زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد CR ماکسیمال کنتاکت از فضا فرم ساساکی

محمد المکچی*، اسمعیل عابدی
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۴/۱۴ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت در فضا فرم ساساکی را در نظر می‌گیریم و ساختار کلی این زیرخمینه‌ها را بررسی کرده سپس ساختار این زیرخمینه‌ها را با شرط

$$h(FX,\ Y)+h(X,\ FY)=g(FX,\ Y)\zeta$$

برای میدان برداری قائم ζ، که مخالف صفر است، را بررسی شده است و در حالت کلی این زیرخمینه‌ها را رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضا فرم ساساکی، زیرخمینه کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت، زیرخمینه.

مقدمه

فرض کنید M زیرخمینه‌ای (هم‌بند) از بعد$n+1$ از فضا فرم ساساکی $(\overline{M}(c),\phi,\xi,\eta,g)$ باشد. هم‌چنین اگر زیرفضاهای ماکسیمال $\phi-$پایای M از بعد $n-1$ باشند آن‌گاه یک ساختار به‌طور طبیعی با متر القایی می‌پذیرد[۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۳]،[۱۴] که زیرخمینه های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال نامیده می‌شوند. در حالتی که M ابررویه باشد آن‌گاه زیرفضاهای ماکسیمال $\phi-$پایای M لزوماً از بعد $n-1$ است. اما در حالتی که M از نقص بعد بالاتر باشد نتایج کم‌تر شناخته شده‌ای از زیرخمینه را می‌دانیم.

کیم[1] و پاک[2] زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در کره واحد را که در شرط

$$h(FX,Y)+h(X,FY)=0$$

صدق می‌کرد را بررسی کردند [۹]، [۱۴] و این زیر خمینه‌ها را مشخص کردند که در آن F نشان‌گر درون‌ریختی پاد متقارن القایی از ϕ بوده است که روی کلاف مماس TM اثر می‌کند و h دومین فرم اساسی روی M است. هم‌چنین اوکومورا[3] و دجوریک[4] زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال با همین شرط را در فضا فرم مختلط را بررسی و مطالعه کردند [۴]، [۵].

بعد از آن، کیم، چوی و پاک [۱۰] و اوکومورا و دجوریک [۶]، [۷]، این زیرخمینه‌ها را به‌ترتیب در کره واحد و فضا فرم مختلط بررسی کردند که در شرط

*نویسنده مسئول ilmakchi@azaruniv.ac.ir

1. Kım
2. Pak
3. Okumura
4. Djoric

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

$$h(FX,Y)+h(X,FY)=g(FX,Y)\zeta$$

صدق می‌کنند که در آن ζ میدان برداری قائم مخالف صفر بر M است.

هم‌چنین، کیم، چوی و پاک این زیرخمینه ها را در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX,Y)+h(X,FY)=0$$

بررسی کرده و این زیرخمینه‌ها را مشخص کردند [۱۰].

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX,Y)+h(X,FY)=g(FX,Y)\zeta$$

را مطالعه و بررسی می‌کنیم.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

خمینه دیفرانسیل‌پذیر M^{2n+1} دارای یک ساختار تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود اگر میدان برداری همیشه ناصفر ξ ، یک فرم η و میدان تانسور ϕ از نوع (۱،۱) وجود داشته باشند به‌طوری‌که در روابط

$$\eta(\xi)=1,\quad \phi^2=-I+\eta\otimes\xi, \tag{۱}$$

که I نشان‌دهندهٔ میدان انتقال همانی روی فضای مماس در همه نقاط است، صدق کند. میدان برداری ξ میدان برداری مشخصه نامیده می‌شود. این شرایط روی خمینه ایجاب می‌کنند که $\phi\xi=0$ و $\eta\circ\phi=0$ است. هم‌چنین نشان می‌دهد اندومورفیسم ϕ در هر نقطه روی M^{2n+1} دارای رتبه $2n$ است. خمینه M^{2n+1} همراه با ساختار تقریباً کنتاکت (ϕ,ξ,η)، خمینه تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود و به‌صورت (M^{2n+1},ϕ,ξ,η) نمایش داده می‌شود [۳].

اگر خمینه تقریباً کنتاکت (M^{2n+1},ϕ,ξ,η) مجهز به متر ریمانی g باشد به‌طوری‌که در رابطه

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$

برای همه میدان‌های برداری X و Y صدق کند، در این صورت متر ریمانی g، متر سازگار نامیده می‌شود و ساختار (ϕ,ξ,η,g) یک ساختار متری تقریباً کنتاکت وخمینه M^{2n+1} با این ساختار، خمینه تقریباً کنتاکت ریمانی نامیده می‌شود و به‌صورت (M,ϕ,ξ,η,g) نشان داده می‌شود [۳].

توجه داشته باشید که برای همه میدان‌های برداری X مماس بر M^{2n+1}،

$$\eta(X)=g(X,\xi),$$

است. بنابراین η متریک دوگان برای میدان برداری مشخصه ξ است [۳].

