(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

گروه خودریختیِ گروه‌های ناآبلی از مرتبهٔ p^4

رضا عرفی؛ دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت ۹۶/۰۳/۰۷ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 باشد در این مقاله یک ساختار برای p-زیرگروه سیلوی گروه خودریختی‌های G معرفی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گروه خودریختی، خودریختی‌های مرکزی و p-گروه متناهی

مقدمه

مشخص کردن مرتبه و ساختار گروه خودریختی‌های p−گروه‌های متناهی یکی از مسائل مهم و کاربردی در نظریه گروه‌ها است. در این زمینه مقاله‌های زیادی به چاپ رسیده است که بیش‌تر این مقالات مربوط به بررسی مرتبهٔ گروه خودریختی‌های p−گروه‌های متناهی است. به‌عنوان مثال می‌توان به مراجع [۱] و [۱۰] اشاره کرد. قابل ذکر است که تلاش‌های فراوانی برای مشخص کردن یک ساختار برای گروه خودریختی‌های p−گروه‌های متناهی انجام شده است که در این رابطه می‌توان به‌عنوان مثال به مقالات [۴] و [۹] مراجعه کرد.

جیمز به رده‌بندی گروه‌هایی از مرتبهٔ p^n که درآن $n \leq 6$ بر حسب خانواده‌های همبر[۱] است، پرداخته است [۵]. با توجه به [2, §29] دو گروه را همبر گویند در صورتی‌که زیرگروه‌های مشتق آن‌ها با یک‌دیگر و هم‌چنین گروه‌های خارج قسمتی آن‌ها با یک‌دیگر یک‌ریخت باشند و به‌علاوه روابط جابه‌جاگرها در آن‌ها اساساً هم‌شکل باشند. با استفاده از مقالهٔ جیمز معلوم می‌شود که تعداد ۱۰ گروه ناآبلی دو به دو غیر یک‌ریخت از مرتبهٔ p^4 موجود است که در خانواده‌های غیرهمبر قرار دارند.

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 باشد گروه خودریختی‌های G و p−زیرگروه سیلوی گروه خودریختی‌های G را به‌ترتیب با علائم $Aut(G)$ و $Aut_p(G)$ نشان می‌دهیم. اگر $\phi = \phi(G)$ بیان‌کنندهٔ زیرگروه فراتینی گروه باشد مجموعهٔ $Aut^{\phi}(G)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$Aut^{\phi}(\mathrm{G}) = \{\ \alpha\ \in Aut(G)\mid g^{-1}\ \ g^{\alpha} \in\ \phi(G),\qquad \forall\ g \in G\ \}.$$

با توجه (Satz III. ۳.۱۷ از [۷])داریم $Aut^{\phi}(G)$ یک p−زیرگروه نرمال گروه $Aut(G)$ است. هدف اصلی این مقاله بررسی یک ساختار برای $Aut_p(G)$ است. دراین مقاله نشان می‌دهیم اگر G پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال باشد آن‌گاه $Aut_p(G)$ برابر با $Aut^{\phi}(G)$ و یا توسیع شکافته شده $Aut^{\phi}(G)$ با یک گروه دوری از مرتبهٔ p است (قضیهٔ ۸). به‌علاوه اگر G پوچتوان از ردهٔ ۲ باشد با استفاده از ساختار خودریختی‌های مرکزی گروه یک ساختار برای $Aut_p(G)$ ارائه می‌شود.

---

1. Isoclinism

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.197]

در این مقاله از علامتها و قراردادهای مرجع [۲] استفاده می‌شود. گروه خودریختی‌های مرکزی گروه G را با علامت $Aut_c\,(G)$ و مجموعهٔ تمام اعضایی از $Aut_c\,(G)$ که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد را با علامت $Aut_Z^Z\,(\mathrm{G})$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم G یک گروه، H و K زیرگروهای G باشند به‌طوری‌که K نرمال در G باشد. حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم H در K را با علامت $K \rtimes H$ نشان می‌دهیم. گروه دوری از مرتبهٔ n را با علامت $\mathbb{Z}_n$ و حاصل‌ضرب مستقیم r بار گروه $\mathbb{Z}_n$ را به‌صورت $(\,\mathbb{Z}_n\,)^r$ نشان می‌دهیم. اثر خودریختی α روی عضو x را با علامت x^α نشان می‌دهیم. هم‌چنین گروه G را ناآبلی محض[۱] گوییم در صورتی که عامل مستقیم آبلی نابدیهی نداشته باشد. باشد.

