# دوگان‌های تقریبی تعریف شده به‌وسیلهٔ ضرب‌گرها و نقش آن‌ها در بازسازی سیگنال‌ها

مرتضی میرزائی ازندریانی*، مهدی رحیمی؛ دانشگاه قم، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۴/۲۹ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

## چکیده

در این مقاله انواع جدیدی از دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی در فضاهای هیلبرت را با استفاده از ضرب‌گرها، عملگرهای وارون‌پذیر و نشانه‌ها معرفی می‌کنیم. تاکنون مقالات متعددی در مورد دوگان‌های تقریبی و کاربردهای آن‌ها نوشته شده که در این مقالات دوگان‌های تقریبی برای دنباله‌های بسل بررسی شده‌اند. در این‌جا دوگان‌های تقریبی را برای دنباله‌های دلخواه در یک فضای هیلبرت تعریف کرده، آن‌ها را با دوگان‌های تقریبی بسل مورد مقایسه قرارداده و نشان می‌دهیم با وجود این‌که این دوگان‌های تقریبی لزوماً تمام خواص دوگان‌های تقریبی بسل را ندارند اما می‌توانند در بازسازی سیگنال‌ها مفید واقع شوند. علاوه براین، نتایج جدیدی برای دوگان‌های تقریبی بسل به‌دست می‌آوریم.

**واژه کلیدی:** فضای هیلبرت، دنبالهٔ بسل، قاب، دوگان تقریبی، ضرب‌گر، بازسازی سیگنال.
**رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۴۲C۱۵**

## مقدمه و پیش‌نیازها

پیش از سال ۱۹۴۶ میلادی، نمایش سیگنال‌ها به‌صورت سری فوریه و استفاده از ضرایب فوریه، روشی متداول در عمل پردازش سیگنال‌ها به‌حساب می‌آمد. اما این روش مشکلاتی به‌همراه داشت که عمدتاً ناشی از منحصر به فرد بودن ضرایب فوریه بود. چون اگر در حین انتقال سیگنال‌ها از فرستنده به گیرنده برخی از ضرایب فوریه از بین می‌رفتند و یا دچار نویز و اختلال می‌شدند دیگر گیرنده قادر به بازسازی سیگنال‌ها به‌طور کامل و بهینه نبود. در سال ۱۹۴۶ گابور[1] در [۱۷] راه حل مناسبی برای حل این مشکل ارائه داد که بسیار کارآمد بود. او در روش خود خواص اساسی یک دنباله را که بعدها قاب نامیده شد به‌دست آورده بود. در سال ۱۹۵۲ دافین[2] و شیفر[3] که در حال بررسی چند مسئلهٔ اساسی در مورد سری‌های فوریهٔ غیرهارمونیک بودند، احساس نیاز به معرفی مفهومی کردند و آن را یک قاب فضای هیلبرت نامیدند [۱۵]. در سال ۱۹۸۶ دوبچیز[4]، گراسمان[5] و مِیِر[6] در [۱۳] مفهوم قاب‌ها را بازنگری کردند و ارزش‌ها و کاربردهای آن‌ها را به‌ویژه در پردازش سیگنال‌ها و اطلاعات خاطرنشان کردند. پس از آن، قاب‌ها و تعمیم‌های آن‌ها به‌طور گسترده بررسی شد و کاربردهای فراوانی از آن‌ها نه فقط در پردازش سیگنال‌ها بلکه در شاخه‌های مختلف علم و صنعت ارائه شدند [۷]، [۹]، [۱۰]، [۱۸]. در ادامهٔ این بخش، مطالب مورد نیاز در مورد قاب‌ها را ذکر می‌کنیم.

*نویسنده مسئول morteza_ma62@yahoo.com

1. Gabor
2. Duffin
3. Schaeffer
4. Daubechies
5. Grossman
6. Meyer


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

**تعریف ۱.** فرض کنیم $H$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد. دنبالهٔ $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq H$ یک قاب برای $H$ است اگر دو عدد مثبت $A$ و $B$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B\|f\|^2.$$

در این‌حالت $F$ را یک $(A,B)$ قاب می‌نامیم. $A$ را یک کران پایین و $B$ را یک کران بالای قاب می‌نامیم.

اگر در تعریف ۱، $F$ در نامساوی سمت راست صدق کند، آن‌گاه $F$ یک دنبالهٔ بسل نامیده می‌شود. یک قاب را تنگ گوییم هرگاه $A=B$ و آن‌را پارسوال نامیم هرگاه $A=B=1$.

**تعریف ۲.** فرض کنیم $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ بسل باشد. دراین‌صورت

الف) عملگر ترکیبی $F$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$T_F:\ell^2(\mathbb{N})\to H,\quad T_F(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i.$$

به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که $T_F$ خوش‌تعریف و کران‌دار است.

ب) الحاقی عملگر $T_F$، که $T_F^*(f)=\{\langle f,f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ است، عملگر تحلیلی $F$ نامیده می‌شود.

پ) عملگر $S_F$ (گاهی اوقات به‌صورت $S_{FF}$ نیز نمایش داده می‌شود) به‌صورت $S_F=T_FT_F^*$ تعریف می‌شود و به‌ازای هر $f\in H$ داریم:

$$S_Ff=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle f_i.$$

اگر $F$ یک $(A,B)$ قاب باشد، آن‌گاه $A.Id_H\leq S_F\leq B.Id_H$. دراین‌حالت $S_F$ را عملگر قاب می‌نامیم. درواقع دنبالهٔ بسل $F$ یک قاب است اگر و فقط اگر $S_F$ وارون‌پذیر باشد.

اکنون فرض کنیم $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $H$ باشد. اگر سیگنال‌ها را اعضای این فضای هیلبرت در نظر بگیریم و تعریف کنیم $\tilde{f}_i=S_F^{-1}f_i$ ، آن‌گاه به‌ازای هر سیگنال $f$ در این فضا داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\tilde{f}_i\rangle f_i=f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle\tilde{f}_i.$$

تساوی مذکور نشان می‌دهد که هر سیگنال به‌کمک دنبالهٔ $\left\{\tilde{f}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ بازسازی می‌شود. $\left\{\tilde{f}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ را دوگان کانونی $F$ می‌نامیم و با $\tilde{F}$ نمایش می‌دهیم. به‌طورکلی دنبالهٔ بسل $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دوگان برای دنبالهٔ بسل $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم اگر به‌ازای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i.$$

به‌سادگی به‌دست می‌آید که اگر $G$ یک دوگان $F$ باشد، آن‌گاه $F$ نیز یک دوگان $G$ است یعنی:

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle g_i.$$

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

چنان‌که مشاهده کردیم هر قاب، حداقل یک دوگان (دوگان کانونی) دارد. نکتهٔ مهم دیگر این است که یک دنبالهٔ بسل، قاب است اگر و فقط اگر یک دوگان داشته باشد [۱۱].