خمینه M^{2n+1} خمینه کنتاکت نامیده می‌شود اگر به یک فرم سراسری η روی هر نقطه M^{2n+1} مجهز باشد به‌طوری‌که در رابطه

$$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0,$$

صدق کند. یک فرم η فرم کنتاکت نامیده می‌شود [۳].

زیرخمینه M از خمینه کنتاکت M^{2n+1} مماس بر میدان برداری ξ زیرخمینه پایا نامید می‌شود اگر برای هر نقطه $p\in M$، $\phi(T_pM)\subset T_pM$ باشد. هم‌چنین اگر برای هر نقطه $p\in M$، $\phi(T_pM)\subset T_p^{\perp}M$ باشد زیرخمینه را ناپایا می‌نامند [۳].

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

زیرخمینه M از خمینه کنتاکت $\bar{M}^{2n+1}$ مماس بر میدان برداری ξ را زیرخمینه CR می‌نامند هرگاه یک جفت توزیع متمم متعامد D و $D^{\perp}$ روی M موجود باشد به‌طوری‌که

۱. $TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \mathbb{R}\xi$، که $\mathbb{R}\xi$ توزیع یک بعدی تولید شده به‌وسیلهٔ ξ است؛

۲. D تحت ϕ پایا باشد یعنی برای هر $p \in M$، $\phi(D_p) \subset D_p$ برقرار باشد؛

۳. $D^{\perp}$ تحت ϕ ناپایا باشد یعنی برای هر $p \in M$، $\phi(D_p^{\perp}) \subset T_p^{\perp}M$ برقرار باشد[۳].

فرض کنید $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ خمینه کنتاکت $(2n+1)$ بعدی باشد به‌طوری‌که

$$\bar{\nabla}_X \xi = \phi X, \qquad (\bar{\nabla}_X \phi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X, \tag{۲}$$

که $\bar{\nabla}$ التصاق لوی-چویتا نسبت به متر g را نشان می‌دهد، در این‌صورت $\bar{M}$ یک خمینه ساساکی نامیده می‌شود [۳].

صفحه برشی π از $T\bar{M}$ برای هر $x \in \bar{M}$، اگر در رابطهٔ $\phi\pi_x \subseteq \pi_x$ صدق کند یک ϕ-برش نامیده می‌شود. $\bar{M}$ با خمیدگی ϕ-برشی ثابت نامیده می‌شود اگر خمیدگی برشی همه ϕ-برش‌ها ثابت باشند. فضا فرم ساساکی یک خمینه ساساکی با خمیدگی ϕ-برشی ثابت است. اگر این مقدار ثابت برابر $4c$ باشد در این صورت فضا فرم ساساکی را به‌صورت $\bar{M}(c)$ نشان می‌دهند. در این حالت خمیدگی ریمانی میدان تانسوری $\bar{R}$ برای هر $X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ بدین‌صورت است [۱۵].

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z = {} & \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \\ & -\frac{c-1}{4}\{\eta(Z)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + [g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)]\xi \\ & - g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z\}. \end{aligned} \tag{۳}$$

مفاهیم اصلی

فرض کنید $\bar{M}(c)$ فضا فرم ساساکی با بعد $(2m+1)$ با ساختار (ϕ, ξ, η, g) باشد. فرض کنید M زیرخمینه CR با بعد $(n+1)$ و مماس بر میدان برداری ساختاری ξ از $\bar{M}(c)$ باشد و D_x برای هر $x \in M$ زیرفضای ϕ-پایا با بعد ثابت در T_xM باشد. بنابراین برای هر $x \in M$، D_x نمی‌تواند شامل ξ باشد. هم‌چنین فرض کنید برای هر $x \in M$، بعد $D_x^{\perp}$ ثابت و برابر مقدار ۱ باشد یعنی $\dim D_x^{\perp} = 1$. در حقیقت میدان برداری ناصفر U در $D_x^{\perp}$ وجود دارد به‌طوری‌که $D^{\perp} = SpanU$. بنابراین

$$N := \phi U \tag{۴}$$

باید بر M عمود باشد. بنابراین $\phi TM \subseteq TM \oplus SpanN$. حال با در نظر گرفتن میدان‌های برداری یکه متعامد $N_i, i = 1, \dots, p; N_1 := N, p := 2m - n$.

