

عدد تناوبی گراف‌ها

حسین حاجی ابوالحسن، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی،
دانشگاه صنعتی دانمارک، دانشکده ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، کپنهاگ، دانمارک
میثم علیشاهی*، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۵/۱۴

دریافت ۹۶/۰۴/۰۲

چکیده

در سال ۲۰۱۵، حاجی ابوالحسن و علیشاهی عددهای تناوبی گراف‌ها را به‌عنوان یک کران پایین برای عدد رنگی گراف‌ها معرفی کردند. اثبات ارائه شده به‌وسیله آن‌ها مبتنی برلم تاکر (معادل ترکیبیاتی قضیه بورسوک-اولام) است که یک نتیجه در ترکیبیات توپولوژیکی است. در این مقاله یک اثبات کاملاً ترکیبیاتی برای این قضیه از علیشاهی و حاجی ابوالحسن ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گراف‌های کنسر، عدد رنگی، عدد تناوبی گراف‌ها

مقدمه

در این مقاله، برای هر عدد طبیعی t ، مجموعه $\{1, \dots, t\}$ را با نماد $[t]$ نمایش می‌دهیم. یک ابرگراف \mathcal{H} ، یک زوج مرتب $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ است که در آن $V(\mathcal{H})$ یک مجموعه متناهی است که اعضای آن رأس نامیده می‌شوند و $E(\mathcal{H})$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی از $V(\mathcal{H})$ است که به هر عضو آن یال می‌گوییم. یک t -رنگ‌آمیزی مجاز^۱ از یک ابرگراف \mathcal{H} ، یک تابع $c: V(\mathcal{H}) \rightarrow [t]$ است که برای آن هیچ یالی از \mathcal{H} تک‌رنگ نیست (برای هر یال $e \in E(\mathcal{H})$ داریم $|c(e)| > 1$). به کم‌ترین مقدار ممکن برای چنین t -ای عدد رنگی \mathcal{H} می‌گوییم که آن را با $\chi(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که ابرگراف \mathcal{H} دارای یالی از اندازه ۱ باشد عدد رنگی آن را بینهایت تعریف می‌کنیم.

برای یک بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{R, 0, B\}^n$ ، دنباله $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_l}$ ($1 \leq a_1 < \dots < a_l \leq n$) که در آن x_{a_i} ‌ها درایه‌هایی ناصفر از X هستند را متناوب می‌نامیم هرگاه هر دو عضو متوالی از این دنباله متفاوت باشند. به اندازه بزرگ‌ترین دنباله متناوب در X عدد تناوب X می‌گوییم و آن را با $alt(X)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین برای بردار $X = (0, \dots, 0) \in \{R, 0, B\}^n$ مقدار $alt(X)$ را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. علاوه براین X^R و X^B را نیز به فرم زیر به X نسبت می‌دهیم:

$$X^R = \{i : x_i = R\} \text{ و } X^B = \{i : x_i = B\}.$$

برای مثال اگر $X = (R, R, B, B, 0, R, 0, R, B)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $alt(X) = 4$ ، $X^B = \{3, 4, 9\}$ و $X^R = \{1, 2, 6, 8\}$ هم‌چنین توجه داشته باشید که با داشتن X^B و X^R می‌توان X را به‌طور یکتا تعیین کرد. لذا بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ را می‌توان به‌صورت زوج مرتب $X = (X^R, X^B)$ نیز نمایش داد. در طول این مقاله ما از هر دو نمایش بردار X به تناسب کاربرد آن‌ها استفاده خواهیم کرد. برای دو بردار $X, Y \in \{R, 0, B\}^n$ ، گوییم $X \subseteq Y$ هرگاه $X^R \subseteq Y^R$ و $X^B \subseteq Y^B$. توجه کنید که اگر $X \subseteq Y$ آن‌گاه هر دنباله متناوب از X یک دنباله متناوب از Y نیز هست، از این‌رو، $alt(X) \leq alt(Y)$. علاوه بر این با توجه به تعریف دنباله متناوب اولین درایه ناصفر از هر بردار غیرصفر X و اولین جمله هر دنباله متناوب با طول بیشینه از X همواره یکسان هستند. به‌عبارت دیگر، برای هر بردار غیرصفر X ، اولین جمله از هر دنباله متناوب با طول ماکسیمم برابر است با مقدار درایه متناظر با کوچک‌ترین عضو از $X^R \cup X^B$.