پیش نیازها

در این بخش ابتدا به بیان برخی نتایج بنیادی و اساسی می‌پردازیم که برای نتایج اصلی این مقاله مورد نیاز است. با توجه به مقاله جیمز [۵] تعداد ۱۰ گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 داریم $(p > 2)$. در ذیل نمایش گروه‌های ذکر شده را برای حالت $p \geq 5$ می‌آوریم قابل ذکر است برای حالت 3 یا $p = 2$ نمایش گروه با نمایش در حالت $p \geq 5$ متفاوت است از این‌رو، با استفاده از نرم‌افزار GAP می‌توانیم نتایج را برای 3 یا $p = 2$ به‌راحتی مشاهده کنیم. برای خلاصه‌نویسی روابطی که به‌صورت $[a, b] = 1$ در آن a و b مولد گروه هستند از نمایش حذف شده است و روابط جابه‌جاگرهای مولدها در صورتی که نابدیهی باشند فقط در نمایش ذکر می‌شود.

$G_1 =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, a^p = a_2, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 >,$
$G_2 =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, a^p = a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 >,$
$G_3 =< a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a^{p^2} = a_2 , a_1^p = a_2^p = 1 >,$
$G_4 =< a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a^p = a_2, a_1^{p^2} = a_2^p = 1 >,$
$G_5 =< a, a_1, a_2, \gamma \mid [a_1, a] = \gamma^p = a_2, a^p = a_1^p = a_2^p = 1 >,$
$G_6 =< a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a_2, a^{p^2} = a_1^p = a_2^p = 1 >,$
$G_7 =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a^p = a_3, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 >,$
$G_8 =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a_1^p = a_3, a^p = a_2^p = a_3^p = 1 >,$
$G_9 =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a]^\nu = a_1^p = a_3^\nu, a^p = a_2^p = a_3^p = 1 >,$
که در آن ν کوچک‌ترین ناماندهٔ مربعی به پیمانهٔ p است.

$G_{10} =< a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a_3, a^p = a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 >.$

با در نظر گرفتن مقاله جیمز [۵] برای $1 \leq i \leq 2$ دیده می‌شود $G_i \cong \mathbb{Z}_p \times H_i$ که در آن H_i گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^3 است به‌طوری‌که $\exp(H_1) = p^2$ و $\exp(H_2) = p$ قابل ذکر است که فقط گروه‌های G_1 و G_2 به صورت حاصل‌ضرب مستقیم دو زیر گروه خودشان هستند. هم‌چنین برای $7 \leq i \leq 10$ گروه G_i از ردهٔ پوچتوانی ماکزیمال است و برای $1 \leq i \leq 6$ گروه G_i دارای این خواص و ویژگی‌ها است:

1. purely non-abelian

جدول ۱.

Group	$Z(G)$	$\frac{G}{G'}$	$cl(G)$	$\frac{G}{Z(G)}$	$\phi(G)$
G_1	$< a_2, a_3 > \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G_1'
G_2	$< a_2, a_3 > \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G_2'
G_3	$< a^p > \cong \mathbb{Z}_{p^2}$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_3)$
G_4	$< a_2, a_1^p > \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_4)$
G_5	$< \gamma > \cong \mathbb{Z}_{p^2}$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G_5'
G_6	$< a_2, a^p > \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_6)$

تعریف: $p-$گروه G را منظم[1] می‌گویند درصورتی‌که به‌ازای هر x, y از گروه G، وجود داشته باشد عضوی مانند $c \in \mho_1(< x, y >')$ به‌طوری‌که $x^p y^p = (xy)^p c$.