برای فضای متعامد بر M، برای هر میدان برداری مماس X، داریم:

$$\phi X = FX + u(X)N. \tag{۵}$$

با توجه به ساختار القایی F از ϕ به‌آسانی نتیجه می شود که F اندومورفیسم پادمتقارن روی T_xM است. هم‌چنین با توجه به ساختار $T_x^{\perp}M$، ضرایب P_{ij} موجودند به‌طوری‌که برای $i = 2, \dots, p$ داریم:

$$\phi N_i = \sum_{j=2}^{p} P_{ij} N_j, \tag{۶}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

و $P_{ij}=-P_{ji}$. چون میدان برداری ساختاری ξ مماس بر M است و با توجه به (۲) ، (۴) و (۵) داریم:

$$F\xi=0, \quad FU=0, \quad u(X)=g(U,X), \quad u(\xi)=\eta(U)=0. \tag{۷}$$

حال با اثر دادن ϕ بر (۵) و استفاده از(۲) ، (۴) ، (۵) و (۷) داریم:

$$F^2X=-X+u(X)U+\eta(X)\xi, \qquad u(FX)=0. \tag{۸}$$

هم‌چنین از (۲) و (۷) داریم:

$$\phi N=-U. \tag{۹}$$

با توجه به (۶) پایه موضعی یکه عمود $\{N,N_a,N_{a^*}\}_{a=1,\dots,q}$ از بردارهای قائم بر M چنان وجود دارد که

$$N_{a^*}:=\phi N_a, \qquad a=1,\dots,q:=\frac{(p-1)}{2}. \tag{۱۰}$$

اگر التصاق لوی-چویتا روی $\overline{M}(c)$ و M را به‌ترتیب با $\overline{\nabla}$ و ∇ نشان دهیم و $\nabla^\perp$ بیان‌گر التصاق قائم القایی از $\overline{\nabla}$ روی کلاف قائم $TM^\perp$ باشد بنابر فرمول وینگارتن و گاوس برای میدان‌های برداری X,Y روی M داریم:

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y), \tag{۱۱}$$

$$\overline{\nabla}_X N=-AX+\nabla^\perp_X N=-AX+\sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)N_a+s_{a^*}(X)N_{a^*}\}, \tag{۱۲}$$

$$\overline{\nabla}_X N_a=-A_aX-s_a(X)N+\sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)N_b+s_{ab^*}(X)N_{b^*}\}, \tag{۱۳}$$

$$\overline{\nabla}_X N_{a^*}=-A_{a^*}X-s_{a^*}(X)N+\sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)N_b+s_{a^*b^*}(X)N_{b^*}\}, \tag{۱۴}$$

که $s_a,s_{a^*},s_{ab},s_{ab^*},s_{a^*b},s_{a^*b^*}$ ضرایب التصاق قائم $\nabla^\perp$ و h نشان‌گر دومین فرم اساسی و A,A_a,A_{a^*} عملگرهای شکل متناظر میدان‌های برداری قائم N,N_a,N_{a^*} هستند. هم‌چنین با توجه به تعریف دومین فرم اساسی داریم:

$$h(X,Y)=g(AX,Y)N+\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aX,Y)N_a+g(A_{a^*}X,Y)N_{a^*}\}. \tag{۱۵}$$

چون میدان برداری ξ روی M مماس است بنابر (۲) ، (۴) ، (۹) ، (۱۰) ، (۱۳) ، (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$A_aX=-FA_{a^*}X+s_{a^*}(X)U, \quad A_{a^*}X=FA_aX-s_a(X)U, \tag{۱۶}$$

$$s_a(X)=-u(A_{a^*}X), \quad s_{a^*}(X)=u(A_aX). \tag{۱۷}$$

به‌علاوه، چون F پاد متقارن است با توجه به معادلهٔ (۱۵) داریم:

$$g((FA_a+A_aF)X,Y)=s_a(X)u(Y)-s_a(Y)u(X), \tag{۱۸}$$

$$g((FA_{a^*}+A_{a^*}F)X,Y)=s_{a^*}(X)u(Y)-s_{a^*}(Y)u(X). \tag{۱۹}$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۴) و (۹) و مقایسه قسمت‌های مماس و قائم و استفاده از معادلات (۲) ، (۴) ، (۹) ، (۱۰) ، (۱۱) ، (۱۲) و (۱۵) داریم:

$$(\nabla_Y F)X=-g(Y,X)\xi+\eta(X)Y-g(AY,X)U+u(X)AY, \tag{۲۰}$$

$$\nabla_X U=FAX, \qquad (\nabla_Y u)X=g(FAY,X), \tag{۲۱}$$

هم‌چنین چون میدان برداری ξ مماس بر خمینه M بود با استفاده از روابط (۲) ، (۱۱) ، (۱۵) داریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

$$\nabla_X \xi = FX, \quad (\nabla_X \eta)Y = g(FX, Y), \tag{۲۲}$$

$$\eta(AX) = g(A\xi, X) = u(X), \ \ A\xi = U, \tag{۲۳}$$

$$A_a\xi = 0, \quad A_{a^*}\xi = 0, \qquad a = 2, \ldots, q. \tag{۲۴}$$

هم‌چنین بنابر رابطه (۳)، (۵) و (۶) بنابر معادلهٔ کودازی برای میدان‌های برداری X, Y مماس بر M داریم:

