرالی $X(t) = r(t) + \int_a^t K(t, \tau, X(\tau))d\tau$ در نقاط گرهی $a + ih,\ i = 1, \ldots, n,\ h = \frac{b-a}{n}$ با نقطه اولیه $X(a) = X$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مرکب برمی‌گرداند. یعنی خروجی تقریبی برای بردار $[X(a), X(a+$ ***h,…,Xa+nhT*** است. این رویّه بدین‌صورت طراحی می‌شود:

گام ۱. یک محیط محلی با متغیر محلی V تعریف می‌کنیم.

گام ۲. قرار می‌دهیم $V = [X, X, \ldots, X]^{\boldsymbol{T}}$ که در آن V یک بردار ستونی $n+1$تایی است. عضو Vام $\boldsymbol{i}$ را با V_i نمایش می‌دهیم. به‌علاوه قرار می‌دهیم $m = 0$ و $V_2^{(0)} = X$.

گام ۳. قرار می‌دهیم

$V_2^{(m+1)}$

اگر $\left|V_2^{(m+1)} - V_2^{(m)}\right| < \varepsilon$ قرار بده $V_2 = V_2^{(m+1)},\ i = 2$ اگر نه یک واحد به m اضافه می‌کنیم و به ابتدای گام ۳. *برمی‌گردیم*

گام ۴. قرار می‌دهیم $V_{i+1}^{(0)} = V_i\ ,\quad m = 0$

گام ۴-۱. قرار می‌دهیم:

$$V_{i+1}^{(m+1)} = r\left(a + ih\right) + h\overset{i-1}{\underset{j=1}{\mathring{a}}} K\left(a + ih, a + jh, V_{j+1}\right) + \frac{h}{2}\left\{K\left(a + ih, a, X\right) + K\left(a + ih, a + ih, V_{i+1}^{(m)}\right)\right\}$$

اگر $\left|V_{i+1}^{(m+1)} - V_i^{(m)}\right| < \varepsilon$ قرار می‌دهیم $V_{i+1} = V_i^{(m+1)}$ اگر نه یک واحد به m اضافه می‌کنیم و به ابتدای گام ۴-۱ برمی‌گردیم.

اگر $i \le n$ یک واحد به $\boldsymbol{i}$ اضافه می‌کنیم و به گام ۴ می‌رویم.

گام ۵. بردار V را به‌عنوان خروجی $T(n, a, b, X)$ ارائه می‌کنیم.

مرحلهٔ ۴. $k = 1$

گام ۱. به‌ازای $i = n_2 = 0$ تا $\boldsymbol{i}$ قرار می‌دهیم $R(i, 0) = T(2^i N, k-1, k, X_0)$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

گام ۲. $\boldsymbol{\rho = \frac{1}{1-4^{-j}}}$ و به‌ازای $\boldsymbol{i = 0}$ تا $\mathrm{i} = \mathrm{n}_2 - j$ قرار می‌دهیم:

$$R(i,j) = \rho R(i+1, j-1) + (1-\rho)R(i, j-1)$$

اگر $\boldsymbol{j < n_2}$ یک واحد به $\boldsymbol{j}$ اضافه می‌کنیم و به گام ۲ می‌رویم.

گام ۳: $X_0 = (R(0,n_2))_{N+1}$ یعنی $(N+1)$امین عنصر بردار $\boldsymbol{R(0,n_2)}$ را در X_0 می‌گذاریم.

گام ۴. به‌ازای $j = 1, \dots, d$ نقاط $\left\{\left(k-1+\frac{i}{N}, \left(\left(R(0,n_2)\right)_{i+1}\right)_j\right), i = 1, \dots, N\right\}$ را به مجموعهٔ نقاط $\boldsymbol{P_j}$ اضافه می‌کنیم.