لم ۱. *فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 باشد به‌طوری‌که $p \geq 5$ در این صورت*

۱. G *منظم است،*

۲. G *گروه فراآبلی است،*

۳. *اگر* G *پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال باشد در این صورت* $|Z(G)| = p$ ، $G' =< a_2, a_3 >$ ،$\exp(G') = p$، $Z(G) =< a_3 >$ *و* $\exp\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = p$

۴. *اگر* G پوچتوان *از ردهٔ ماکزیمال باشد در این صورت* $C_G(G') =< a_1, a_2, a_3 >$.

۵. *به‌ازای هر* x, y *از* G *داریم* $x^p y^p = (xy)^p$ *و به‌علاوه* $x^p \in Z(G)$

برهان: ۱. به [۷], Satz III. 10.2(b) مراجعه شود.

۲. با توجه به این‌که $|G'|$ عدد p^2 را عاد می‌کند معلوم می‌شود زیرگروه مشتق آبلی است.

۳ و ۴. می‌دانیم که گروه‌های G_i که $7 \leq i \leq 10$ پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال هستند با استفاده از نمایش گروه‌ها به‌راحتی نتایج مورد نظر به‌دست می‌آید.

۵. با توجه به مرتبهٔ زیرگروه مشتق در گروه های پوچتوان از ردهٔ ۲ طبق جدول ۱ و قسمت سوم لم ۱ داریم $\exp(G') = p$ لذا $x^p y^p = (xy)^p$ هم‌چنین با استفاده از ساختار $\frac{G}{Z(G)}$ از جدول ۱ و قسمت سوم لم ۱ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

لم ۲. فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $3 \leq i \leq 6$ در این‌صورت

۱. G ناآبلی محض است،

۲. $|Aut_p(G)|$ عدد $|Aut_c(G)|$ *را عاد می‌کند.*

برهان: ۱. فرض کنیم چنین نباشد از این‌رو، زیرگروه آبلی نابدیهی مانند A و زیر گروه ناآبلی محض مانند B موجود است به‌طوری‌که $G = A \times B$ با توجه به مرتبهٔ گروه نتیجه می‌شود $A \cong \mathbb{Z}_p$ و B گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^3 است. با توجه به بحث انجام شده در ابتدای بخش پیش‌نیازها نتیجه می‌شود $G \cong G_i$ که در آن $1 \leq i \leq 2$، که این تناقض است.

۲. با توجه به جدول ۱ داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین

1. Regular

$$\frac{Aut(G)}{Aut_c(G)} \hookrightarrow Aut\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \cong Gl(2,p)$$

از این‌رو، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۳. $Aut_Z^Z(\mathrm{G}) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))$.

برهان: به [۷], Satz I. 17.1 یا [۱۱], Result 1.1 مراجعه شود.

قضیهٔ ۴. *فرض کنیم* G *یک* $p-$*گروه* فرآبلی متناهی از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^n باشد به‌طوری‌که $G =< s, s_1 >$. *در این‌صورت* $|Aut_p(G) : Aut^{\phi}(G)| = p$ اگر و تنها اگر G دارای خودریختی مانند α باشد به‌طوری‌که $s^{\alpha} = ss_1$ و $s_1^{\alpha} = s_1$.

برهان: به [۴], Theorem 3.7 مراجعه شود.

قضیهٔ ۵. (Corollary ۳.۳ از [۳]) فرض کنیم $\mathrm{G = H \times K}$ به‌طوری‌که H و K فاقد عامل مشترک در تجزیه به زیرگروه‌ها باشند. در این صورت

$$|Aut_c(G)| = |Aut_c(H)||Aut_c(K)|\big|Hom\big(H, Z(K)\big)\big||Hom(K, Z(H))|$$

نتایج اصلی

در این فصل یک ساختار برای $p-$ زیرگروه سیلوی $Aut(G)$ معرفی می‌شود که در آن G یک $p-$ گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 است. ابتدا $p-$ گروه‌های از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^4 را بررسی می‌کنیم.