از آن‌جا که بازسازی سیگنال‌ها عملی بسیار مهم در مخابرات به‌شمار می‌آید و از توضیحات فوق برمی‌آید که با داشتن یک دوگان از یک قاب امکان بازسازی سیگنال‌ها وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت که یافتن دوگان برای یک قاب اهمیت فراوانی دارد. متأسفانه به‌دست آوردن دوگان، همیشه کار آسانی نیست. حتی به‌دست آوردن دوگان کانونی نیز در بسیاری از موارد به‌خاطر دشوار بودن محاسبهٔ وارون عملگر قاب، مستلزم محاسبات پیچیده است. دراین مواقع دوگان‌های تقریبی می‌توانند مفید واقع شوند. دوگان‌های تقریبی به‌وسیلهٔ کریستِنسِن[1] و لوگِسِن[2] معرفی شدند [۱۲]. (قابل ذکر است که پیش‌تر نیز دوگان‌های تقریبی بدون آن‌که نامی برآن‌ها گذارده شده باشد، استفاده می‌شدند).

**تعریف ۳.** دنبالهٔ بسل $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دوگان تقریبی برای دنبالهٔ بسل $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم اگر یک $0<\varepsilon<1$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$\Big\| f-\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i \Big\| \le \varepsilon \| f \|.$$

(هر چه $\varepsilon$ کوچک‌تر باشد دوگان تقریبی مطلوب‌تر است).

در [۱۲] ثابت شده است که اگر $G$ یک دوگان تقریبی $F$ باشد، آن‌گاه $G$ و $F$ هر دو قاب هستند و $F$ نیز یک دوگان تقریبی $G$ است، یعنی به‌ازای هر $f\in H$ داریم:

$$\Big\| f-\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle g_i \Big\| \le \varepsilon \| f \|.$$

ضرب‌گرهای بسل در فضاهای هیلبرت به‌وسیلهٔ پیتِر بالاژ[3] در [۳] معرفی شدند. ضرب‌گرهای بسل عملگرهایی هستند که با قرار گرفتن یک عملگر ضرب میان عملگرهای تحلیلی و ترکیبی، تعریف می‌شوند. پس از معرفی ضرب‌گرهای بسل، کاربردها و تعمیم‌های مختلفی از این عملگرها ارائه شدند [۴]، [۵]، [۶]، [۱۶]، [۲۱]، [۲۴]، [۲۵].

**تعریف ۴.** فرض کنیم $H$ یک فضای هیلبرت، $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌های بسل در $H$ باشند و $m=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^{\infty}(\mathbb{N})$. عملگر $\mu_m$ که آن‌را عملگر ضرب می‌نامیم بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_m:\ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N}),\quad \mu_m(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})=\{m_ic_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

اکنون عملگر $T_G\mu_mT_F^*$ را یک ضرب‌گر بسل با نشانهٔ $m$ برای دو دنبالهٔ بسل $G$ و $F$ می‌نامیم. واضح است که برای هر $f\in H$ داریم:

$$T_G\mu_mT_F^*(f)=\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle f,f_i\rangle g_i.$$

پس از معرفی ضرب‌گرهای بسل، ضرب‌گرها برای دنباله‌های غیر بسل مورد توجه قرار گرفتند [۲۶]، [۲۷]، [۲۸]. تاکنون مقالات متعددی درمورد دوگان‌های تقریبی نوشته شده‌اند که در آن‌ها دوگان‌های تقریبی برای دنباله‌های بسل بررسی شده‌اند (قابل توجه است که مقالات ارزندهٔ فراوانی در مورد ضرب‌گرها و دوگان‌های تقریبی نوشته شده‌اند که با

1. Christensen
2. Laugesen
3. Balazs

توجه به تعداد زیاد آن‌ها امکان ذکر آن‌ها در قسمت منابع این مقاله وجود ندارد. برای بررسی کامل این مفاهیم، منابع [۳] و [۱۲] را ملاحظه کنید. در این مقاله برای دوگان‌های تقریبی، از چهار مقالهٔ [۱۲]، [۱۴]، [۱۹]، [۲۲] استفاده می‌کنیم). در مقالهٔ [۲۳]، با استفاده از ضرب‌گرهای بسل برای $C^*$-مدول‌های هیلبرت که در [۲۰] تعریف شده‌اند، نوع جدیدی از دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی برای دنباله‌های بسل در$C^*$-مدول‌های هیلبرت معرفی شده است. در بخش بعد، با استفاده از ضرب‌گرها، دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی را برای دنباله‌های دلخواه و نه لزوماً بسل در فضاهای هیلبرت معرفی کرده و آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

در سرتاسر این مقاله، $H$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ است. هم‌چنین $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد مختلط است که آن‌را نشانه می‌نامیم.

## ضرب‌گرها و دوگان‌های تقریبی در فضاهای هیلبرت

این بخش را با تعریف ۵ آغاز می‌کنیم.

**تعریف ۵.** فرض کنیم $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو دنباله در فضای هیلبرت $H$ باشند. هم‌چنین فرض کنیم $T$ عملگری کران‌دار و وارون‌پذیر روی $H$ و $m=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشند.

الف) $G$ را یک $(m,T)$–دوگان $F$ می‌نامیم هرگاه

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle Tf, g_i\rangle f_i \qquad (f\in H).$$

ب) $G$ را یک $T$–دوگان $F$ می‌نامیم هرگاه

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Tf, g_i\rangle f_i \qquad (f\in H).$$

(در واقع $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ است که به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$، داریم $m_i=1$).

پ) $G$ را یک $m$–دوگان $F$ می‌نامیم هرگاه

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle f, g_i\rangle f_i \qquad (f\in H).$$

(در این‌جا $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ با $T=Id_H$ است).

ت) $G$ را یک دوگان $F$ می‌نامیم هرگاه

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f, g_i\rangle f_i \qquad (f\in H).$$

(در این‌حالت $G$ یک $Id_H$–دوگان $F$ است).

چنان‌که در مقدمهٔ این مقاله ذکر کردیم، اگر $G$ و $F$ دنباله‌های بسل باشند و $G$ یک دوگان $F$ باشد، آن‌گاه $F$ نیز یک دوگان $G$ است. اما مثال زیر نشان می‌دهد که این نتیجه برای دنباله‌های دلخواه در یک فضای هیلبرت لزوماً برقرار نیست.