گام ۵.

$$r(t) = r(t) + \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(K\left(t, k-1+\frac{i+1}{N}, \left(R(0,n_2)\right)_{i+2}\right) + K\left(t, k-1+\frac{i}{N}, \left(R(0,n_2)\right)_{i+1}\right)\right)$$

اگر $\boldsymbol{k < n_0}$، یک واحد به $\boldsymbol{k}$ اضافه می‌کنیم و به گام ۱ میرویم.

مرحلهٔ ۵. مجموعهٔ نقاط $t_{n,i} = n + ih,\ n = 0, \dots, n_0,\ j = 1, \dots, d$، جواب P_jها در نقاط شبکه‌ای $\boldsymbol{x_j}$ هستند. $\boldsymbol{i = 0, \dots, N}$

۲. شرح الگوریتم

سه مرحلهٔ اول مربوط به‌روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب است، که قبلاً شرح داده شده است. در این بخش به شرح روش برون‌یابی به‌سوی حد می‌پردازیم که در واقع همان مرحلهٔ ۴ است. شمارندهٔ k در ابتدای مرحلهٔ ۴ برای تعداد بازه‌های به‌صورت $[k-1, k]$ است. گام‌های ۱ تا ۴ الگوریتم رامبرگ را برای افزایش دقت محاسبات در بازهٔ به کار می‌گیرند. این الگوریتم همان الگوریتم ۱.۷ از صفحه ۱۷۱ کتاب آنالیز عددی فیلیپس تیلر [۱۵] است، با این تفاوت که در این‌جا همان ایده‌ها به‌صورت برداری توسیع یافته و بازه به بازه به‌هم وصل شده‌اند. چنان‌که در [۱۵] آمده، هر بار انجام الگوریتم مرتبه هم‌گرایی را ۲ واحد بالا می‌برد. با این حال پایداری و هم‌گرایی الگوریتم را به [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

هر چند این الگوریتم با هر زبان برنامه‌نویسی، قابل برنامه‌نویسی است ولی با توجه به امکانات و توانائی‌های نرم‌افزار *Mathematica* به‌ویژه در محیط‌های محلی، ، برنامه‌ها با این نرم افزار نوشته شده است. مرحلهٔ ۴-۵، تابع سمت راست برای بازهٔ بعدی را فراهم می‌کند. در واقع داده‌های بازهٔ فعلی جمله پیشین برای بازهٔ بعدی است. با وصل کردن نقاط موجود در مجموعهٔ P_j در مرحله ۵ به هم‌دیگر، تابعی به‌دست می‌آید که برآورد تابع x_j در بازهٔ $[0, \mathrm{n}_0]$ است.

آماده‌سازی مدل برای حل عددی

در این بخش مدل (1.1) را به شکل معادله (2.1) می‌نویسیم تا برای حل عددی مهیا شود. برای این منظور $S(t)$ را به‌صورت $S(t) = 1 - I(t) - R(t)$ می‌نویسیم تا بُعد دستگاه معادلات برابر عدد ۲ شود. تعریف می‌کنیم:

$$r(t) = \left(r_1(\mathrm{t}), r_2(\mathrm{t})\right)^T, X(t) = \left(x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t})\right)^T, K(\mathrm{t}, \tau, \mathrm{X}(\tau)) = \left(\mathrm{k}_1(\mathrm{t}, \tau, \mathrm{X}(\tau)), \mathrm{k}_2(\mathrm{t}, \tau, \mathrm{X}(\tau))\right)^T,$$

که در آن

$$r_1(t) = I_0(\mathrm{t})e^{-\mu t}, r_2(t) = \varphi + \left(R_0 + I_0(0) - I_0(t) - \varphi\right)e^{-\mu t},$$
$$x_1(\mathrm{t}) = \mathrm{I}(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}) = \mathrm{R}(\mathrm{t}),$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

$$k_1(\mathrm{t},\tau,\mathrm{X}(\tau))=\beta\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)x_1(\tau)P(\mathrm{t}-\tau)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)},$$
$$k_2(\mathrm{t},\tau,\mathrm{X}(\tau))=\beta\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)x_1(\tau)\big[1-P(\mathrm{t}-\tau)\big]e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}+\theta\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}.$$