لم ۶. *فرض کنیم* G *یک* $p-$*گروه از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ* p^4 *باشد در این‌صورت*

۱. $Inn(G)$ *زیرگروه ناآبلی از مرتبهٔ* p^3 *و نمای* p *است،*

۲. $|Aut^{\phi}(G)| = p^4$ و $|Aut_p(G)|$ عدد p^5 *را عاد می‌کند،*

۳. $Aut^{\phi}(G) = Inn(G) \rtimes \mathbb{Z}_p$.

برهان: ۱. از قسمت سوم لم ۱ نتیجه می‌شود.

۲. با استفاده قسمت دوم لم۱ و ۴.۳ Theorem از [۴] نتیجه می‌شود $|Aut^{\phi}(G)| = p^4$. هم‌چنین چون G از ردهٔ ماکزیمال است از این‌رو، دو مولدی است بنابراین $\frac{G}{\phi(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. حال با در نظر گرفتن این مطلب که

$$\frac{Aut(G)}{Aut^{\phi}(G)} \hookrightarrow Aut\left(\frac{G}{\phi(G)}\right) \cong Gl(2,p)$$

نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۳. تابع γ را به‌صورت $a^{\gamma} = a$ و $a_1^{\gamma} = a_1a_3$ تعریف می‌کنیم با توجه به لم۱، $Z(G) =< a_3 >$ و با به‌کار بردن (Proposition ۳،p۴۴ از [۶]) نتیجه می‌شود γ یک خودریختی از مرتبهٔ p متعلق به $Aut^{\phi}(G)$ است.

ادعا می‌کنیم $\gamma \notin InnG$. فرض کنیم چنین نباشد بنابراین $\exists\, g \in G \backslash Z(G)$ به‌طوری‌که $\gamma = i_g$. با توجه به این‌که $\frac{G}{Z(G)} = <\mathrm{Z(G)a,\ Z(G)}\ a_1>$ و $Z(G) =< a_3 >$ نتیجه می‌گیریم که $[a_1, g] = a_3$ و $[a, g] = 1$. بنابراین $Z(G)g \in Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{Z_2(G)}{Z(G)}$. با توجه به این‌که $Z_2(G) = G'$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g \in G'$ اما با به‌کار بردن لم ۱ قسمت چهارم داریم $[g, a_1] = 1$ که این یک تناقض است. بنابراین$Aut^{\phi}(G) =$ $Inn(G) \rtimes < \gamma >$.

لم ۷. *فرض کنیم $i \in \{7,10\}$ در این صورت تابع θ با ضابطهٔ $a^{\theta} = aa_1$ و $a_1^{\theta} = a_1$ یک خودریختی از مرتبهٔ p از گروه G_i است به‌طوری‌که $\theta \notin Aut^{\phi}(G_i)$.*

برهان: با استفاده از قسمت‌های چهارم و پنجم لم۱ و (Proposition ۳،p۴۴ از [۶]) برهان کامل می‌شود.

فرض کنیم G یک $p-$ گروه از ردهٔ ماکزیمال ازمرتبهٔ p^4 باشد در قضیهٔ ۸، ما یک ساختار برای $Aut_p(G)$ معرفی می‌کنیم.

قضیه ۸. *فرض کنیم G_i یک $p-$ گروه از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^4 باشد، که در آن $7 \le i \le 10$. دراین صورت*

۱. *اگر $i \in \{7,10\}$ آن‌گاه $Aut_p(G_i) \cong Aut^{\phi}(G_i) \rtimes \mathbb{Z}_p$،*
۲. *اگر $i \in \{8,9\}$ آن‌گاه $Aut_p(G_i) = Aut^{\phi}(G_i)$.*

برهان: ۱. با به‌کار بردن لم ۷ و قضیهٔ ۴ نتیجه مطلوب حاصل می شود.