**مثال ۶.** تعریف می‌کنیم

$$F=\left\{e_1,e_1,-e_1,e_2,e_1,-e_1,e_3,e_1,-e_1,\dots\right\}$$

$$G=\left\{e_1,e_1,e_1,e_2,e_2,e_2,e_3,e_3,e_3,\dots\right\}$$

(یعنی $f_1=f_2=e_1$، $f_3=-e_1$ و $\dots$ . هم‌چنین $g_1=g_2=g_3=e_1$، $g_4=g_5=g_6=e_2$ و $\dots$).

به‌ازای هر $f\in H$ تعریف می‌کنیم:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\langle f,g_i\rangle f_i .$$

از تعریف $S_n$ به‌دست می‌آوریم که اگر $i\in\mathbb{N}$، آن‌گاه $S_n(e_i)=\circ$ یا $S_n(e_i)=e_i$ و یا $S_n(e_i)=e_i+e_1$. هم‌چنین اگر $i\neq j$ و $S_n(e_i)=e_i+e_1$، آن‌گاه $S_n(e_j)=\circ$ یا $S_n(e_j)=e_j$. به‌علاوه، به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ یک $N_i$ موجود است به‌طوری‌که اگر $n\geq N_i$، آن‌گاه $S_n(e_i)=e_i$. اکنون با توجه به این توضیحات درمورد $S_n$ها و با درنظرگرفتن این نکته که برای $f=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i\in H$ و $\varepsilon>\circ$، $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\sum_{i=m}^{\infty}|c_i|^2<\varepsilon$، می‌توان $N\in\mathbb{N}$ را طوری یافت که

$$n\geq N\Rightarrow \|S_n(f)-f\|<\varepsilon$$

و این یعنی $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i=f$، پس $G$ یک دوگان $F$ است. اکنون به‌ازای هر $f\in H$ تعریف می‌کنیم:

$$T_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\langle f,f_i\rangle g_i$$

داریم:

$$T_1(e_1)=e_1,\ \ T_2(e_1)=2e_1,\ \ T_3(e_1)=e_1,\ \ T_4(e_1)=e_1,$$
$$T_5(e_1)=e_1+e_2,\ \ T_6(e_1)=e_1,\ \ T_7(e_1)=e_1,$$
$$T_8(e_1)=e_1+e_3,\ \ T_9(e_1)=e_1,\dots$$

چنان‌که مشاهده می‌شود $\{T_n(e_1)\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیر دنباله‌ای است که به $e_1$ همگرا است، هم‌چنین دارای زیر دنباله‌ای است که به $e_1$ همگرا نیست پس $\{T_n(e_1)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا نیست، از این‌رو، $F$ دوگان $G$ نیست.

دقت شود که $G$ بسل و درواقع قاب است زیرا به‌ازای هر $f\in H$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,g_i\rangle|^2\ =3\|f\|^2 .$$

اما واضح است که $F$ بسل نیست چون اگر $f=e_1$، آن‌گاه سری $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,f_i\rangle|^2$ همگرا نیست.

**تعریف ۷.** فرض کنیم $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو دنباله در فضای هیلبرت $H$ باشند و $m=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{C}$. در این‌صورت عملگر $M_{m,F,G}$ را روی $H$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$M_{m,F,G}(f)=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle f,g_i\rangle f_i .$$

دقت شود که لزوماً عملگر $M_{m,F,G}$ به‌ازای هر $m$، $F$ و $G$ خوش‌تعریف نیست. به‌عنوان نمونه، با در نظر گرفتن مثال ۶، مشاهده می‌شود که اگر به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ فرض کنیم $m_i=1$، آن‌گاه $M_{m,F,G}=Id_H$، اما $M_{m,G,F}$ خوش-تعریف نیست زیرا $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle e_1,f_i\rangle g_i$ در $H$ همگرا نیست.

در [۳] نشان داده شده است که اگر $m=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ و $G,F$ دو دنبالهٔ بسل باشند، آن‌گاه $M_{m,F,G}$ یک عملگر کران‌دار روی $H$ است و الحاقی آن یعنی $M^*_{m,F,G}$ برابر است با $M_{\bar{m},G,F}$ که $\bar{m}=\{\bar{m}_i\}_{i=1}^{\infty}$. دقت کنید که این مطلب لزوماً برای دنباله‌های غیر بسل برقرار نیست. اگر مثال ۶ را با فرض $m_i=1$ به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ در نظر بگیریم داریم $M_{m,F,G}=Id_H$ اما $M^*_{m,F,G}\neq M_{\bar{m},G,F}$ زیرا $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف نیست.

**قضیهٔ ۸.** الف) اگر عملگر $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف نباشد، آن‌گاه هیچ عملگر وارون‌پذیری مانند $T$ موجود نیست به‌طوری‌که $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد.

ب) $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ است اگر و تنها اگر عملگر $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف باشد و $M_{m,F,G}T=Id_H$.

**اثبات:** الف) فرض کنیم $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف نباشد، پس یک $f_\circ\in H$ موجود است به‌طوری‌که

$$M_{m,F,G}(f_\circ)=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle f_\circ,g_i\rangle f_i$$

همگرا نیست. اگر عملگر وارون‌پذیری مانند $T$ موجود باشد که $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد، آن‌گاه

$$T^{-1}f_\circ=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle T(T^{-1}f_\circ),g_i\rangle f_i=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle f_\circ,g_i\rangle f_i,$$

که این با واگرا بودن $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle f_\circ,g_i\rangle f_i$ در تناقض است.

ب) فرض کنیم $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد. با توجه به قسمت الف، $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف است. اکنون به ازای هر $f\in H$ داریم:

$$M_{m,F,G}Tf=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\langle Tf,g_i\rangle f_i=f$$

و این یعنی $M_{m,F,G}T=Id_H$. عکس این گزاره به‌سهولت اثبات می‌شود.

تعریف ۹ را از [۲۸] یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۹.** ضرب‌گر $M_{m,F,G}$ را به‌طور نامشروط همگرا گوییم هرگاه به‌ازای هر $f\in H$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} m_n\langle f,g_n\rangle f_n$ در $H$ به‌طور نامشروط همگرا باشد.

**قضیهٔ ۱۰.** الف) فرض کنیم $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد. در این‌صورت $F$ یک $(\bar{m},T^*)$–دوگان $G$ است اگر و تنها اگر $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف باشد.


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

ب) اگر $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد و عملگر $M_{m,F,G}$ به‌طور نامشروط همگرا باشد، آن‌گاه $F$ یک $(\bar{m},T^*)$–دوگان $G$ است.