ابرگراف $\mathcal{H} = (V, E)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $\{v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_n} : (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{S}_n\}$ مجموعه همه ترتیب‌های خطی روی مجموعه V باشد. حال برای یک بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{R, 0, B\}^n$ و یک ترتیب خطی $L_V = \{v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_n} \in L_V$ تعریف می‌کنیم

$$X_\sigma^R = \{v_{i_j} : x_j = R\}, X_\sigma^B = \{v_{i_j} : x_j = B\}, X_\sigma = (X_\sigma^R, X_\sigma^B).$$

توجه کنید که اگر $V = [n]$ و $I: 1 < \dots < n$ ، آن‌گاه $X^R = X_I^R$ ، $X^B = X_I^B$ و $X = X_I$. هم‌چنین زیرابگرافی از \mathcal{H} را که دارای مجموعه رأس‌های $X_\sigma^R \cup X_\sigma^B$ و مجموعه یال‌های

$$E(\mathcal{H}_{X_\sigma}) = \{e \in E(\mathcal{H}) : e \subseteq X_\sigma^R \text{ or } e \subseteq X_\sigma^B\}$$

است را با \mathcal{H}_{X_σ} نمایش می‌دهیم.

گراف‌های کنسری کلی

ابرگراف $\mathcal{H} = (V, E)$ را در نظر بگیرید. گراف کنسر کلی $KG(\mathcal{H})$ گرافی است با مجموعه رأس‌های E که در آن دو رأس $e_1, e_2 \in E$ به یک‌دیگر متصل هستند هرگاه $e_1 \cap e_2 = \emptyset$. برای یک گراف داده شده G ، به هر ابرگراف \mathcal{H} که برای آن $KG(\mathcal{H})$ و G یکریخت هستند یک نمایش کنسری \mathcal{H} از G گفته می‌شود. به سادگی می‌توان بررسی کرد که هر گراف G دارای تعداد نامتناهی نمایش کنسری است. برای اثبات کافی است ابرگراف \mathcal{H} را با مجموعه رأس‌های $V(G) \cup E(\bar{G})$ در نظر بگیریم. متناظر با هر رأس $v \in V(G)$ یال e_v را برابر با مجموعه همه یال‌هایی از \bar{G} که متصل به رأس v هستند به‌همراه خود رأس v تعریف می‌کنیم. نگاشت $v \rightarrow e_v$ به‌وضوح یک یکریختی از G به $KG(\mathcal{H})$ است، از این‌رو، $KG(\mathcal{H})$ یک نمایش کنسری برای G است. حال تغییر دادن یال‌های \mathcal{H} با افزودن رأس‌های جدید به‌گونه‌ای که اشتراک و عدم اشتراک‌ها در بین یال‌های \mathcal{H} ثابت بمانند، باعث ساختن یک نمایش کنسری جدید برای G خواهد شد. بدیهی است که این کار به نامتناهی روش قابل انجام است.

عدد تناوبی ابرگرافها

برای ابرگراف داده شده $\mathcal{H} = (V, E)$ ، یک ترتیب خطی $\sigma \in L_V$ و عدد طبیعی k را در نظر بگیرید. k -امین عدد σ -تناوبی \mathcal{H} را که با $alt_\sigma(\mathcal{H}, k)$ نمایش می‌دهیم برابر با بزرگ‌ترین مقدار ممکن از t تعریف می‌کنیم که برای آن لاقل یک $X \in \{R, 0, B\}^n$ وجود دارد که $alt(X) = t$ و هم‌چنین عدد رنگی ابرگراف $(\mathcal{H}_{1X_\sigma})$ حداکثر برابر $k-1$ است. در حالت $k=1$ این بدان معنی است که ابرگراف \mathcal{H}_{1X_σ} دارای هیچ یالی نیست. حال عدد تناوب k -ام ابرگراف \mathcal{H}^1 را بدین صورت معرفی می‌کنیم:

$$alt(\mathcal{H}, k) = \min \{ alt_\sigma(\mathcal{H}, k) : \sigma \in L_V \}.$$