نتایج عددی

۱. طراحی نمونه مسئله

حل تحلیلی مسئله با داده‌های بخش ۳، جز در موارد بسیار خاص ممکن نیست از این‌رو، حل عددی این گونه مسائل امری اجتناب‌ناپذیر است. در این قسمت یکی از این موارد خاص را بررسی می‌کنیم، تا بتوانیم نمونه مسائلی را برای مقایسه و تحلیل خطا طراحی کنیم. برای این منظور معادلهٔ (۲) برای مدل را به‌صورت (۱۰) در نظر می‌گیریم:

$$\big(I-T\big)X(t)=r(t), \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$T(X(t))=\begin{bmatrix}T_1(\mathrm{X(t)})\\T_1(\mathrm{X(t)})\end{bmatrix}=\int_0^t K(t,\tau,X(\tau)d\tau, \qquad (۱۱)$$

و کمیت‌های K, X, r مطابق بخش ۳ تعریف می‌شوند. با تعریف مذکور

$$T_2(X(t))=\int_0^t\big(\beta x_1(\tau)+\theta\big)\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau-T_1(X(t)). \qquad (۱۲)$$

دومین مؤلفهٔ (۱۰) به‌صورت (۱۳) است

$$x_2(t)-\int_0^t\big(\beta x_1(\tau)+\theta\big)\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau+T_1(X(t))=r_2(t). \qquad (۱۳)$$

پس

$$T_1(X(t))=r_2(t)-x_2(t)+\int_0^t\big(\beta x_1(\tau)+\theta\big)\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau. \qquad (۱۴)$$

هم‌چنین مؤلفهٔ اول (۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$T_1(X(t))=x_1(t)-r_1(t). \qquad (۱۵)$$

پس بنا به (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$x_1(t)-r_1(t)=r_2(t)-x_2(t)+\int_0^t\big(\beta x_1(\tau)+\theta\big)\big(1-x_1(\tau)-x_2(\tau)\big)e^{-\mu(\mathrm{t}-\tau)}d\tau. \qquad (۱۶)$$

از طرفین رابطهٔ (۱۶) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\beta}{s+\mu}Lx_1\big(1-x_1-x_2\big)=\left(1+\frac{\theta}{s+\mu}\right)\big(X_1(s)+X_2(s)\big)-L\big(r_1+r_2\big)-\frac{\theta}{s(s+\mu)}, \qquad (۱۷)$$

که در آن $X_i(s)=L\big(x_i(t),t,s\big), i=1,2$ تبدیل لاپلاس تابع $x_i(t)$ است که برحسب متغیر s نمایش داده شده است. به‌ازای $P(t)=e^{-\mu t}$ و با استفاده از قضیه پیچش در تبدیلات لاپلاس

$$LT_1(X(t))=\left(\frac{s+\mu+\theta}{s+2\mu}\right)\big(X_1(s)+X_2(s)\big)-\left(\frac{s+\mu}{s+2\mu}\right)L\big(r_1+r_2\big)-\frac{\theta}{s\big(s+2\mu\big)}. \qquad (۱۸)$$

هم‌چنین بنا به (۱۵):

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

$$LT_1(X(t)) = X_1(s) - L(r_1). \quad (۱۹)$$

از طرفی بنا به (۱۰):

$$X_2(s) = L(r_2) + LT_2(X(t)). \quad (۲۰)$$

با جای‌گذاری (۱۸) در رابطهٔ مذکور و با توجه به (۱۲) داریم:

$$X_2(s) = \frac{F(s) - (\theta - \mu)\mathrm{X}_1(s)}{s + \mu + \theta}, \quad (۲۱)$$