**اثبات:** الف) اگر $F$ یک $(\bar{m},T^*)$–دوگان $G$ باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۸، $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف است.

برای اثبات عکس گزاره، فرض می‌کنیم $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف باشد. چون $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ است پس بنابر قضیهٔ ۸، $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف است و $M_{m,F,G}T=Id_H$. اکنون به‌ازای هر $f,g\in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle M^*_{m,F,G}f,g\rangle &= \langle f,M_{m,F,G}g\rangle\\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^{\infty}\bar{m}_i\langle f,f_i\rangle g_i,g\Big\rangle = \langle M_{\bar{m},G,F}f,g\rangle.\end{aligned}$$

از این‌رو، $M^*_{m,F,G}=M_{\bar{m},G,F}$. از طرفی چون $M_{m,F,G}T=Id_H$ بنابراین $T^*M^*_{m,F,G}=Id_H$ و چون $T^*$ وارون‌پذیر است داریم $M^*_{m,F,G}T^*=Id_H$ و در نتیجه $M_{\bar{m},G,F}T^*=M^*_{m,F,G}T^*=Id_H$. اکنون قضیهٔ ۸ ایجاب می‌کند که $F$ یک $(\bar{m},T^*)$–دوگان $G$ باشد.

ب) چون $M_{m,F,G}$ به‌طور نامشروط همگراست، لم ۳.۱ در [۲۸] ایجاب می‌کند که $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف باشد. اکنون نتیجه از قسمت الف حاصل می‌شود.

**نکته ۱۱.** چنان‌که در مثال ۶ ملاحظه می‌کنیم، به‌ازای هر $f\in H$ داریم $f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i$. اما با توجه به قضیهٔ ۸ هیچ عملگر وارون‌پذیری مانند $T$ موجود نیست به‌طوری‌که $f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Tf,f_i\rangle g_i$. این نکته نشان می‌دهد که معادل بودن سه گزارهٔ ذکر شده در لم ۲.۱ در [۱۴]، لزوماً برای دنباله‌های غیر بسل برقرار نیست.

**تعریف ۱۲.** فرض کنیم $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو دنباله در فضای هیلبرت $H$ باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $T$ عملگری کران‌دار و وارون‌پذیر روی $H$ و $m=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشند.

الف) $G$ را یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ می‌نامیم هرگاه یک عدد $0<K<1$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\Big\| f-\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle Tf,g_i\rangle f_i\Big\|\le K\|f\| \qquad (f\in H).$$

ب) $G$ را یک $T$–دوگان تقریبی $F$ می‌نامیم هرگاه $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ باشد که به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $m_i=1$.

پ) $G$ را یک $m$–دوگان تقریبی $F$ می‌نامیم هرگاه $G$ یک $(m,Id_H)$–دوگان تقریبی $F$ باشد.

ت) $G$ را یک دوگان تقریبی $F$ می‌نامیم هرگاه یک عدد $0<K<1$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\Big\| f-\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i\Big\|\le K\|f\| \qquad (f\in H)$$

(در این‌حالت $G$ یک $Id_H$–دوگان تقریبی $F$ است).

از تعریف ۱۲ بلافاصله نتیجه می‌گیریم که یک دوگان، دوگان تقریبی نیز هست.

مشابه اثبات قضیهٔ ۸ و با استفاده از الگوریتم نیومن برای جبرهای باناخ، قضیهٔ ۱۳ اثبات می‌شود.


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

**قضیهٔ ۱۳.** الف) اگر عملگر $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف نباشد، آن‌گاه هیچ عملگر وارون‌پذیری مانند $T$ موجود نیست به‌طوری‌که $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ باشد.

ب) $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ است اگر و تنها اگر عملگر $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف باشد و

$$\| M_{m,F,G}T - Id_H \| < 1.$$

در این‌حالت $M_{m,F,G}$ یک عملگر وارون‌پذیر است.

دقت شود که اگر $G$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد، آن‌گاه $T$ وارون عملگر $M_{m,F,G}$ است. حال اگر $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ باشد، آن‌گاه با استفاده از الگوریتم نیومن داریم:

$$T^{-1}M_{m,F,G}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(Id_H - M_{m,F,G}T)^n \Rightarrow M_{m,F,G}^{-1} = T\sum_{n=0}^{\infty}(Id_H - M_{m,F,G}T)^n$$

پس هر $f \in H$ بدین‌صورت بازسازی می‌شود:

$$\begin{aligned} f &= M_{m,F,G}^{-1}M_{m,F,G} f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T(Id_H - M_{m,F,G}T)^n M_{m,F,G} f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} m_i \langle f, g_i\rangle T(Id_H - M_{m,F,G}T)^n f_i. \end{aligned}$$

در [۱۲] ثابت شده‌است که اگر $G$ و $F$ دنباله‌های بسل باشند و $G$ یک دوگان تقریبی $F$ باشد، آن‌گاه $F$ نیز یک دوگان تقریبی $G$ است. هم‌چنین اگر دنبالهٔ بسلی دارای یک دوگان تقریبی باشد، آن‌گاه قاب است. اما مثال ۶ نشان می‌دهد که این نتایج لزوماً برای دنباله‌های غیربسل برقرار نیستند. زیرا در این مثال $M_{m,F,G} = Id_H$ ( $m_i = 1$ برای هر $i \in \mathbb{N}$) پس $G$ یک دوگان تقریبی $F$ است، اما چون $M_{m,G,F}$ خوش‌تعریف نیست پس $F$ یک دوگان تقریبی $G$ نیست و چنان‌که در مثال ۶ نشان دادیم $F$ قاب نیست. اما اگر $M_{m,F,G}$ و $M_{\bar{m},G,F}$ خوش‌تعریف باشند چنان‌که در اثبات قسمت الف قضیهٔ ۱۰ نشان داده شد $M^*_{m,F,G} = M_{\bar{m},G,F}$. از این‌رو، از رابطهٔ

$$\| M_{m,F,G} - Id_H \| = \| (M_{m,F,G} - Id_H)^* \| = \| M_{\bar{m},G,F} - Id_H \|$$

نتیجه می‌گیریم که $G$ یک $m$–دوگان تقریبی $F$ است اگر و فقط اگر $F$ یک $\bar{m}$–دوگان تقریبی $G$ باشد.

مثال ۱۴ نشان می‌دهد که یک دنباله مانند $G$ می‌تواند دوگان (دوگان تقریبی) دنباله‌ای مانند $F$ باشد و همین‌طور $F$ دوگان (دوگان تقریبی) $G$ باشد، اما هیچ یک از این دو دنباله، بسل نباشند.