اکنون یک گراف دلخواه G و یک عدد صحیح k را که $1 \leq k \leq \chi(G) + 1$ در نظر بگیرید. k -امین عدد تناوبی G را بدین صورت معرفی می‌کنیم:

$$\zeta(G, k) = \max_{\mathcal{H}} \{ |V(\mathcal{H})| - alt(\mathcal{H}, k) + k - 1 : KG(\mathcal{H}) \longleftrightarrow G \}$$

که در آن $KG(\mathcal{H}) \longleftrightarrow G$ بدین معنی است که لاقل یک هم‌ریختی از $KG(\mathcal{H})$ به G وجود دارد. دقت کنید که اگر $k = \chi(G) + 1$ ، آن‌گاه برای هر ابرگراف \mathcal{H} که $KG(\mathcal{H}) \longleftrightarrow G$ داریم $k = \chi(KG(\mathcal{H})) + 1$ ، از این رو $alt(\mathcal{H}, k) = |V(\mathcal{H})|$. هرچند که با توجه به تعریف مقدار $\zeta(G, k)$ ممکن است نامتناه‌ی باشد، در خلال اثبات قضیه ۱ می‌بینیم که همواره $\zeta(G, k)$ عددی متناهی است.

در مقاله [۱] با استفاده از لم تاکر^۲ که یک معادل ترکیب‌یاتی برای قضیه معروف بورسوک-اولام^۳ است، حاجی‌ابوالحسن و علیشاهی نشان دادند که برای هر گراف G و هر عدد صحیح k که $1 \leq k \leq \chi(G) + 1$ ، همواره k -امین عدد تناوبی G یک کران پایین برای عدد رنگی G ارائه می‌دهد.

قضیه ۱. [۱] برای هر گراف G و هر عدد صحیح k که $1 \leq k \leq \chi(G) + 1$ داریم $\chi(G) \geq \zeta(G, k)$. در [۱] برای حالت $k=1$ نشان داده شده است که قضیه مذکور یک بهبود از قضیه مشهور دولنیکوف [۴] است. هم‌چنین در [۱]، [۲] عدد رنگی بعضی از خانواده‌های گرافها به کمک این کران پایین محاسبه شده‌اند. علاوه بر این علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن به کمک یک تعمیم از لم گیل^۴ نشان دادند که اولین عدد تناوبی، یک کران پایین دقیق^۵ برای بعضی از کران‌های پایین توپولوژیکی برای عدد رنگی گرافها است [۳]. برای بررسی بیش‌تر می‌توانید به [۳] مراجعه کنید. میونیر اثبات کرد که محاسبه اولین عدد تناوبی گرافها یک مسئله سخت است [۱۰]. در حقیقت او نشان داد که برای یک ابرگراف داده شده \mathcal{H} و یک ترتیب خطی σ ، به‌دست آوردن $alt_\sigma(\mathcal{H}, 1)$ یک مسئله NP-سخت است.

1. k -th alternation number
2. Tucker lemma
3. Borsuk-Ulam Theorem
4. Gale lemma
5. Sharp

