

دو نمایش معادل برای نرم فضاهای وزن دار از توابع تمام‌ریخت روی نیم‌صفحه بالایی

محمدعلی اردلانی؛ دانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱

چکیده

هدف مقاله این است که نشان دهیم بدون این که لازم باشد تابع وزن در شرایط رشدی خاصی صدق کند همواره نرم سوپریمم وزنی روی نیم‌صفحه بالایی را می‌توان برحسب نرم سوپریمم وزنی روی گوی یک‌باز و هم‌چنین برحسب سوپریمم مقادیر تابع تمام‌ریخت روی خط‌های خاصی در نیم‌صفحه بالایی نمایش داد.

واژه‌های کلیدی: تابع تمام‌ریخت، وزن استاندارد، فضاهای وزن دار، نیم‌صفحه بالایی.

مقدمه

فرض کنید Ω یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط \mathbb{C} باشد. یک تابع پیوسته و مثبت $v: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ را یک تابع وزن می‌نامیم. برای هر تابع تمام‌ریخت $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ نرم سوپریمم وزنی $\|f\|_v$ و فضای وزن دار از توابع تمام‌ریخت روی Ω ، $H_v(\Omega)$ را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_v = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|v(z)$$

و

$$H_v(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ تمام‌ریخت است } \|f\|_v < \infty\}$$

تعریف ۱: در حالتی که $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ گوی یک‌باز باشد، تابع وزن $v: D \rightarrow (0, \infty)$ را که در شرایط زیر صدق می‌کند را یک وزن استاندارد روی D می‌نامیم.

$$1. \quad v(z) = v(|z|) \text{ یعنی } v \text{ شعاعی باشد.}$$

$$2. \quad \text{تابع } v(z) \text{ نسبت به } |z| \text{ نزولی باشد.}$$

$$3. \quad \lim_{|z| \rightarrow 1^-} v(z) = 0.$$

فضاهای وزن دار از توابع تمام‌ریخت روی گوی یک‌باز، $H_v(D)$ (وزن استاندارد روی D)، را اولین بار شیلدز^۱ و ویلیامز^۲ در سال ۱۹۷۲ معرفی کردند. آن‌ها در سری مقالات خود با این فرض که وزن v در شرایط خاصی صدق می‌کند، به بررسی این فضاها از جنبه‌های گوناگون پرداختند [۱]، [۲]، [۳].

پس از شدن این زمینه تحقیقاتی جدید، تحقیقات زیادی از جنبه‌های گوناگون روی این فضاها به وسیله ریاضی‌دان‌های متعددی انجام گرفت، که از جمله کارهای برجسته در این زمینه می‌توان به مقاله‌های لوسکی^۱ [۴]، [۵]، [۶]، بونت^۲، دومانسکی^۳ و لیندشتروم^۴ [۷]، [۸]، اشاره کرد.

تعریف ۲: در حالتی که $\Omega = G = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega > 0\}$ نیم‌صفحه بالایی باشد تابع وزن $v: G \rightarrow (0, \infty)$ را که در این شرایط صدق می‌کند را یک وزن استاندارد روی G می‌نامیم:

$$1. \quad v(\omega) = v(\text{Im } \omega i) \text{ یعنی مقادیر وزن } v \text{ فقط به قسمت موهومی نقاط بستگی دارد.}$$

$$2. \quad \exists c > 0, \forall \omega_1, \omega_2 \in G \text{ s.t. } 0 < \text{Im } \omega_1 < \text{Im } \omega_2 \quad v(\omega_1) \leq cv(\omega_2)$$

یعنی v روی محور موهومی تقریباً صعودی باشد.

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} v(ti) = 0$$

فضاهای وزن دار از توابع تمام‌ریخت روی نیم‌صفحه بالایی، $H_v(G)$ (وزن استاندارد روی G) حالت مهم دیگر از فضاهای وزن دار است که تعیین رده یک‌ریختی این فضاها و کران‌داری عملگر ترکیب و مشتق بین این فضاها، در حالتی که وزن v در شرایط رشدی خاصی صدق می‌کند به وسیلهٔ لوسکی و مؤلف انجام شد [۹]، [۱۰]، [۱۱].

تذکر ۱: بدیهی است که اگر در تعریف ۲ قسمت ۱، ۲، $c = 1$ آن‌گاه v روی محور موهومی صعودی می‌شود.

در این مقاله می‌خواهیم برای نرم سوپریمم وزنی بدون این که لازم باشد v در شرایط رشدی خاصی مشابه آن‌چه در [۹]، [۱۰]، [۱۱] بیان شده است صدق کند دو نمایش معادل بیابیم. قبل از ورود به نتایج اصلی این مقاله به این مطالب نیاز داریم:

تعریف ۳: به‌ازای هر $\delta > 0$ مجموعه‌های L_δ, G_δ را به‌ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$G_\delta = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega \geq \delta\}$$

و

$$L_\delta = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega = \delta\}$$

تعریف ۴: فرض کنید $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (باز) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ یک تابع تمام‌ریخت و $A \subseteq \Omega$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_\infty(f, A) = \sup_{\omega \in A} |f(\omega)|$$

تعریف ۵: فرض کنیم $x \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ منظور از $x + r\sigma D$ دایره‌ای به مرکز x و شعاع r در صفحه مختلط است.