**مثال ۱۴.** تعریف می‌کنیم:

$$F = \left\{e_1, e_2, e_2, -e_2, e_3, e_3, -e_3, e_3, -e_3, e_4, e_4, -e_4, e_4, -e_4, e_4, -e_4, \ldots\right\}$$

$$G = \{e_1, e_2, e_2, e_2, e_3, e_3, e_3, e_3, e_3, e_4, e_4, e_4, e_4, e_4, e_4, \ldots\}$$

در واقع $F$ به این‌صورت تعریف می‌شود که به‌ازای $n \geq 1$، ابتدا یک $e_n$ قرار می‌گیرد و پس از آن $2(n-1)$ جمله یکی در میان $e_n$ و $-e_n$ قرار می‌گیرند.

$G$ به‌این‌صورت تعریف می‌شود که به‌ازای $n \geq 1$، ابتدا یک $e_n$ قرار می‌گیرد و پس از آن $2n$ جمله $e_{n+1}$ قرار می‌گیرند.

$G$ و $F$ بسل نیستند، زیرا اگر فرض کنیم $F$ بسل باشد، آن‌گاه $B > 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \| f \|^2 .$$

اکنون اگر فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $n > B$، با توجه به تعریف $F$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_n, f_i \rangle|^2 \geq n > B = B \| e_n \|^2$$

که تناقض است. با همین روش می‌توان نشان داد که $G$ نیز یک دنبالهٔ بسل نیست. اثبات این‌که به‌ازای هر $f \in H$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle g_i = f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i$$

مشابه استدلال صورت گرفته در مثال ۶ (آن‌جا که نشان دادیم $G$ یک دوگان $F$ است) است.

چنان‌که قبلاً ذکر شد اگر $G$ و $F$ دنباله‌های بسل باشند و $G$ یک دوگان تقریبی $F$ باشد، آن‌گاه $F$ نیز یک دوگان تقریبی $G$ است و هر دو قاب هستند. این نشان می‌دهد که اگر $F$ یک دنبالهٔ بسل غیر قاب باشد، آن‌گاه هیچ دوگان و یا دوگان تقریبی که بسل باشد، ندارد. اما مثال ۱۵ نشان می‌دهد که $F$ می‌تواند یک دوگان (و در نتیجه یک دوگان تقریبی) غیربسل داشته باشد.

**مثال ۱۵.** به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $f_n = \frac{1}{n} e_n$ و $g_n = n e_n$، هم‌چنین $F = \{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ و $G = \{ g_n \}_{n=1}^{\infty}$. دراین‌صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle g_n = f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n \qquad (f \in H).$$

$F$ بسل است زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \| f \|^2,$$

اما یک قاب نیست. فرض کنیم یک قاب باشد. بنابراین $A > 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$A \| f \|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \frac{1}{n} e_n \rangle|^2 .$$

اکنون فرض کنیم $n_0 \in \mathbb{N}$. داریم:

$$A = A \| e_{n_0} \|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_{n_0}, \frac{1}{n} e_n \rangle|^2 = \frac{1}{n_0^2}.$$

چون $n_0$ عضوی دلخواه از اعداد طبیعی است پس باید $A = 0$ که این تناقض است. از این‌رو، $F$ بسل است و قاب نیست و چون $G$ یک دوگان $F$ است، نتیجه می‌گیریم که $G$ بسل نیست.

**قضیهٔ ۱۶.** فرض کنیم $F = \{ f_i \}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$، $m = \{ m_i \}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ و $T$ عملگری کران‌دار و وارون‌پذیر روی $H$ باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

الف) $F$ دارای یک $(m,T)$–دوگان است.

ب) $F$ دارای یک $(m,T)$–دوگان تقریبی است.

پ) دنباله‌ای مانند $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq H$ موجود است به‌طوری‌که عملگر

$$M_{m,F,G}:H\to H,\quad M_{m,F,G}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle x,g_i\rangle f_i$$

خوش‌تعریف و وارون‌پذیر است.

ت) عملگری مانند $S$ و دنباله‌ای مانند $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ موجود است به‌طوری‌که $\|ST-Id_H\|<1$ و $\{(S^*T^*)^{-1}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک $(m,T)$–دوگان $F$ باشد.

**اثبات:** اثبات استلزام‌های الف)⇐ب) و ب)⇐پ) با توجه به تعریف دوگان، دوگان تقریبی و قضیهٔ ۱۳ به‌دست می‌آیند.

پ)⇐الف) اگر $M_{m,F,G}$ خوش‌تعریف و وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle f,(M_{m,F,G}^{-1})^*g_i\rangle f_i=\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle Tf,(M_{m,F,G}^*T^*)^{-1}g_i\rangle f_i,$$

که این نشان می‌دهد $\{(M_{m,F,G}^*T^*)^{-1}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک $(m,T)$–دوگان برای $F$ است.

ب)⇐ت) با توجه به قضیهٔ ۱۳، اگر $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ باشد، آن‌گاه با در نظرگرفتن $S=M_{m,F,G}$ داریم $\|ST-Id_H\|<1$. هم‌چنین

$$\sum_{i=1}^{\infty}m_i\langle Tf,(S^*T^*)^{-1}g_i\rangle f_i=f$$

که این نشان می‌دهد $\{(S^*T^*)^{-1}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک $(m,T)$–دوگان برای $F$ است. ت)⇐الف) واضح است.

اثبات ب)⇐ت) قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که اگر $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد، آن‌گاه $\{(M_{m,F,G}^*T^*)^{-1}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک $(m,T)$–دوگان برای $F$ است، یعنی با استفاده از یک $(m,T)$–دوگان تقریبی می‌توان یک $(m,T)$–دوگان به‌دست آورد.

چنان‌که قبلاً ذکر شد، اگر $F$ و $G$ دو دنبالهٔ بسل و دوگان یک‌دیگر باشند، آن‌گاه هر دو قاب هستند. مثال ۱۷ نشان می‌دهد که این نتیجه لزوماً برای $m$–دوگان‌ها برقرارنیست.

**مثال ۱۷.** فرض کنیم $f_n=g_n=\frac{1}{n}e_n$ و $m_n=n^2$. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n\langle f,g_n\rangle f_n=f=\sum_{n=1}^{\infty}m_n\langle f,f_n\rangle g_n\quad (f\in H)$$

پس $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک $m$–دوگان $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ است اما چنان‌که در مثال ۱۵ نشان داده شد $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بسل است و قاب نیست.