اثبات ترکیبیاتی برای قضیه ۱

برای دو عدد m و n که $m \geq 2n$ ، گراف کنسر معمولی^۱ $KG(m, n)$ گرافی است با مجموعه رأس‌های متشکل از همه زیرمجموعه‌های k -عضوی از $[m]$ که در آن دو رأس به یکدیگر متصل هستند اگر و تنها اگر اشتراک آن‌ها تهی باشد. کنسر در سال ۱۹۵۵ [5] حدس زد که $\chi(KG(m, n)) = m - 2n + 2$. در حقیقت او یک رنگ‌آمیزی مجاز برای $KG(m, n)$ با $m - 2n + 2$ رنگ ارائه داد. این حدس در سال ۱۹۷۸ به‌وسیله لواز [۷] و به‌کمک ابزارهای توپولوژیکی به اثبات رسید. مقاله لواز به‌عنوان سرآغاز بررسی ترکیبیات به‌کمک ابزارهای توپولوژیکی باعث تولد شاخه‌ای از ترکیبیات شد که امروزه به‌عنوان ترکیبیات توپولوژیکی^۲ شناخته می‌شود. اسکرایور [۱۱] زیرگرافی از گراف کنسر $KG(m, n)$ را معرفی کرد که نه تنها دارای عدد رنگی یکسانی با $KG(m, n)$ است بلکه یک گراف رأس بحرانی نیز هست. این زیرگراف را با $SG(m, n)$ نمایش می‌دهیم. در [۱] ثابت شده است که قضیه ۱ به سادگی نتایج لواز و اسکرایور را نتیجه می‌دهد. در ادامه این بخش یک اثبات کاملاً ترکیبیاتی برای قضیه ۱ ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که ایده این اثبات مبتنی بر اثباتی ترکیبیاتی از قضیه لواز است که برای اولین بار به‌وسیله متوسک در [۹] ارائه شده است.

اثبات قضیه ۱. فرض کنید حکم قضیه برقرار نباشد و داشته باشیم $\zeta(G, k) > \chi(G)$. ابرگراف \mathcal{H} را چنان در نظر بگیرید که $KG(\mathcal{H})$ و G هم‌ریخت باشند و هم‌چنین داشته باشیم:

$$\zeta(G, k) \geq |V(\mathcal{H})| - \text{alt}(\mathcal{H}, k) + k - 1 = |V(\mathcal{H})| - \text{alt}_\sigma(\mathcal{H}, k) + k - 1 > \chi(G)$$

که در آن $\sigma \in L_{V(\mathcal{H})}$. توجه کنید که بدون کاستن از کلیت و برای سادگی در نوشتن می‌توانیم فرض کنیم که $V(\mathcal{H}) = [n]$ و $\sigma = I: 1 < \dots < n$. یک رنگ‌آمیزی مجاز

$$h: V(KG(\mathcal{H})) = E(\mathcal{H}) \longrightarrow \{1, \dots, n - \text{alt}(\mathcal{H}, k) + k - 2\}$$

از $KG(\mathcal{H})$ را در نظر بگیرید. برای هر زیرمجموعه $M \subseteq V(\mathcal{H})$ تعریف می‌کنیم $\bar{h}(M) = \max\{h(e) : e \subseteq M, e \in E(\mathcal{H})\}$ اگر $e \in E(\mathcal{H})$ وجود نداشت که $e \subseteq M$ ، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\bar{h}(M) = 0$. حال برای هر بردار $X = (X^R, X^B) \in \{R, 0, B\}^n$ قرار می‌دهیم $\bar{h}(X) = \max\{\bar{h}(X^R), \bar{h}(X^B)\}$ اکنون نگاشت $\lambda: \{R, 0, B\}^n \longrightarrow \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

۱. اگر $X = (X^R, X^B) \in \{R, 0, B\}^n$ و $\text{alt}(X) \leq \text{alt}_I(\mathcal{H}, k)$ ، آن‌گاه

$$\lambda(X) = \begin{cases} +\text{alt}(X) + 1 & \text{if } X^B = \emptyset \text{ or } \min(X^R \cup X^B) \in X^R \\ -\text{alt}(X) - 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۲. اگر $X = (X^R, X^B) \in \{R, 0, B\}^n$ و $\text{alt}(X) \geq \text{alt}_I(\mathcal{H}, k) + 1$ ، آن‌گاه