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X &= \frac{c-1}{4}\{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\}\\ &+\sum_{a=1}^{q}\Big\{s_a(X)A_aY - s_a(Y)A_aX + s_{a^*}(X)A_{a^*}Y - s_{a^*}(Y)A_{a^*}X\Big\},\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X A_a)Y - (\nabla_Y A_a)X &= s_a(Y)AX - s_a(X)AY\\ &+\sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)AbY - s_{ab}(Y)A_bX + s_{ab^*}(X)A_{b^*}Y - s_{ab^*}(Y)A_{b^*}X\},\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X A_{a^*})Y - (\nabla_Y A_{a^*})X &= s_{a^*}(Y)AX - s_{a^*}(X)AY\\ &+\sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)AbY - s_{a^*b}(Y)AbX + s_{a^*b^*}(X)A_{b^*}Y - s_{a^*b^*}(Y)A_{b^*}X\},\end{aligned} \tag{۲۷}$$

که R و $R^{\perp}$ به‌ترتیب بیان‌گر تانسور خمیدگی و تانسور خمیدگی قائم بر Mهستند.

نتایج اولیه

فرض کنیم برای زیرخمینه M با بعد CR ماکسیمال، میدان برداری قائم مخالف صفر چون ζ موجود باشد به‌طوری‌که در معادلهٔ (۴.۱) صدق کند

$$h(FX, Y) - h(X, FY) = g(FX, Y)\zeta, \tag{۲۸}$$

که میدان های برداری X, Y مماس بر Mهستند. از طرفی بنابر رابطهٔ (۱۰) داریم:

$$\zeta = \rho N + \sum_{a=1}^{q}(\rho_a N_a + \rho_{a^*} N_{a^*}).$$

بنابر روابط (۱۵) و (۲۸) برای هر $a = 1, \ldots, q$ داریم:

$$(AF + FA)X = \rho FX, \tag{۲۹}$$

$$(A_aF + FA_a)X = \rho_a FX, \quad (A_{a^*}F + FA_{a^*})X = \rho_{a^*}FX. \tag{۳۰}$$

هم‌چنین از معادلات (۱۸) و (۱۹) داریم:

$$s_a(X)u(Y) - s_a(Y)u(X) = \rho_a g(FX, Y), \tag{۳۱}$$

$$s_{a^*}(X)u(Y) - s_{a^*}(Y)u(X) = \rho_{a^*} g(FX, Y). \tag{۳۲}$$

با قرار دادن $Y = U$ در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطهٔ (۷) برای هر $a = 1, \ldots, q$ داریم:

$$s_a(X) = s_a(U)u(X), \quad s_{a^*}(X) = s_{a^*}(U)u(X), \tag{۳۳}$$

و با قرار دادن $Y = \xi$ در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطهٔ (۷) برای هر $a = 1, \ldots, q$ داریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

$$s_a(\xi)=0, s_{a^*}(\xi)=0. \qquad (۳۴)$$

با جای‌گذاری روابط (۳۳) و (۳۴) در روابط (۳۱) و (۳۲) برای هر $a=1,\dots,q$ داریم:

$$\rho_a=0 \quad , \quad \rho_{a^*}=0. \qquad (۳۵)$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۳۰) برای هر $a=1,\dots,q$ داریم:

$$FA_a+A_aF=0, \quad FA_{a^*}+A_{a^*}F=0. \qquad (۳۶)$$

لم ۱. زیرفضای D و $span\{\xi,U\}$ تحت عملگر A پایا هستند.

برهان. از معادلات (۷) ، (۸) ، (۱۷) ، (۲۳) ، (۲۴) و (۲۹) داریم:

$$AU=\lambda U+\xi, \quad \lambda:=u(AU) \qquad (۳۷)$$

و برای هر $a=1,\dots,q$ داریم:

$$A_aU=u(A_aU)U=s_{a^*}(U)U, \quad A_{a^*}U=u(A_{a^*}U)U=-s_a(U)U. \qquad (۳۸)$$

با جای‌گذاری FX به‌جای X در معادلهٔ (۲۹) و استفاده از روابط (۹)، (۲۶) و (۳۷) داریم:

$$AX=\{(\lambda-\rho)u(X)+\eta(X)\}U+\{u(X)-\rho\eta(X)\}\xi+FAFX+\rho X. \qquad (۳۹)$$

معادلهٔ (۳۷) نشان می‌دهد که زیرفضای D و $span\{\xi,U\}$ تحت عملگر A پایا هستند.

بنابر لم مذکور برداری ویژه W_1 و W_2 در زیرفضای $span\{\xi,U\}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$AW_1=\gamma_1W_1 \quad , \quad AW_2=\gamma_2W_2. \qquad (۴۰)$$

لم ۲. برای مقادیر ویژه γ_1 , γ_2 داریم $\gamma_1=-\tan\theta.$ و $\gamma_2=\cot\theta$, و $\gamma_2+\gamma_1=\lambda.$.