**قضیهٔ ۱۸.** فرض کنیم $F$ و $G$ دو دنبالهٔ بسل باشند به‌طوری‌که $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی برای $F$ است. اگر $m$ یک دنبالهٔ کران‌دار باشد، آن‌گاه $F$ و $G$ هر دو قاب هستند.


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

**اثبات:** فرض کنیم $K>0$ طوری باشد که به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $|m_n|\leq K$. چون $G$ یک $(m,T)$–دوگان تقریبی $F$ است، طبق قضیهٔ ۱۳، $M_{m,F,G}$ وارون‌پذیر است و به‌ازای هر $f\in H$ داریم:

$$f=M_{m,F,G}M_{m,F,G}^{-1}f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\bar{m}_i(M_{m,F,G}^{-1})^{*}g_i\rangle\ f_i \qquad (۱)$$

هم‌چنین

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,\bar{m}_i(M_{m,F,G}^{-1})^{*}g_i\rangle|^2\leq K^2B\|M_{m,F,G}^{-1}\|^2\|f\|^2 \qquad (۲)$$

که $B$ یک کران بالا برای دنبالهٔ بسل $G$ است. نامساوی (۲) نشان می‌دهد که $\{\bar{m}_i(M_{m,F,G}^{-1})^{*}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ بسل است و رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که $\{\bar{m}_i(M_{m,F,G}^{-1})^{*}g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دوگان $F$ است و چون $F$ نیز بسل است و دارای یک دوگان بسل است، پس قاب است. اثبات قاب بودن $G$ مشابه است، فقط به جای $M_{m,F,G}$ عملگر $M_{\bar{m},G,F}$ را درنظر می‌گیریم (دقت شود که چون دنباله‌های $F$ و $G$ بسل هستند و $\bar{m}$ کران‌دار است پس $M_{\bar{m},G,F}$ یک ضرب‌گر بسل است از این‌رو، خوش‌تعریف است).

دقت شود که در قضیهٔ مذکور، کران‌دار بودن دنبالهٔ $m$ شرط کافی است و لازم نیست. به مثال ۱۹ توجه کنید:

**مثال ۱۹.** فرض کنیم $m_{2n}=n$، $m_{2n-1}=1$، $F=G=\{e_1,0,e_2,0,e_3,0,\ldots\}$. به‌وضوح $m=\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار نیست، $F$ و $G$ قاب هستند و هم‌چنین

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n\langle f,g_n\rangle f_n=f=\sum_{n=1}^{\infty}m_n\langle f,f_n\rangle g_n.$$

**نکته ۲۰.** برای دنبالهٔ $F=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq H$، $D_B(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های بسل $F$، $D_{Fr}(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های قاب $F$، $D(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های $F$، $AD_B(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های تقریبی بسل $F$، $AD_{Fr}(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های تقریبی قاب $F$ و $AD(F)$ را مجموعهٔ تمام دوگان‌های تقریبی $F$ درنظر می‌گیریم.

از تعاریف مذکور و نکات ذکر شده در مورد دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی در این بخش، این نتایج به‌دست می‌آیند:

**۱.**

$$D_{Fr}(F)\subseteq D_B(F)\subseteq D(F);$$
$$AD_{Fr}(F)\subseteq AD_B(F)\subseteq AD(F);$$
$$D_{Fr}(F)\subseteq AD_{Fr}(F),\quad D_B(F)\subseteq AD_B(F);$$
$$D(F)\subseteq AD(F).$$

۲. $F$ بسل و دارای دوگان تقریبی بسل است $\Leftrightarrow$ $F$ قاب است $\Leftrightarrow$ $F$ بسل و دارای دوگان بسل است.

بنابراین اگر $F$ بسل باشد، آن‌گاه

$$D_B(F)=D_{Fr}(F);$$
$$AD_B(F)=AD_{Fr}(F).$$


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

اگر $F$ بسل باشد و قاب نباشد، داریم:

$$D_B(F)=D_{Fr}(F)=\varnothing;$$
$$AD_B(F)=AD_{Fr}(F)=\varnothing.$$

چنان‌که در مثال ۱۵ می‌بینیم $F$ بسل است و قاب نیست و دارای دوگان است یعنی

$$D(F)\neq\varnothing,\quad AD(F)\neq\varnothing.$$

اگر $F=(e_2,e_3,e_4,\ldots)$، آن‌گاه $F$ بسل است، قاب نیست و $D(F)=\varnothing=AD(F)$ (زیرا $\forall n\geq 2\quad \langle e_1,e_n\rangle=0$).

۳. اگر $F$ یک قاب باشد، آن‌گاه $F$ حداقل دارای یک دوگان که قاب است (دوگان کانونی) است. اگر $G=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دوگان $F$ باشد که خود نیز قاب است، آن‌گاه $\left\{\frac{1}{2}g_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ یک دوگان تقریبی $F$است که قاب است اما دوگان آن نیست. بنابراین اگر $F$ یک قاب باشد، همواره

$$D_{Fr}(F)\underset{\neq}{\subset}AD_{Fr}(F),\quad D_B(F)\underset{\neq}{\subset}AD_B(F),\ D(F)\underset{\neq}{\subset}AD(F).$$

فرض کنیم $f_{2n-1}=e_n$ ،$f_{2n}=0$. بنابراین $F=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک قاب است. هم‌چنین اگر $g_{2n}=ne_1$ و $g_{2n-1}=e_n$، آن‌گاه $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دوگان $F$ است و خود بسل نیست پس

$$D_B(F)\underset{\neq}{\subset}D(F);$$
$$AD_B(F)\underset{\neq}{\subset}AD(F).$$

اکنون اگر فرض کنیم $F=\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$، آن‌گاه با یک محاسبهٔ مستقیم می‌توان مشاهده کرد که $F$ قابی است که دوگان و دوگان تقریبی که قاب نباشد ندارد یعنی

$$D_{Fr}(F)=D_B(F)=D(F),\quad AD_{Fr}(F)=AD_B(F)=AD(F).$$

۴. در مثال ۶، $F$ یک دنبالهٔ غیربسل است و چنان‌که دیدیم دارای یک دوگان است که قاب است پس $D_{Fr}(F)\neq\varnothing$ و $AD_{Fr}(F)\neq\varnothing$. از این‌رو،

$$AD(F)\neq\varnothing,\ D(F)\neq\varnothing,\ AD_B(F)\neq\varnothing,\ D_B(F)\neq\varnothing.$$

هم‌چنین دنبالهٔ $F=\{ne_n\}_{n=1}^{\infty}$ بسل نیست اما دارای یک دوگان بسل مانند $\left\{\frac{1}{n}e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ است که قاب نیست، از این‌رو،

$$D_{Fr}(F)\underset{\neq}{\subset}D_B(F);$$
$$AD_{Fr}(F)\underset{\neq}{\subset}AD_B(F).$$

در مثال ۱۴ دیده می‌شود که $F$ یک دنبالهٔ غیر بسل است و دارای یک دوگان غیر بسل است یعنی

$$D_B(F)\underset{\neq}{\subset}D(F);$$
$$AD_B(F)\underset{\neq}{\subset}AD(F).$$

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

## دوگان‌های تقریبی برای دنباله‌های بسل

این بخش را با تعریف نزدیکی دو دنبالهٔ بسل آغاز می‌کنیم. مفهومی که در مقالات [۱]،[۲] مورد توجه قرار گرفت.