که در آن

$$F(s) = -\mu L r_1 + (\mathrm{s} + \mu) L r_2 + \frac{\theta}{s}. \quad (۲۲)$$

معادله (۱۷) را به‌صورت (۲۳) بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \beta L x_1 x_2 &= (s + \mu + \theta)\big(X_1(s) + X_2(s)\big) - (s + \mu) L(r_1 + r_2) - \frac{\theta}{s} + \beta L x_1 (1 - \mathrm{x}_1) \\ &= X_1(s)(\beta - 2\mu - \mathrm{s}) - \beta L x_1^2 + (\mathrm{s} + 2\mu)\,\mathrm{Lr}_1. \end{aligned} \quad (۲۳)$$

در رابطه مذکور سطر دوم، از رابطهٔ (۲۱) استفاده کرده‌ایم. برای به‌دست آوردن یک طیف از نمونه مسائل، تابع x_1 را به‌صورت (۲۴) در نظر می‌گیریم

$$x_1(t) = x_0(t) + r_1(t). \quad (۲۴)$$

x_0 را باید چنان به‌دست آوریم که $X_1(s)(\beta - 2\mu - s)$ در معادلهٔ (۲۳) موجود باشد. از این‌رو، لازم است تابعی مانند $F_0(s)$ چنان باشد که

$$X_0(s)(\beta - 2\mu - s) = F_0(s) = L\big(f_0(t)\big). \quad (۲۵)$$

پس بنا به پیچش تبدیلات لاپلاس

$$X_0(s) = \frac{-F_0(s)}{(\beta - 2\mu - s)} = -F_0(s) L\left(e^{-(\beta - 2\mu)t}\right) = -L\int_0^t f_0(\tau) e^{-(\beta - 2\mu)(t-\tau)} d\tau.$$

از این‌رو،

$$x_0(t) = -\int_0^t f_0(\tau) e^{-(\beta - 2\mu)(t-\tau)} d\tau. \quad (۲۶)$$

با جای‌گذاری $F_0(s)$ در (۲۳) داریم:

$$\beta L x_1 x_2 = F_0(s) - \beta L x_1^2 + (\mathrm{s} + 2\mu)\,\mathrm{Lr}. \quad (۲۷)$$

معادلات (۲۶) و (۲۷) اساس کار ما در پیدا کردن نمونه مسئله خواهند بود. بنا به معادلات بخش۳

$$Lr_2(t) = L\left\{\varphi + \left(R_0 + I_0(0) - I_0(t) - \varphi\right) e^{-\mu t}\right\} = \frac{\varphi}{s} + \frac{R_0 + I_0(0) - \varphi}{s + \mu} - Lr_1(t). \quad (۲۸)$$

با جای‌گذاری (۲۲) و (۲۸) در (۲۰) داریم:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= -Lr_1 + L\left\{(R_0 + I_0(0)) e^{-(\mu+\theta)t}\right\} + L e^{-(\mu+\theta)t} L\left\{\mu\varphi + \theta + (\mu - \theta) x_0\right\} \\ &= L\left\{-r_1 + (R_0 + I_0(0)) e^{-(\mu+\theta)t} + \int_0^t \left[\mu\varphi + \theta + (\mu - \theta) x_0(\tau)\right] e^{-(\mu+\theta)(t-\tau)} d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (۲۹)$$

در رابطهٔ (۲۹) تنها پارامتر مجهول عبارت است از $\gamma = I_0(0)$، پس:

$$x_2(t) = -r_1 + f_1(t; \gamma), \quad (۳۰)$$

که در آن

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

$$f_1(t;\gamma)=(R_0+\gamma)e^{-(\mu+\theta)t}+\int_0^t\left[\mu\varphi+\theta+(\mu-\theta)x_0(\tau)\right]e^{-(\mu+\theta)(t-\tau)}d\tau. \qquad (۳۱)$$