برهان. بنابر (۳۷) و (۳۸) چون ξ و U بردار ویژه برای عملگر A نیستند بنابراین $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ موجود است که

$$W_1=\xi\cos\theta-U\sin\theta \quad , \quad W_2=\xi\sin\theta+U\cos\theta. \qquad (۴۱)$$

بنابراین داریم

$$U=-W_1\sin\theta+W_2\cos\theta,$$

از طرفی بنابر (۳۷) ، (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) داریم

$$U=\gamma_1W_1\cos\theta+\gamma_2W_2\sin\theta,$$

از این‌رو داریم:

$$\gamma_2=\cot\theta \quad , \quad \gamma_1=-\tan\theta. \qquad (۴۲)$$

هم‌چنین بنابر روابط (۳۷) ، (۳۹)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\gamma_2+\gamma_1=\lambda. \qquad (۴۳)$$

هم‌چنین چون زیرفضای D تحت عملگر A پایا بود پایه یکه متعامد $X_1,\dots,X_{2n-2}$ موجود است به‌طوری‌که

$$AX_i=\alpha_iX_i \ , \ i=1,\dots,2n-2.$$

لم ۳. برای بردار ویژه X_i از D با مقدار ویژه α_i داریم $\alpha_i^2-\rho\alpha_i+\frac{\rho\lambda}{2}+\frac{c+3}{4}=0$.

برهان. با جای‌گذاری (۳۲) و (۳۴) در (۲۶) برای میدان‌های برداری X, Y مماس بر M داریم:

$$(\nabla_XA)Y-(\nabla_YA)X=\frac{c-1}{4}\{u(X)FY-u(Y)FX-2g(FX,Y)U\}. \qquad (۴۴)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

حال با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳۷) و استفاده از متقارن بودن عملگر A و رابطهٔ (۴۴) داریم:

$$X(\lambda)u(Y)-Y(\lambda)u(X)+(\rho\lambda+2)g(FX,Y)-2g(FAX,AY)=-\frac{c-1}{2}g(FX,Y). \quad (۴۵)$$

با قرار دادن $Y=U$ در معادلهٔ (۴۵) داریم:

$$X(\lambda)=U(\lambda)u(X). \quad (۴۶)$$

با جای‌گذاری (۴۶) در معادلهٔ (۴۵) و با استفاده از معادلهٔ (۲۹) داریم:

$$(\rho\lambda+2)FX-2AFAX=-\frac{c-1}{2}FX. \quad (۴۷)$$

با جای‌گذاری X از D با مقدار ویژه α_i یعنی $AX=\alpha_i X$ و بنابر معادلهٔ (۲۹) داریم:

$$\alpha_i^2-\rho\alpha_i+\frac{\rho\lambda}{2}+\frac{c+3}{4}=0.$$

گزاره ۴. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه مقادیر ویژه عملگر شکل A ثابت هستند.

برهان. با انتخاب $Y=W_1$ و $X\in D$ در معادلهٔ (۴۴) و ضرب با W_1 با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\left(\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}\right)X(\cos\theta)=0$$

اما چون $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ از این‌رو، $X(\cos\theta)=0$ لذا $X(\sin\theta)=0$ در نتیجه داریم:

$$X(\gamma_1)=0 \ , \ \forall X\in D. \quad (۴۸)$$

هم‌چنین با انتخاب $Y=W_1$ و $X\in D$ در معادلهٔ (۴۴) و ضرب با ξ با توجه به معادلات (۲۱) ، (۲۲) ، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos\theta X(\gamma_1)+\xi(\cos\theta)+X(\sin\theta)=0$$

از این‌رو، بنابر (۴۸) داریم $\xi(\cos\theta)=0$ پس $\xi(\sin\theta)=0$ و در نتیجه داریم:

$$\xi(\gamma_1)=\xi(\gamma_2)=0. \quad (۴۹)$$

حال با انتخاب $Y=W_1$ و $X=\xi$ در معادلهٔ (۴۴) و ضرب با ξ با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos\theta\xi(\gamma_1)+\xi(\cos\theta)+\xi(\sin\theta)-U(\cos\theta)=0$$

از این‌رو، بنابر (۴۹) داریم $U(\cos\theta)=0$ لذا $U(\sin\theta)=0$ و در نتیجه داریم:

$$U(\gamma_1)=U(\gamma_2)=0. \quad (۵۰)$$

روابط (۴۸)، (۴۹) و (۵۰) نتیجه می‌دهند که مقادیر ویژه γ_1، γ_2 مقادیر ثابتی هستند. بنابراین بنابر رابطهٔ (۴۳)، λ مقدار ثابتی است.