تعریف ۶: نگاشت $\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه $\alpha(z) = \frac{1+z}{1-z}i$ تعریف می‌کنیم.

تذکر ۲: برای $z \in D$ ، به سادگی می‌توان نشان داد

$$\alpha(z) = -2 \frac{\text{Im } z}{1 + |z|^2 - 2 \text{Re } z} + \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2 \text{Re } z} i$$

از رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود که $\alpha(D) \subseteq G$ ، حال اگر نگاشت $\beta: G \rightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $\beta(\omega) = \frac{\omega-i}{\omega+i}$ تعریف کنیم داریم:

$$\alpha(D) = G \quad \beta = \alpha^{-1} \text{ بنابراین } \beta\alpha = I_D \quad \alpha\beta = I_G$$

$$\alpha^{-1}(\omega) = \beta(\omega) = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2 \text{Im } \omega} - \frac{2 \text{Re } \omega}{|\omega|^2 + 1 + 2 \text{Im } \omega} i$$

تعریف ۷: الف) منظور از $L^\infty(D)$ فضای تمام توابع اساساً کران‌دار روی $\sigma D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ است. نرم این فضا را با $\|\cdot\|_\infty$ نشان می‌دهیم.

1. Lusky
2. Bonet
3. Domonski
4. Lindstrom

(ب) هم چنین

$$H_\infty(D) = \{g|g: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ تمامریخت است } M_\infty(g, D) < \infty\}$$

نتایج اصلی

لم ۱: فرض کنید v یک وزن استاندارد روی G باشد. در این صورت یک ثابت مثبت C وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{C}v(\omega_1) \leq v(\omega_2) \leq Cv(\omega_1) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in L_\delta$$

اثبات: چون $\omega_1, \omega_2 \in L_\delta$ پس $Im \omega_1 = Im \omega_2 = \delta$ یعنی

$$Im \omega_1 \leq Im \omega_2 \quad . \quad Im \omega_2 \leq Im \omega_1$$

از روابط مذکور و این که وزن v روی محور موهومی تقریباً صعودی است نتیجه می شود که

$$v(\omega_1) \leq C v(\omega_2) \quad (۱)$$

$$v(\omega_2) \leq C v(\omega_1) \quad (۲)$$

حال بر اساس روابط (۱) و (۲) حکم ثابت می شود.

لم ۲: فرض کنید v یک وزن استاندارد روی G و $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. در این صورت عملگر انتقال

$$T_a: H_v(G) \rightarrow H_v(G), T_a f(\omega) = f(\omega + a)$$

اثبات: به وضوح $(T_a f)$ یک تابع تمامریخت روی G است. چون به ازای هر $\omega \in G$ ، $Im \omega = Im(\omega + a)$ ، از به

کار بردن لم (۱) نتیجه می شود که ثابت مثبت C وجود دارد به طوری که:

$$\frac{1}{C}v(\omega) \leq v(\omega + a) \leq C v(\omega)$$

بنابراین

$$\frac{1}{C}|f(\omega + a)|v(\omega) \leq |f(\omega + a)|v(\omega + a) \leq C |f(\omega + a)|v(\omega)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_v &= \sup_{\omega \in G} |f(\omega + a)|v(\omega) \\ &\leq C \sup_{\omega \in G} |f(\omega + a)|v(\omega + a) \\ &= C \sup_{\omega' \in G} |f(\omega')|v(\omega') \\ &= C \|f\|_v \end{aligned}$$

هم اکنون به یادآوری دو قضیه می پردازیم که نقش مهمی در اثبات نتایج اصلی این مقاله دارند.

قضیه ۱: (قضیه فراگمن-لیندلف): فرض کنید $S = \{x + iy: a < x < b\}$ و $\bar{S} = \{x + iy: a \leq x \leq b\}$

و f روی \bar{S} پیوسته و $f \in H(S)$. هم چنین فرض کنید $B > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$|f(z)| < B \quad \forall z \in S$$

اگر $M(x) = \sup\{|f(x + iy)|: -\infty < y < \infty\}$ ($a \leq x \leq b$) آن گاه

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad (a < x < b)$$

هم چنین از رابطه مذکور می توان نتیجه گرفت:

$$|f| \leq \max(M(a), M(b))$$

اثبات: قضیه ۱۲.۸ از [۱۲] را ببینید.

قضیه ۲: به هر تابع $g \in H_\infty(D)$ یک تابع $g^* \in L^\infty(\sigma D)$ تعریف شده با ضابطه

$$g^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} g(re^{it})$$

نظیر می‌شود. هم‌چنین $\|g^*\|_\infty = M_\infty(g, D)$

اثبات: قضیه ۱۱.۳۲ از [۱۲] را ببینید.