با جای‌گذاری (۲۴) و (۳۰) در (۲۳) و محاسبهٔ Lr_1 داریم:

$$Lr_1(t)=L\left\{\frac{f_0(t)/\beta-\left[x_0(t)\right]^2-x_0(t)\,f_1(t;\gamma)}{f_1(t;\gamma)+x_0(t)-1}\right\}. \qquad (۳۲)$$

با توجه به رابطهٔ (۳۲) و $r_1(t)=I_0(t)e^{-\mu t}$، داریم:

$$\gamma=r_1(0)=\frac{f_0(0)/\beta-\left[x_0(0)\right]^2-x_0(0)\,f_1(0;\gamma)}{f_1(0;\gamma)+x_0(0)-1}=\frac{f_0(0)}{\beta\left(R_0+\gamma-1\right)}. \qquad (۳۳)$$

پس γ باید در معادلهٔ (۳۴) صدق کند:

$$\gamma^2+(R_0-1)\gamma-\frac{f_0(0)}{\beta}=0. \qquad (۳۴)$$

از این‌رو، باید درجه‌های آزادی $R_0,\beta,f_0(0)$ را در نمونه مسئله‌ها چنان انتخاب کنیم که معادلهٔ (۳۴) جوابی در بازه $(0,1)$ داشته باشد، زیرا $\gamma=I_0(0)$ نسبت افراد جامعه است.

مثال ۱: به‌ازای

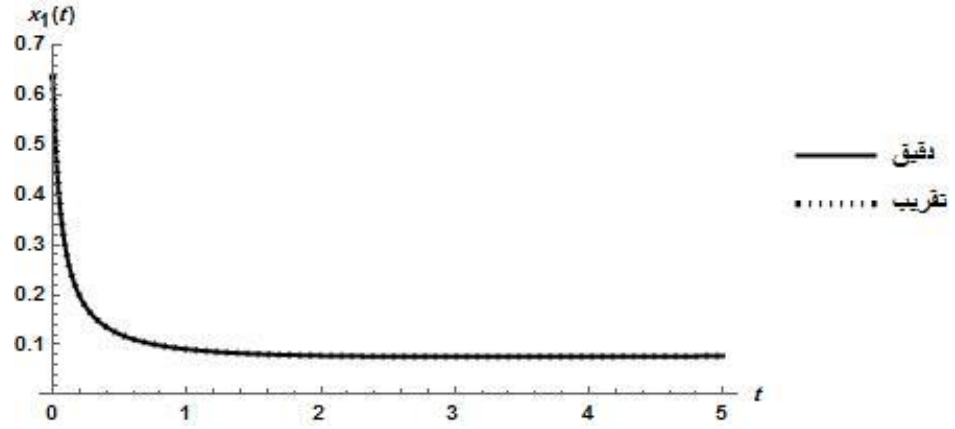
$$\mu=1,\varphi=\frac{1}{2},\theta=\frac{1}{3},\beta=\frac{1}{2},\mathrm{R}_0=\frac{1}{3},P(t)=e^{-\mu t},\ f_0(t)=-\frac{1}{100},\gamma=\frac{1}{30}\left(10+\sqrt{82}\right)$$

جواب‌های دقیق مدل از روابط (۲۴) و (۳۰) به‌دست می‌آیند. روش برون‌یابی با $X_0=r(0)$ را به‌کار برده و جواب‌های تقریبی را مطابق شکل‌های ۱ و ۲ به‌دست آوردیم. نمودار نقطه چین جواب عددی و نمودار پیوسته جواب تحلیلی را نشان می‌دهد. در این مثال $n_0=5$.