حال با انتخاب $Y\in D$ و $X=\xi$ در معادلهٔ (۴۴) و با ضرب در Y با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) داریم

$$\xi(\alpha_i)=0. \quad (۵۱)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

دوباره با جای‌گذاری $FY \in D$ و $X = \xi$ در معادله (۴۴) و با ضرب در FY با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۹) داریم:

$$\xi\left(\rho-\alpha_i\right)=0 ,$$

از این‌رو، بنابر (۵۱) داریم:

$$\xi\left(\rho\right)=0 . \tag{۵۲}$$

حال با انتخاب $Y \in D$ و $X = U$ در معادلهٔ (۴۴) و با ضرب در Y با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۳۷) و ثابت بودن λ داریم:

$$U\left(\alpha_i\right)=0 . \tag{۵۳}$$

دوباره با جای‌گذاری $FY \in D$ و $X = U$ در معادله (۴۴) و با ضرب در FY با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۹)، (۳۷) و ثابت بودن λ داریم:

$$U\left(\rho-\alpha_i\right)=0 ,$$

از این‌رو بنابر (۵۳) داریم:

$$U\left(\rho\right)=0 . \tag{۵۴}$$

حال با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned}&\left(\nabla_X A\right)FY+F\left(\nabla_X A\right)Y+u\left(Y\right)A^2X+\left\{\left(\lambda-\rho\right)u\left(Y\right)+2\eta\left(Y\right)\right\}AX\\&+\left\{u\left(Y\right)+\rho\eta\left(Y\right)\right\}X-\left\{2g\left(AX,Y\right)-\rho g\left(X,Y\right)\right\}\xi\\&-\left\{g\left(X,Y\right)+\left(\lambda-\rho\right)g\left(AX,Y\right)+g\left(AX,AY\right)\right\}U=X\left(\rho\right)FY .\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از رابطهٔ (۷) داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n+1}g\left(\left(\nabla_{E_i}A\right)FX,E_i\right)-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}g\left(\left(\nabla_{E_i}A\right)FE_i-\left(\nabla_{FE_i}A\right)E_i,X\right)+\operatorname{tr}A^2u\left(X\right)\\&+\operatorname{tr}A\left\{\left(\lambda-\rho\right)u\left(X\right)+2\eta\left(X\right)\right\}+n\left\{u\left(X\right)-\rho\eta\left(X\right)\right\}\\&+\left(\rho-\lambda\right)u\left(AX\right)-u\left(A^2X\right)-2\eta\left(AX\right)=\left(FX\right)\rho.\end{aligned} \tag{۵۵}$$

از طرفی بنابر روابط (۷)، (۱۷)، (۲۵) و (۵۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}g\left(\left(\nabla_{E_i}A\right)FE_i-\left(\nabla_{FE_i}A\right)E_i,X\right)=0, \tag{۵۶}$$

و هم‌چنین از طرفی بنابر (۳۹) داریم:

$$\operatorname{tr}A=\frac{\rho\left(n-1\right)}{2}+\lambda, \tag{۵۷}$$

و با استفاده از رابطهٔ (۲۹) و (۴۶) داریم:

$$\operatorname{tr}A^2=\frac{\left(n-1\right)\rho\left(\rho-\lambda\right)}{2}+\lambda^2+3-n-\frac{\left(n-1\right)\left(c-1\right)}{4} . \tag{۵۸}$$

حال با جای‌گذاری روابط (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) در رابطهٔ (۵۵) داریم:

$$\left(FX\right)\left(\rho\right)=0 . \tag{۵۹}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

در نتیجه بنابر روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹)، ρ مقداری ثابت است. حال با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۵۷) داریم:

$$X\left(\alpha_i\right)\left(2\alpha_i-\rho\right)=0.$$

بنابراین یا $X\left(\alpha_i\right)=0$ و یا $2\alpha_i=\rho$. اگر $2\alpha_i=\rho$ باشد آن‌گاه چون ثابت شد ρ مقداری ثابت است. از این‌رو، α نیز مقداری ثابت است، اما اگر $X\left(\alpha_i\right)=0$ باشد بنابر روابط (۵۱) و (۵۳)، باز α مقداری ثابت است. بنابراین تمام مقادیر ویژه عملگر شکل A ثابت هستند.

نتیجه ۵. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}\left(c\right)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه ρ مقداری ثابت و ناصفر است.

برهان. روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹) نشان می‌دهد که ρ مقداری ثابت است. از طرفی بنابر این‌که ζ میدان برداری قائم مخالف صفر است و بنابر روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۵) نتیجه می‌دهند که ρ مخالف صفر است.

نتایج اصلی

گزاره ۶. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}\left(c\right)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه عملگر شکل A دقیقاً دو یا سه و یا چهار مقادیر ویژه متمایز ثابت دارد. اگر عملگر شکل A دقیقاً دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1 و γ_2 با چندگانگی‌های 1 و n. اگر عملگر شکل A دقیقاً سه مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1 ، γ_2 و $\frac{\rho}{2}$، به‌ترتیب، با چندگانگی‌های 1 ، 1 و $n-1$، و اگر عملگر شکل A دقیقاً چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1، γ_2، $\frac{\rho+\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ و $\frac{\rho-\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ به‌ترتیب با چندگانگی‌های 1 ، 1 ، $\frac{n-1}{2}$ و $\frac{n-1}{2}$.