**تعریف ۲۱.** دنبالهٔ بسل $G$ را نزدیک به دنبالهٔ بسل $F$ گوییم هرگاه یک $\lambda \geq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\left\|(T_G - T_F)\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\right\| \leq \lambda \left\|T_F(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})\right\| \quad \forall \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

اینفیمم تمام $\lambda$ ها را که در نامساوی فوق صدق می‌کنند، کران نزدیکی می‌نامیم.

**قضیهٔ ۲۲.** الف) اگر $G$ نزدیک به $F$ با کران نزدیکی کم‌تر از یک باشد، آن‌گاه $G$ یک دوگان تقریبی برای تمام دوگان‌های $F$ است.

ب) اگر $F$ یک قاب پارسوال بوده و $G$ نزدیک به $F$ با کران نزدیکی کم‌تر از یک باشد، آن‌گاه $G$ یک دوگان تقریبی برای $F$ است.

**اثبات:** الف) چون کران نزدیکی کمتر از یک است، پس یک $1 > \lambda \geq 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$\left\|(T_G - T_F)\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\right\| \leq \lambda \left\|T_F(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})\right\| \quad \forall \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

اگر $F^d$ یک دوگان $F$ باشد، آن‌گاه با قرار دادن $T_{F^d}^* f$ به جای $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ در نامساوی فوق به‌دست می‌آوریم

$$\|(T_G T_{F^d}^* - Id_H) f\| \leq \lambda \|f\|.$$

بنابراین

$$\|T_{F^d} T_G^* - Id_H\| = \|T_G T_{F^d}^* - Id_H\| < 1$$

و این یعنی $G$ یک دوگان تقریبی $F^d$ است.

ب) نتیجه از قسمت الف با درنظر گرفتن این نکته که هر قاب پارسوال یک دوگان خودش است، به‌دست می‌آید.

با توجه به تعریف عملگر قاب، روشن است که یک دنباله دوگان خودش است اگر و فقط اگر یک قاب پارسوال باشد (برای مطالعه در مورد قاب‌های پارسوال و ارتباط آن‌ها با دوگان‌های تقریبی مقالهٔ [۱۹] را ملاحظه کنید). اکنون می‌خواهیم شرط لازم و کافی برای این‌که یک دنباله، دوگان تقریبی خود باشد را به‌دست آوریم. ابتدا تعریف ۲۳ را از مقالهٔ [۸] یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۲۳.** فرض کنیم $0 < \varepsilon < 1$. دنبالهٔ $F = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک قاب با تقریب $\varepsilon$ پارسوال می‌نامیم هرگاه:

$$(1-\varepsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq (1+\varepsilon)\|f\|^2 \quad (f \in H).$$

**قضیهٔ ۲۴.** فرض کنیم $F = \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$. دراین‌صورت

الف) $F$ یک دوگان تقریبی خودش است.

ب) یک $0 < \varepsilon < 1$ موجود است به‌طوری‌که $F$ یک قاب با تقریب $\varepsilon$ پارسوال است.

**اثبات:** الف)$\Leftarrow$ب) فرض کنیم $F$ یک دوگان تقریبی خودش باشد. دراین‌صورت با توجه به قضیهٔ ۱۳ عملگر $S_F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i\rangle f_i$ خوش‌تعریف است و $\|Id_H - S_F\| < 1$. اگر $\|Id_H - S_F\| = 0$، آن‌گاه $F$ یک قاب

پارسوال است. بنابراین $F$ به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک قاب با تقریب $\varepsilon$ پارسوال است. اکنون فرض کنیم $1 > \| Id_H - S_F \| > 0$ و قرار می‌دهیم $\varepsilon = \| Id_H - S_F \|$. چون $Id_H - S_F$ خودالحاق است داریم:

$$Id_H - S_F \le \| Id_H - S_F \| . Id_H \Rightarrow (1-\varepsilon). Id_H \le S_F ,$$

هم‌چنین

$$S_F - Id_H \le \| S_F - Id_H \| . Id_H \Rightarrow S_F \le (1+\varepsilon). Id_H .$$

دو رابطهٔ بالا نشان می‌دهند که $F$ یک قاب با تقریب $\varepsilon$ پارسوال است.

استلزام ب)⇐الف) از قضیهٔ ۴.۲ در [۲۲] نتیجه می‌شود.

چنان‌که در [۶] مشاهده می‌شود، ضرب‌گرها با نشانه‌هایی که تمام اعضای آن‌ها باهم برابرند، حائز اهمیت هستند. دراین‌حالت نشانهٔ $m = \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $m_i = c$ ( $c$ یک عدد ثابت است) را به‌صورت $m = \{c\}$ نشان می‌دهیم و آن‌را یک نشانهٔ ثابت می‌نامیم. در قضیهٔ ۲۵ نشان می‌دهیم شرط لازم و کافی برای این‌که یک دنباله، $m-$دوگان تقریبی خودش با نشانهٔ ثابت $m$ باشد این است که یک قاب باشد.

**قضیهٔ ۲۵.** فرض کنیم $F = \{ f_i \}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$. دراین‌صورت

الف) $F$ یک قاب است.

ب) یک نشانهٔ ثابت مانند $m$ موجود است به‌طوری‌که $F$ یک $m-$دوگان تقریبی خودش باشد.

**اثبات:** الف)⇐ب) اگر $F$ یک قاب باشد، آن‌گاه دوعدد مثبت $A$و $B$ موجودند به‌طوری‌که

$$A.Id_H \le S_F \le B.Id_H .$$

اکنون یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$0 \le Id_H - \frac{1}{B}.S_F \le (1-\frac{A}{B}).Id_H$$

و در نتیجه

$$\left\| Id_H - M_{\{\frac{1}{B}\},F,F} \right\| = \left\| Id_H - \frac{1}{B}.S_F \right\| \le 1 - \frac{A}{B} < 1.$$

اکنون اثبات، با قرار دادن $m_i = \frac{1}{B}$ (به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$) به‌دست می‌آید.