1. Usual Kneser graph
2. Topological Combinatorics

$$\lambda(X) = \begin{cases} alt_1(\mathcal{H}, k) + \bar{h}(X) - k + 2 & \text{if } \bar{h}(X) = \bar{h}(X^R) \\ -(alt_1(\mathcal{H}, k) + \bar{h}(X) - k + 2) & \text{if } \bar{h}(X) = \bar{h}(X^B) \end{cases}$$

از آن‌جا که h یک رنگ‌آمیزی مجاز است می‌توان به سادگی بررسی کرد که نگاشت λ تعریف شده در بالا خوش‌تعریف است. خوش‌تعریفی نگاشت λ در حالت ۱ کاملاً بدیهی است. از این‌رو، کافی است نشان دهیم که در حالت ۲، برای هر X دلخواه، تنها یکی از دو حالت $\bar{h}(X) = \bar{h}(X^R)$ یا $\bar{h}(X) = \bar{h}(X^B)$ می‌تواند رخ دهد. در غیر این صورت، با توجه به تعریف $\bar{h}(X)$ ، باید $\bar{h}(X^R) = \bar{h}(X^B)$ و لذا دو رأس A و B از گراف $KG(\mathcal{H})$ چنان وجود دارند که $A \subseteq X^R$ ، $B \subseteq X^B$ ، و $h(A) = h(B)$. از طرفی $X^R \cap X^B = \emptyset$ نتیجه می‌دهد که $A \cap B = \emptyset$ و لذا A به B در $KG(\mathcal{H})$ متصل است که این با مجاز بودن رنگ‌آمیزی h در تناقض است.

هم‌چنین به سادگی می‌توان دید که برای هر $(A, B) \subseteq (A', B')$ داریم $\lambda(A, B) + \lambda(A', B') \neq 0$. برای اثبات فرض کنید که $(A, B) \subseteq (A', B')$ چنان وجود دارند که $\lambda(A, B) = -\lambda(A', B') = \ell$. در ابتدا، با توجه به تعریف λ ، توجه کنید برای $X = (A, B)$ و $Y = (A', B')$ ، یا هر دو در حالت ۱ و یا هر دو در حالت ۲ از تعریف λ صدق می‌کنند. اگر X و Y هر دو در حالت ۱ از تعریف صدق کنند در این صورت $alt(X) = alt(Y) = \ell - 1$ و اولین درایه‌های ناصفر در X و Y به ترتیب باید R و B باشند. ولی از آن‌جا که $X \subseteq Y$ ، این نتیجه می‌دهد که $alt(X) < alt(Y)$ و این امکان‌پذیر نیست. حال فرض کنید که X و Y هر دو در حالت ۲ از تعریف λ صدق کنند. لذا باید داشته باشیم

$$\bar{h}(X) = \bar{h}(X^R) = \ell - alt_1(\mathcal{H}, k) + k - 2 = c$$

و

$$\bar{h}(Y) = \bar{h}(Y^B) = \ell - alt_1(\mathcal{H}, k) + k - 2 = c.$$

بنابراین دو رأس A و B از $KG(\mathcal{H})$ چنان وجود دارند که $A \subseteq X^R$ ، $B \subseteq X^B$ ، و $h(A) = h(B) = c$. از طرفی چون $A \subseteq X^R \subseteq Y^R$ ، $B \subseteq Y^B$ ، و $Y^R \cap Y^B = \emptyset$ دو رأس A و B در $KG(\mathcal{H})$ متصل هستند که این در تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی h است. هم‌چنین با توجه به تعریف $alt_1(\mathcal{H}, k)$ ، اگر $alt(X) \geq alt_1(\mathcal{H}, k) + 1$ ، آن‌گاه عدد رنگی گراف $KG(\mathcal{H}_k)$ حداقل k خواهد بود، از این‌رو، $\lambda((\emptyset, \emptyset)) = 1$. از طرفی بنابر تعریف تابع λ واضح است که $\lambda(X) \geq alt_1(\mathcal{H}, k) + 2$.