برهان. بنابر لم ۳ و حل معادله آن سه حالت داریم. در حالت اول معادله فقط یک جواب برابر با $\frac{\rho}{2}$ دارد و $c=1$ است، در این صورت $\gamma_1=\frac{\rho}{2}$ یا $\gamma_2=\frac{\rho}{2}$. بنابرین عملگر شکل روی D برابر با یکی از γ_1 یا γ_2 است از این‌رو، با چندگانگی‌های 1 و n هستند. در حالت دوم معادلهٔ فقط یک جواب برابر با $\frac{\rho}{2}$ دارد و $c\neq1$ است که در این‌صورت $\gamma_1\neq\frac{\rho}{2}$ و $\gamma_2\neq\frac{\rho}{2}$. و در این صورت عملگر شکل A دقیقاً دارای سه مقدار ویژه متمایز γ_1 ، γ_2 و $\frac{\rho}{2}$ به‌ترتیب با چندگانگی‌های 1، 1 و $n-1$ است. در حالت آخر معادله دو جواب متمایز $\frac{\rho+\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ و $\frac{\rho-\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ را دارد که هر دو مخالف γ_1 و γ_2 هستند بنابراین عملگر شکل A دقیقاً دارای چهار مقدار ویژه متمایز γ_1 ، γ_2 ، $\frac{\rho+\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ و $\frac{\rho-\sqrt{\rho^2-2\rho\lambda-c-3}}{2}$ به‌ترتیب با چندگانگی‌های 1، 1، $\frac{n-1}{2}$ و $\frac{n-1}{2}$ است. هم‌چنین بنابر گزارهٔ ۶ همهٔ مقادیر ویژه ثابت هستند.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

در حالتی که عملگر شکل دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این‌صورت $c=1$ از این‌رو $\overline{M}(c)$، کره با بعد $2m+1$ است که این زیرخمینه‌ها در مرجع [۶] بررسی شده است.

قضیهٔ ۷. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از S^{2m+1} باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً دو مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با $S^1\times M'$ است که M' در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

در حالتی که عملگر شکل سه مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این‌صورت:

قضیهٔ ۸. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً سه مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با $M'\times C$ است که C خم ژئودزی و M' ابررویه ای تماما ژئودزیک در M هستند.

برهان. میدان برداری $Z=\lambda\xi+U$ را در $span\{\xi,U\}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $Z_\perp$ نماد عمود Z در $span\{\xi,U\}$ باشد بنابرین $Z_\perp=\xi-\lambda U$. ابتدا نشان می‌دهیم زیرفضای $D\oplus Z_\perp$ پایاست. میدان‌های برداری X و Y دلخواه را از D در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه کنیم که

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y,Z)&=g(\nabla_X Y,\lambda\xi+U)=\lambda g(\nabla_X Y,\xi)+g(\nabla_X Y,U)\\&=-\lambda g(Y,\nabla_X\xi)-g(Y,\nabla_X U)=\lambda g(Y,\phi X)-g(Y,\phi AX)\\&=\lambda g(Y,\phi X)-\lambda g(Y,\phi X)=0.\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه $g(\nabla_Y X,Z)=0$. بنابراین داریم $g([X,Y],Z)=0$. هم‌چنین به‌طریق مشابه

$$g(\nabla_X Z_\perp,Z)=0\quad,\quad g(\nabla_{Z_\perp}X,Z)=0.$$

پس داریم $g([X,Z_\perp],Z)=0$. بنابراین برای میدان‌های برداری دلخواه X و Y $[X,Y]$ عضو $D\oplus Z_\perp$ است یعنی این زیر فضا پایاست. حال فرض کنیم M' زیر خمینه انتگرال زیرفضای $D\oplus Z_\perp$ باشد. بنابراین M' یک ابررویه در داخل M با میدان برداری قائم Z است. هم‌چنین فرض کنیم C خم انتگرال میدان برداری Z باشد. هم‌چنین نشان داده شد که $C''=\nabla_Z Z=0$، یعنی C یک خم ژئودزیک در M است. هم‌چنین چون M' ابررویه‌ای از M با میدان برداری قائم Z است فرض کنیم A' عملگر شکل M' در M باشد. میدان برداری دلخواه مماسی X در M' را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف عملگر شکل داریم:

$$\begin{aligned}A'X&=-\nabla_X Z=-\overline{\nabla}_X Z+g(AX,Z)N\\&=-\lambda\overline{\nabla}_X\xi-\overline{\nabla}_X U+g(AX,\lambda\xi+U)N\\&=\lambda\phi X-\phi AU+g(AX,\lambda\xi+U)N\end{aligned}$$

اما چون $A'X\in TM'$ است بنابراین باید سمت راست معادله نیز عضو TM' باشند از این‌رو، $g(AX,\lambda\xi+U)=0$. پس داریم $A'X=\lambda\phi X-\phi AU$. لذا به‌ازای هر میدان برداری روی D برابر صفر است و هم‌چنین $AZ_\perp=0$ است. از این‌رو، به‌ازای هر میدان برداری مماس بر M' مانند X داریم $AX=0$. بنابراین M' ابررویه ای تماماً ژئودزیک در M است.

برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM'}Z=0\quad,\quad\nabla_Z TM'\subseteq TM'\quad,\quad\nabla_Z Z=0\quad,\quad\nabla_{TM'}TM'\subseteq TM'.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

چون C خمی ژئودزی است بنابراین $\nabla_Z Z = 0$. هم‌چنین چون M'ابررویه تماماً ژئودزیک در M است بنابراین $\nabla_{TM'} Z = 0$. هم‌چنین برای میدان‌های برداری X و Y در TM'، $g(\nabla_X Y, Z) = 0$. از این‌رو، $\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM'$. هم‌چنین از طرفی چون

$$g\left(\nabla_{Z_\perp} Z_\perp, Z\right) = g\left(\nabla_{\xi-\lambda U}(\xi-\lambda U), \lambda\xi + U\right) = 0$$

و

$$g(\nabla_Z X, Z) = -g(X, \nabla_Z Z) = 0$$

پس $\nabla_Z TM' \subseteq TM'$. بنابراین M به‌صورت موضعی با حاصل‌ضرب ریمانی خمینه انتگرال تماماً ژئودزیک M' و خم ژئودزی C است.

و در حالت آخر که عملگر شکل چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این‌صورت:

قضیهٔ ۹. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً چهار مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با $M_1 \times M_2$ است که M_1 و M_2 زیرخمینه‌هایی در M هستند.

برهان. توزیع های زیر (فضاهای ویژه مقادیر ویژه) را در نظر می‌گیریم

$$D_i = \left\{X \in D \,\middle|\, AX = \beta_i X\right\}, \quad i = 1,2, \qquad \beta_i = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}.$$

مثل برهان قضیهٔ ۹ میدان برداری $Z = \lambda\xi + U$ را در $span\{\xi, U\}$ در نظر می‌گیریم. زیرفضاهای $D_1 \oplus Z$ و $D_2 \oplus Z_\perp$را در نظر می‌گیریم. شبیه اثبات قضیه قبل ثابت می‌شود هر دو زیر فضا پایا هستند. حال فرض کنیم M_1 و M_2 زیرخمینه‌های انتگرال توزیع‌های مذکور باشند. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM_1} TM_1 \subseteq TM_1 \quad , \quad \nabla_{TM_2} TM_2 \subseteq TM_2 \quad , \quad \nabla_{TM_2} TM_1 \subseteq TM_1 \quad , \quad \nabla_{TM_1} TM_2 \subseteq TM_2 .$$

مشابه استدلال آخر قضیهٔ ۹ روابط مذکور نیز حاصل می‌شوند. از این‌رو، M به‌صورت موضعی برابر با $M_1 \times M_2$ است.

بنابراین در حالت کلی نشان دادیم:

قضیهٔ ۱۰. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطهٔ (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با یکی از این‌حالات است:

الف) برابر با $S^1 \times M'$ که M' در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

ب) برابر با $M' \times C$ که C خم ژئودزی و M' ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در M است.

ج) برابر با $M_1 \times M_2$ که M_1 و M_2 زیرخمینه‌هایی در M است.

منابع

1. Bejancu A., "CR-submanifolds of Kaeher Manifold", Proc. Amer. Math. Soc. 69, No.1 (1978) 135-142.
2. Bejancu A., "Geometry of CR-submanifolds", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo (1986).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]

3. Blair D. E., "Contact manifolds in Riemannian geometry", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin (1976).
4. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geometry and its Applications, 26 (2) (2008) 208-217.
5. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms and second fundamental form", in: Proceedings of the Workshop Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, May 15-21, (2002) (2004) 105-116.
6. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geom. Appl. 26 (2) (2008) 208-217.
7. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension of complex projective space", Arch. Math. 71 (1998) 148-158.
8. de Rham G., Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comment. Math. Helv. 268, 328-344 (1952).
9. Kim H. S., Pak J. S., "Certain contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Bull. Korean Math. Soc. 44. 1 (2007) 109-116.
10. Kim H. S., Pak J. S., "Certain class of contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Taiwaness J. Math. 14, 2 (2010) 629-646.
11. Kim H. S., Pak J. S., Certain class of contact CR-submanifolds of a Sasakian space form, Commun. Korean Math. Soc. 29, 1 (2014) 131-140.
12. Kobayashi S., Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry I", Wiley and Sons Inc. New York-London (1963).
13. Kwon J. H., Pak J. S., "On some contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Soochow J. Math. 26, 4 (2000) 427-439.
14. Pak J. S., Kwon J. H., Kim H. S., Kim Y. M., "Contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Geom. Dedicata 114 (2005) 1-11.
15. Yano K., Kon M., "Structure on Manifold, World Scientific", World Scientific, Singapore, (1984).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.5.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.1]