ب)⇐الف) فرض کنیم $F$ یک $m = \{c\}-$دوگان تقریبی خودش باشد. بنابراین $c \neq 0$ و $M_{\{c\},F,F}$ وارون‌پذیر است، در نتیجه عملگر $S_F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$ خوش‌تعریف و وارون‌پذیر است که این خود معادل با قاب بودن $F$ است.

قضیهٔ ۲۶ که اثباتی مشابه قضیهٔ ۲۵ دارد نشان می‌دهد که شرط لازم و کافی برای این‌که یک دنباله $m-$دوگان خودش با نشانهٔ ثابت باشد، این است که یک قاب تنگ باشد.

**قضیهٔ ۲۶.** فرض کنیم $F = \{ f_i \}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$. دراین‌صورت


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.8.2 ]
[ DOI: 10.29252/mmr.5.2.237 ]

الف) $F$ یک قاب تنگ با کران $c$ است.

ب) $F$ یک $m-$دوگان خودش است که در آن $m=\left\{\frac{1}{c}\right\}$.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا در بخش اول مقدمه‌ای در مورد قاب‌ها و مفاهیم مرتبط با نظریهٔ قاب‌ها مانند دنباله‌های بسل، عملگرهای ترکیبی و تحلیلی، دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی و ضرب‌گرهای بسل ارائه دادیم. در بخش دوم، با استفاده از ضرب‌گرها، عملگرهای وارون‌پذیر و نشانه‌ها، انواع جدیدی از دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی را برای دنباله‌های دلخواه در فضاهای هیلبرت معرفی کردیم. سپس این دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی را با دوگان‌های بسل و دوگان‌های تقریبی بسل و در شرایط مختلف (اعم از نشانه‌های متفاوت، دنباله‌های متفاوت و...) مقایسه و سعی کردیم با ذکر مثال‌های متنوع، تفاوت‌های آن‌ها با یک‌دیگر را مشخص کنیم. هم‌چنین نشان دادیم که از دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی تعریف شده برای دنباله‌های غیربسل نیز همانند دنباله‌های بسل می‌توان برای بازسازی سیگنال‌ها استفاده کرد. در بخش سوم نتایج جدیدی در مورد دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی بسل به‌دست آوردیم، به‌ویژه مفاهیم مهمی مانند نزدیکی دنباله‌های بسل، قاب‌های با تقریب $\varepsilon$ پارسوال و ضرب‌گرها با نشانه‌های ثابت را به مفهوم دوگانی تقریبی قاب‌ها مرتبط کردیم.

## منابع


1. Amiri Z., Kamyabi-Gol R. A., "Distance between continuous frames in Hilbert space", J. Korean Math. Soc., 54 (2017) 215-225.
2. Balan R., "Equivalence relations and distances between Hilbert frames", Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999) 2353-2366.
3. Balazs P., "Basic definition and properties of Bessel multipliers", J. Math. Anal. Appl., 325 (2007) 571-585.
4. Balazs P., "Hilbert Schmidt operators and frames classification, approximation by multipliers and algorithms", Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., 6 (2008) 315-330.
5. Balazs P., Bayer D., Rahimi A.,"Multipliers for continuous frames in Hilbert spaces", J. Phys. A: Math. Theor., 45 (2012) 244023 (20 pages).
6. Balazs P., Stoeva D.T.,"Representation of the inverse of a frame multiplier", J. Math. Anal. Appl., 422 (2015) 981-994.
7. Benedeto J., Powell A., Yilmaz O., "Sigma-Delta quantization and finite frames", IEEE Trans. Inform. Theory., 52 (2006) 1990-2005.
8. Bodmann B. G., Casazza P., "The road to equal-norm Parseval frames", J. Funct Anal., 258 (2010) 397-420.
9. Bolcskel H., Hlawatsch F., Feichtinger H. G., "Frame theoretic analysis of oversampled filter banks", IEEE Trans. Signal Process., 46 (1998) 3256-3268.

10. Candes E. J., Donoho D., "New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise $\mathbb{C}^{۲}$ singularities", Comm. Pure and Appl. Math., 56 (2004) 216-266.

11. Christensen O., " Frames and bases", Boston, Birkhauser (2008).

12. Christensen O., Laugesen R. S., "Approximate dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames ", Sampl Theory Signal Image Process., 9 (2011) 77-90.

13. Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y., "Painless nonorthogonal expansions", J. Math. Phys., 27 (1986) 1271-1283.

14. Dehghan M. A., Hasankhani Fard M. A., "G-dual frames in Hilbert spaces", U. P. B. Sci. Bull. Ser A., 75 (2013) 129-140.

15. Duffin R. J., Schaeffer A. C., "A class of nonharmonic Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952) 341-366.

16. Fereydooni A., Safapour A., "Pair frames", Results Math., 66 (2014) 247-263.

17. Gabor D., " Theory of communications", J. Inst. Electr. Eng., 93 (1946) 429-457.

18. Heath R. W., Paulraj A. J., "Linear dispersion codes for MIMO systems based on frame theory", IEEE Trans. Signal Process., 50 (2002) 2429-2441.

19. Khosravi A., Mirzaee Azandaryani M., Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces", Acta Math Sci., 34 (2014) 639-652.

20. Khosravi A., Mirzaee Azandaryani M., "Bessel multipliers in Hilbert C*-modules", Banach. J. Math. Anal., 9 (2015) 153-163.

21. Laura Arias M., Pacheco M., "Bessel fusion multipliers", J. Math. Anal. Appl., 348 (2008) 581-588.

22. Mirzaee Azandaryani M., "Approximate duals and nearly Parseval frames", Turk. J. Math., 39 (2015) 515-526.

23. Mirzaee Azandaryani M., "Bessel multipliers and approximate duals in Hilbert C*-modules", J. Korean Math. Soc, 54 (2017) 1063-1079.

24. Rahimi A., "Multipliers of generalized frames in Hilbert spaces", Bull. Iranian Math. Soc., 37 (2011) 63-80.

25. Rahimi A., Balazs P., "Multipliers for p-Bessel sequences in Banach spaces", Integral Equations Operator Theory., 68 (2010) 193-205.

26. Stoeva D. T., Balazs P., "Unconditional convergence and invertibility of multipliers", arXiv: 0911.2783 (2009).

27. Stoeva D. T., Balazs P., "Invertibility of multipliers", Appl. Comput. Harmon. Anal., 33 (2012) 292-299.

28. Stoeva D. T., Balazs P., "Canonical forms of unconditionally convergent multipliers", J. Math. Anal. Appl., 399 (2013) 252-259.