۲. با توجه به این‌که تابع θ معرفی شده در لم ۷ برای گروه G_i که در آن $8 \le i \le 9$ خودریختی نیست از این‌رو، با به‌کار بردن قضیهٔ ۴ نتیجه می شود $Aut^{\phi}(G_i) = Aut_p(G_i)$.

فرض کنیم G یک $p-$ گروه از ردهٔ پوچتوانی ۲ و از مرتبهٔ p^4 باشد. در ادامهٔ این مقاله یک ساختار برای $Aut_p(G)$ با استفاده از ساختار زیرگروه‌های $Aut_c(G)$ و $Aut_Z^Z(G)$ معرفی می‌شود. به‌راحتی دیده می‌شود که $Aut_c(G)$ و $Aut_Z^Z(G)$ زیرگروه‌های نرمال گروه $Aut(G)$ هستند و به‌علاوه داریم $Aut_c(G)$ برابر است با $C_{Aut(G)}(Inn(G))$. در (Theorem ,[۱]) نویسندگان ثابت کردند اگر G یک گروه ناآبلی محض متناهی باشد آن‌گاه $|Aut_c(G)| = |Hom\left(\frac{G}{G'}, Z(G)\right)|$. حال با توجه به مطالب ذکر شده به بررسی یک ساختار از $Aut_p(G)$ می‌پردازیم.

لم ۹. *فرض کنیم $i \in \{1,2,3,5,6\}$ در این صورت تابع δ با ضابطهٔ $a^{\delta} = aa_1$ که اثر آن روی سایر مولدها، همانی است، یک خودریختی از مرتبهٔ p از گروه G_i است، به‌طوری‌که $\delta \notin Aut_c(G_i)$.*

برهان: با توجه به این‌که G_i ازردهٔ پوچتوانی ۲ است داریم $G_i' \le Z(G_i)$ همچنین با توجه به جدول ۱ داریم $a_1 \notin Z(G_i)$. حال با به‌کار بردن قسمت پنجم لم ۱ و (Proposition ۳،p۴۴ از [۶]) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱۰. *فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $1 \le i \le 2$ دراین‌صورت*

۱. $|Aut_c(G)| = p^5(p-1)$،
۲. $Aut_Z^Z(G) \cong (\mathbb{Z}_p)^4$،
۳. $Aut_c(G) \cong (Aut_Z^Z(G) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_{p-1}$،
۴. $Aut_p(G) \cong (Aut_Z^Z(G) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$.

برهان: ۱. با توجه به این‌که $G \cong \mathbb{Z}_p \times H$ که در آن H گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^3 است و با استفاده از قضیهٔ ۵ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۲. با استفاده از جدول ۱ و قضیهٔ ۳ نتیجه مورد نظر به آسانی به‌دست می‌آید.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.197]

۳. با توجه به نمایش داریم $G =< a,\ a_1,\ a_3 >$ زیرا $a_2 \in G^{'} \leq \Phi(G)$. با توجه به قضیه جای‌گذاری به آسانی دیده می‌شود تابع θ با ضابطهٔ $a^{\theta} = a$ ، $a_1^{\theta} = a_1$ و $a_3^{\theta} = a_3 a_2$ یک خودریختی مرکزی از مرتبهٔ p است به‌طوری‌که $\theta \notin Aut_Z^Z\ (\mathrm{G})$. با توجه به این‌که $Aut_Z^Z\ (\mathrm{G})$ زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است و با در نظر گرفتن قسمت اول همین قضیه داریم $P = Aut_Z^Z\ (\mathrm{G}) \rtimes < \theta >$ زیرگروه $p-$سیلوی $Aut_c\ (G)$ است. با قراردادن $\mathbb{Z}_p =< x >$ و $Aut(\mathbb{Z}_p) =< \beta >$ می‌توانیم خودریختی مرکزی β^* برای گروه $G \cong \mathbb{Z}_p \times H$ از مرتبهٔ $p-1$ را به‌صورت $(hx^i)^{\beta^*} = h(x^i)^{\beta}$ برای هر h عضو H و هر i عضو $\mathbb{Z}$ تعریف کنیم. با در نظر گرفتن این مطلب که $P \trianglelefteq Aut_c\ (G)$ و قسمت اول همین قضیه نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۴. با به‌کار بردن(Proposition ۳،p۴۴ از [۶]) و قسمت پنجم لم ۱ تابع ψ با ضابطهٔ $a^{\psi} = aa_1$ ، $a_1^{\psi} = a_1$ و $a_3^{\psi} = a_3$ خودریختی غیرمرکزی از مرتبهٔ p است. با توجه به جدول ۱ داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین $\frac{Aut(G)}{Aut_c(G)} \hookrightarrow Aut\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \cong Gl(2,p)$.