مثال ۲: به‌ازای

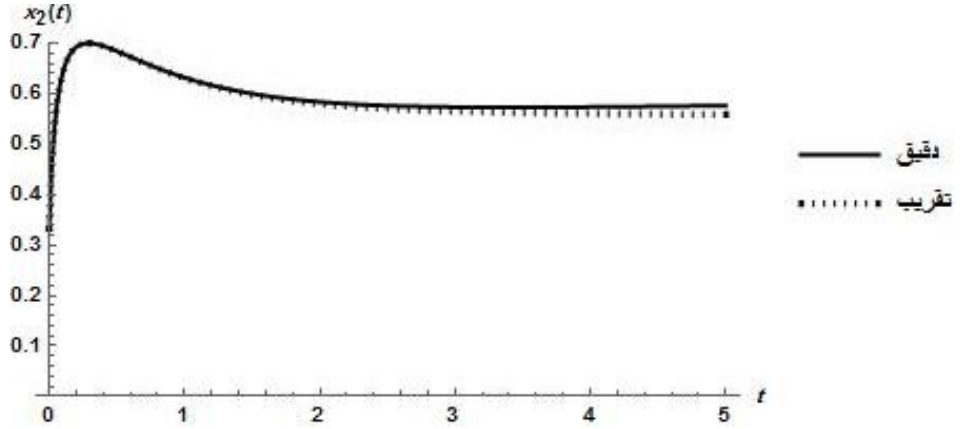
$$\mu=\frac{1}{2},\varphi=\frac{1}{3},\theta=\frac{1}{4},\beta=\frac{1}{3},\mathrm{R}_0=\frac{1}{4},P(t)=e^{-\mu t},\ f_0(t)=-\frac{1}{100},\gamma=\frac{1}{40}\left(15-\sqrt{177}\right)$$

جواب‌های دقیق مدل از روابط (۲۴) و (۳۰) به‌دست می‌آیند. روش برون‌یابی با $X_0=r(0)$ را به‌کار برده و جواب‌های تقریبی را مطابق شکل‌های ۳ و ۴ به‌دست آورده‌ایم. نمودار نقطه چین جواب عددی و نمودار پیوسته جواب تحلیلی را نشان می‌دهد. در این مثال $n_0=4$.