در ادامه گراف ساده و متناهی H را به‌گونه‌ای می‌سازیم که این گراف دارای تنها یک رأس از درجه ۱ است در حالی که سایر رأس‌های آن همگی از درجه ۲ هستند. از آن‌جا که مجموع درجه رأس‌های هر گراف عددی زوج است، واضح است که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، از این‌رو، این تناقض باعث تکمیل اثبات می‌شود.

برای هر زیرمجموعه $A \subseteq [n]$ تعریف می‌کنیم $-A = \{-t : t \in A\}$. توجه کنید که اگر $A = \emptyset$ ، آن‌گاه $-A = \emptyset$. یک دنباله مجاز یک دنباله $(A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \dots \subseteq (A_m, B_m)$ از اعضای $\{R, 0, B\}^n$ است به طوری که برای هر $0 \leq i \leq m$ داریم $|A_i| + |B_i| = i$ و هم‌چنین

$$A_m \cup -B_m \subseteq \{\lambda((A_0, B_0)), \lambda((A_1, B_1)), \dots, \lambda((A_m, B_m))\}.$$

توجه کنید که همواره $A_0 = B_0 = \emptyset$ و $0 \leq m \leq n$. همچنین مجاز بودن دنباله (\emptyset, \emptyset) نتیجه مستقیم تعریف دنباله مجاز است.

مجموعه رأس‌های گراف H را مجموعه همه دنباله‌های مجاز تعریف می‌کنیم. حال به تعریف یال‌های این گراف می‌پردازیم. برای دنباله مجاز (\emptyset, \emptyset) همسایه یکتای آن را دنباله مجاز $(\{1\}, \emptyset) \subseteq (\emptyset, \emptyset)$ تعریف می‌کنیم. برای هر دنباله مجاز دیگر، دو همسایه آن را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

یک دنباله مجاز $(A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \dots \subseteq (A_m, B_m)$ را که $m \geq 1$ در نظر بگیرید. برای هر $0 \leq i \leq m$ قرار دهید $\lambda_i = \lambda(A_i, B_i)$. با توجه به تعریف نگاشت λ واضح است که اگر $(A, B) \subseteq (A', B')$ ، آن‌گاه $|\lambda(A, B)| \leq |\lambda(A', B')|$. با توجه به رابطه

$$A_m \cup -B_m \subseteq \{\lambda((A_0, B_0)), \lambda((A_1, B_1)), \dots, \lambda((A_m, B_m))\}$$

و از آن‌جا که $|A_m \cup -B_m| = m$ ، مجموعه $\{\lambda((A_0, B_0)), \lambda((A_1, B_1)), \dots, \lambda((A_m, B_m))\}$ دارای m و یا $m+1$ عضو است. بنابراین یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

۱. اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0 \leq i < m$ و $\lambda_i = \lambda_{i+1}$.

۲. اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0 \leq i \leq m$ و $\lambda_i \notin A_m \cup -B_m$.

ابتدا حالت اول را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت $i=0$ امکان‌پذیر نیست، زیرا با توجه به تعریف نگاشت λ ، برای هر $j > 0$ داریم $|\lambda_j| > 1$. حال اگر $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ برای یک $1 \leq i < m$ ، دو همسایه دنباله $S = (A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \dots \subseteq (A_m, B_m)$ بدین صورت تعریف می‌شوند:

الف) اولین همسایه دنباله S دنباله $(A'_0, B'_0) \subseteq (A'_1, B'_1) \subseteq \dots \subseteq (A'_m, B'_m)$ است که در آن $(A'_r, B'_r) = (A_r, B_r)$ داریم $r \neq i$ و برای هر $(A'_i, B'_i) = (A_{i-1} \cup (A_{i+1} \setminus A_i), B_{i-1} \cup (B_{i+1} \setminus B_i))$

ب) اگر $i < m-1$ ، آن‌گاه $(A''_0, B''_0) \subseteq (A''_1, B''_1) \subseteq \dots \subseteq (A''_m, B''_m)$ همسایه دیگر دنباله مجاز S است که

$(A''_{i+1}, B''_{i+1}) = (A_i \cup (A_{i+2} \setminus A_{i+1}), B_i \cup (B_{i+2} \setminus B_{i+1}))$ و برای هر $r \neq i+1$ نیز داریم

$(A''_r, B''_r) = (A_r, B_r)$. در غیر این صورت اگر $i = m-1$ ، آن‌گاه همسایه دیگر دنباله مجاز S برابر دنباله

$(A_{m-1}, B_{m-1}) \subseteq (A_m, B_m)$ تعریف می‌شود.