از این‌رو، با توجه به وجود خودریختی غیرمرکزی از مرتبهٔ p داریم $\left|Aut_p(G)\right| = p^6$. بنابراین نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱۱. *فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $i \in \{3,5\}$ در این‌صورت*

۱. $|Aut_c\ (G)| = p^3$ ،

۲. $Aut_Z^Z\ (\mathrm{G}) = Inn(G) \cong \left(\mathbb{Z}_p\right)^2$ ،

۳. $Aut_c\ (G_3) \cong\ \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ و $Aut_c\ (G_5) \cong \left(\ \mathbb{Z}_p\ \right)^3$ ،

۴. $Aut_p(G) \cong Aut_c\ (\mathrm{G}) \rtimes \mathbb{Z}_p$.

برهان: قسمت اول و دوم با توجه به جدول ۱ و لم ۲ قسمت اول و قضیهٔ ۳ به‌راحتی محاسبه می‌شود.

۳) با توجه به این‌که $Inn(G)$ آبلی است داریم $Inn(G) \leq Aut_c(G) = C_{Aut(G)}\big(Inn(G)\big)$. بنابراین $Inn(G) \leq Z(Aut_c(G))$. از این‌رو، $Aut_c(G)$ آبلی است و نمای آن حداکثر p^2 است. تابع θ با ضابطهٔ $a^{\theta} = a^{1+p}$ و $a_1^{\theta} = a_1 a^{p^2}$ خودریختی مرکزی از مرتبهٔ p^2 برای گروه G_3 است که با توجه به قسمت اول لم ۲ *نتیجه می‌شود* $Aut_c(G_3) \cong\ \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ همچنین تابع ω با ضابطه $\gamma^{\omega} = \gamma^{1+p}$ که ω بقیهٔ مولدها را ثابت نگه دارد، یک خودریختی مرکزی از مرتبهٔ p برای گروه G_5 است که مرکز گروه را حرکت می‌دهد بنابراین $Aut_c\ (G_5) = Aut_Z^Z\ (\mathrm{G}_5) \times < \omega > \cong \left(\ \mathbb{Z}_p\ \right)^3$.

۴. با به‌کاربردن لم ۹ و قسمت دوم لم ۲ برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۱۲. *فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $i \in \{4,6\}$ در این‌صورت*

۱. $Aut_c(G) = Aut_Z^Z\ (\mathrm{G}) \cong \left(\mathbb{Z}_p\right)^4$ ،

۲. $Aut_p(G_6) \cong Aut_c\ (\mathrm{G}_6) \rtimes \mathbb{Z}_p$ ،

۳. $Aut_p(G_4) \cong ((\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$.

برهان: ۱. با توجه به جدول ۱ و قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود $Aut_Z^Z(\mathrm{G}) \cong \left(\mathbb{Z}_p\right)^4$. با به‌کار گرفتن قسمت نخست لم ۱ داریم $|Aut_c(G)| = p^4$ که مطلب اخیر برهان را کامل می‌کند.