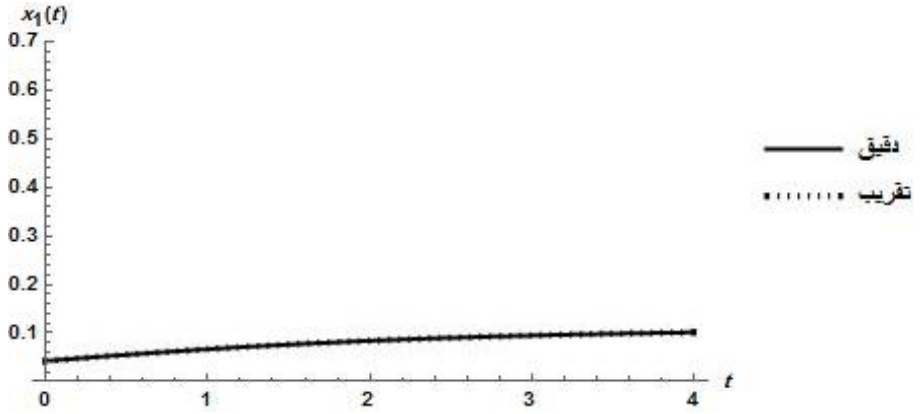


شکل ۱

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

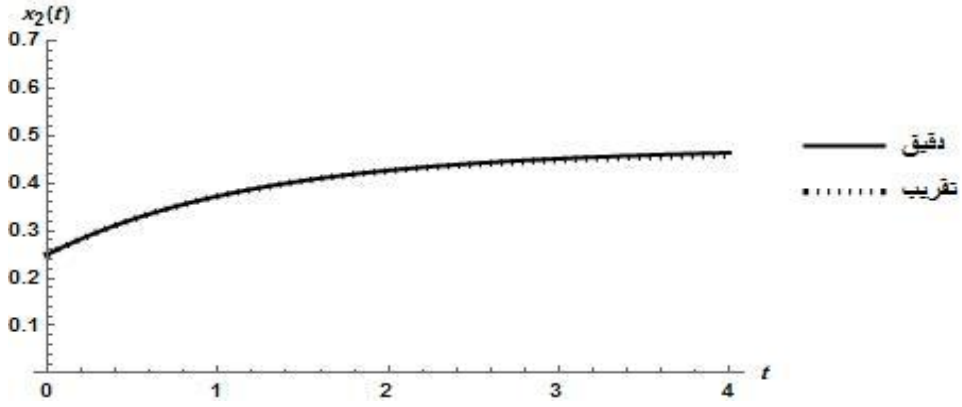


شکل ۲



شکل۳

و



شکل ۴

منابع

1. Hethcote H. W., Tudor D. W., "Integral equation models for endemic infectious diseases", J. Math. Biology, vol. 9 (1980) 37-47.
2. Miller I., Miller M., "John E. Freund's Mathematical Statistics with Applications", 8st ed., Pearson Education Limited, 2014.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]

3. Bailey N. J. T., "The mathematical theory of infectious diseases and its applications", Griffin, London (1975).

4. Niculescu S. I., Kim P. S., Gu K., Lee P. P. , Levy D., "Stability crossing boundaries of delay systems modeling immune dynamics in leukemia", Discrete and Continouos Dynamic systems, serie B, vol. 10, no 1 (2010) 129-156.

5. Babayar-Razlighi B., Soltanalizadeh B., "Numerical solution for system of singularnonlinear volterra integro-differential equations by Newton-Product method", APPL. MATH. COMPUT, vol. 219 (2013) 8375-8383.

6. Babayar-Razlighi B., Soltanalizadeh B., "Numerical solution of nonlinear singularVolterra integral system by the Newton-Product integration method", MATH, COMPUT, MODEL, vol. 58 (2013)1696-1703.

7. Babayar-Razlighi B., Ivaz, M. R. Mokhtarzadeh, "Convergence of product integration method applied for numerical solution of linear weakly singular Volterra systems",Bull. IranianMath, Soc., vol. 37 (2011) 135-148.

8. Babayar-Razlighi B., Ivaz K., Mokhtarzadeh M. R., Badamchizadeh A. N., "Newton-Product integration for a two phase Stefan problem with kinetics", Bull, Iranian Math, Soc., vol. 38, no. 4 (2012) 853-868.

9. Babayar-Razlighi B., Ivaz K., Mokhtarzadeh M. R., "Newton-Product integration for a Stefan problem with kinetics",J. Sci. Islam. Repub. Iran, vol. 22, no. 1 (2011) 51-61.

10. Babayar-Razlighi B., Khadem M., "Numerical solution of a free boundary problem from heat transfer by Legendre Wavelets", Proc.Iranian Conference on Mathematical Physics, Qom, Iran (Nov 2016) 92-95.

11. Babayar-Razlighi B., "Numerical solution of a heat conduction problem by the Legendre Wavelets", Proc. The 22th Seminar on Mathematical Analysis and It's Applications, Bonab, Iran (Jan 2017) 319-322.

12. Brunner H., "Collocation Methods for VolterraIntegral and Related FunctionalEquations", 1st ed., Cambridge University Press (2004).

13. Ordokhani Y., Razzaghi M. "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via a collocation method and rationalized Haar functions", Appl. Math. Lett., vol. 21, no. 1 (2008) 4-9.

14. Ordokhani Y., "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm Hammerstein integralequations via rationalized Haar functions", Appl. Math. Comput., vol. 180, no. 2 (2006) 436-443.

15. Phillips G.M.M., Taylor P.J., "Theory and applications of numerical analysis", in Applied Mathematics, 2st ed., Elsevier Science & Technology Books, 1996.

16. Tao L., Yong H., "Extrapolation method for solving weakly singular nonlinear Volterra integral equations of the second kind", J. Math. Anal. Appl, vol. 324, (2006) 225-237.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.7.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.29]