حال حالت دوم را در نظر می‌گیریم. یعنی اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0 \leq i \leq m$ و $\lambda_i \notin A_m \cup -B_m$.

در این حالت دو همسایه $S = (A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \dots \subseteq (A_m, B_m)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

الف) اولین همسایه دنباله S دنباله $(A'_0, B'_0) \subseteq (A'_1, B'_1) \subseteq \dots \subseteq (A'_m, B'_m) \subseteq (A'_{m+1}, B'_{m+1})$ است که در آن

برای هر $0 \leq r \leq m$ داریم $(A'_r, B'_r) = (A_r, B_r)$. اگر $\lambda_i > 0$ ، آن‌گاه $(A'_{m+1}, B'_{m+1}) = (A_m \cup \{\lambda_i\}, B_m)$

و در غیر این صورت $(A'_{m+1}, B'_{m+1}) = (A_m, B_m \cup \{-\lambda_i\})$.

(ب) اگر $1 \leq i \leq m-1$ ، آن‌گاه همسایه دیگر دنباله \mathcal{S} را دنباله $(A_0'', B_0'') \subseteq (A_1'', B_1'') \subseteq \dots \subseteq (A_m'', B_m'')$ تعریف می‌کنیم که

$$(A_i'', B_i'') = (A_{i-1} \cup (A_{i+1} \setminus A_i), B_{i-1} \cup (B_{i+1} \setminus B_i))$$

و برای هر $r \neq i$ داریم $(A_r'', B_r'') = (A_r, B_r)$. اما اگر $i = m$ ، آن‌گاه همسایه دوم را برابر دنباله

$$(A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \dots \subseteq (A_{m-1}, B_{m-1})$$

قرار می‌دهیم. در نهایت برای حالت $i = 0$ ، همسایه دوم را دنباله $(B_0, A_0) \subseteq (B_1, A_1) \subseteq \dots \subseteq (B_m, A_m)$ تعیین می‌کنیم.

مجاز بودن دنباله‌های معرفی شده در دو قسمت مذکور به سادگی قابل بررسی است. همچنین می‌توان مشاهده کرد که تعاریف همسایگی‌ها به صورت متقارن هستند، از این‌رو، گراف H حاصل شده یک گراف ساده با شرایط ادعا شده است که منجر به تکمیل اثبات می‌شود.

منابع

1. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "On the chromatic number of general Kneser hypergraphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 115 (2015) 186-209.
2. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "Altermatic number of categorical products of graphs", *Discrete Mathematics*, 341 (2018) 1316-1324.
3. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "A Generalization of Gale's lemma", *Journal of Graph Theory*, 88(2) (2018) 337-346.
4. Dol'nikov V. L., "A combinatorial inequality", *Sibirsk. Mat. Zh.*, 29 (3) 219 (1988) 53-58.
5. Kneser M., "Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen", *Math. Z.*, 61 (1955) 429-434.
6. Kříž I., "Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2) (1992) 567-577.
7. Lovász L., "Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3) (1978) 319-324.
8. Matoušek J., "Using the Borsuk-Ulam theorem", *Universitext. Springer-Verlag, Berlin, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler* (2003).
9. Matoušek J., "A combinatorial proof of Kneser's conjecture", *Combinatorica*, 24(1) (2004) 163-170.

10. Meunier F., "Colorful Subhypergraphs in Kneser Hypergraphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, 21(1): Research Paper #P1.8 (2014) 13 (electronic).
11. Schrijver A., "Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs", *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 26 (3) (1978) 454-461.