۲. با استفاده از قسمت دوم لم‌های ۹ و ۱ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۳. تابع σ با ضابطهٔ $a^\sigma = a$ و $a_1^\sigma = a_1 a$ یک خودریختی غیر مرکزی از مرتبهٔ p^2 است. بنابراین با در نظر گرفتن قسمت نخست لم فوق و لم۱ داریم $|Aut_p(G_4)| = p^5$ از این‌رو، با در نظر گرفتن مرتبهٔ خودریختی σ داریم:

$$Aut_Z^Z(\mathrm{G}_4) = \mho_1\left(Aut_p(G_4)\right) < Aut_p(G_4)$$

بنابراین $Aut_p(G_4)$ نمی‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $Aut_c(G)$ با $\mathbb{Z}_p$ باشد.

ساختاری برای $Aut_p(G_4)$ معرفی کنیم. برای این منظور توابع ψ ، γ و δ را به ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^\psi = a^{1+p}, a_1^\psi = a_1^{1+p}, \quad a^\gamma = a^{1+p}, a_1^\gamma = a_1, \quad a^\delta = a^{1+p} a_1^p \quad , a_1^\delta = a_1$$

به‌سهولت دیده می‌شود این توابع خودریختی‌های مرکزی از مرتبهٔ p هستند و به‌علاوه روابط $\sigma\psi = \psi\sigma$، $\gamma^{-1}\sigma\gamma = \sigma^{1+p}$ و $\psi\gamma = \gamma\psi$ نیز برقرار است بنابراین $H =< \sigma, \psi > \cong \mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p$. با توجه به آبلی بودن H و این‌که $[\sigma, \gamma] \neq 1$ نتیجه می‌گیریم که $\gamma \notin H$. هم‌چنین با استفاده از روابط ذکر شده در مورد خودریختی‌ها داریم $\gamma \in N_{G_4}(H)$. با قرار دادن $K =< \sigma, \psi, \gamma >$ نتیجه می‌گیریم $K \cong (\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$ هم‌چنین با در نظر گرفتن نمایش گروه G_4 داریم $< a > \trianglelefteq G_4$ و $a_1^p \notin < a >$ زیرا در غیر این‌صورت $|\mathrm{G}_4/ < \mathrm{a} > | = p$ که این یک تناقض است. ادعا می‌کنیم $\delta \notin K$ زیرا در غیر این‌صورت اعداد صحیح i, j, ℓ موجود است به‌طوری‌که $\delta = \sigma^i\psi^j\gamma^\ell$ در نتیجه باید داشته باشیم $a^\delta = a^{\sigma^i\psi^j\gamma^\ell} \in < a >$ که این یک تناقض است. بنابراین $Aut_p(G_4) = K \rtimes < \delta >$.

منابع

1 Adney J. E., Yen T., "Automorphisms of a p-group, Illinois Journal of Mathematics 9", (1965) 137-143.

2 Berkovich Y., "Groups of Prime Power Order", Vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin (2008).

3 Bidwell J. N. S., Curran M. J., McCaughan D. J., "Automorphisms of direct products of finite groups", Arch. Math. 86 (2006) 481-489.

4 Fouladi S., Orfi R., "Automorphisms of metabelian prime power order groups of maximal class", Bull. Austral. Math. Soc. 77 (2008) 261-276.

5 Rodney James, "The Groups of Order p^6 (p an Odd Prime)", Math. Comp., 34, No.150 (1980) 613-637.

6 Johnson D. L., "Presentation of groups", 2nd ed., LMS Stud. texts, Camberidge University press (1997).

7 Huppert B., "Endliche Gruppen", Vol. 1, Springer-Verlage (1967).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.197]

8 The GAP Group, GAP-Groups, "Algorithms, and Programming", Version 4.4.10 (2007) (http://www.gap-system.org).

9 Juhász A., "The group of automorphisms of a class of finite p-groups",Trans.Amer. Math.Soc. Vol. 270, No. 2 (1982) 469-481.

10 Menegazzo F., "Automorphisms of p-groups with cyclic commutator subgroup", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 90 (1993) 81-101.

11 Schmid P., "Normal p-subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p-group", Math. Z. 147 (1976) 271-277.