تذکره ۳: به‌وضوح قضیه ۲ برای هر انتقالی از گوی یکیه باز D درست است.

لم ۳: فرض کنید $\delta > 0$. در این صورت $L_\delta = \alpha\left(\frac{\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\sigma D \setminus \{(1,0)\}\right)$ یعنی تحت نگاشت α تصویر

دایره به مرکز $\frac{\delta}{1+\delta}$ و شعاع $\frac{1}{1+\delta}$ که نقطه $(1,0)$ از آن برداشته شده باشد برابر است با خط L_δ .

اثبات: ابتدا توجه کنید که دایره با مرکز $\frac{\delta}{1+\delta}$ و شعاع $\frac{1}{1+\delta}$ همواره از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد و نگاشت α در نقطه

$Z = (1,0)$ تعریف نشده است. فرض کنید $\alpha(z) = \omega$ ، اگر $Im \alpha(z) = Im \omega = \delta$ آن‌گاه

$$\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2 Re z} = \delta \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \delta} = |z|^2 + \frac{\delta}{1 + \delta} - \frac{2\delta}{1 + \delta} Re z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \delta} - \frac{\delta}{1 + \delta} + \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} = \left|z - \frac{\delta}{1 + \delta}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1 + \delta)^2} = \left|z - \frac{\delta}{1 + \delta}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\alpha^{-1}(\omega) - \frac{\delta}{1 + \delta}\right| = \frac{1}{1 + \delta}$$

یعنی α^{-1} خط L_δ را به دایره $\frac{\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\sigma D \setminus \{(1,0)\}$ تصویر می‌کند که معادل حکم است.

لم ۴: فرض کنید $\tau > \delta > 0$ و $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ تمام‌ریخت باشد به‌طوری‌که $f|_{G_\delta}$ کران‌دار باشد در این صورت:

$$M_\infty(f, L_\tau) \leq M_\infty(f, L_\delta).$$

اثبات: فرض کنید $D_1 = \alpha^{-1}(G_\delta)$ و $D_2 = \alpha^{-1}(G_\tau)$ در این صورت:

$$\alpha^{-1}(L_\delta) = \sigma D_1 \setminus \{(1,0)\}$$

و

$$\alpha^{-1}(L_\tau) = \sigma D_2 \setminus \{(1,0)\}$$

$\tilde{f}(z) = f(\alpha(z))$ قرار می‌دهیم. چون $f|_{G_\delta}$ کران‌دار است پس \tilde{f} نیز روی D_1 کران‌دار است و در نتیجه

$\tilde{f} \in H_\infty(D_1)$. حال از به‌کار بردن قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $\tilde{f}^* \in L^\infty(\sigma D_1)$ وجود دارد. به‌طوری‌که

$M_\infty(\tilde{f}, D) = \|\tilde{f}|_{\sigma D_1}\|_\infty$. چون اندازه لبگ مجموعه تک نقطه ای برابر صفر است بنابراین:

$$\|\tilde{f}^* \cdot \chi_{\sigma D_1 \setminus \{(1,0)\}}\|_\infty = \|\tilde{f}|_{\sigma D_1}\|_\infty$$

و

$$M_\infty(\tilde{f}, D_1) = \|\tilde{f}^* \cdot \chi_{\sigma D_1 \setminus \{(1,0)\}}\|_\infty \quad (۳)$$

که در آن χ تابع مشخصه است. به‌طور مشابه

$$M_\infty(\tilde{f}, D_2) = \|\tilde{f}^* \cdot \chi_{\sigma D_2 \setminus \{(1,0)\}}\|_\infty \quad (۴)$$

چون $D_2 \subseteq D_1$ پس $M_\infty(\tilde{f}, D_2) \leq M_\infty(\tilde{f}, D_1)$

حال از روابط (۳) و (۴) و قضیه ۲ نتیجه می‌شود.

تذکره ۴: فرض کران دار بودن f روی G_δ در لم ۴ ضروری است. در واقع لم ۴ اگر f فقط روی L_δ و L_τ کران دار باشد درست نیست.

مثال ۱: فرض کنید $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابط $f(\omega) = e^{-i\omega}$ تعریف شده باشد. در این صورت $|f|_{L_\tau} = e^\tau$ و اما $|f|_{L_\delta} = e^\delta$

$$M_\infty(f, L_\delta) < M_\infty(f, L_\tau) \quad \tau > \delta > 0.$$

هم اکنون می توان اولین نمایش معادل برای نرم سوپریمم وزنی را به دست آورد.

قضیه ۳: فرض کنید v یک وزن استاندارد روی G باشد.

الف) برای هر $\delta_0 > 0$ یک ثابت مثبت C وابسته به δ_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in H_v(G)$

$$\frac{1}{C} \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta < \delta_0 \text{ یا } \delta \geq \frac{1}{\delta_0}\} \leq \|f\|_v \leq C \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta \leq \delta_0 \text{ یا } \delta \geq \frac{1}{\delta_0}\} \quad (5)$$

ب) اگر v یک وزن استاندارد و کران دار روی G باشد، آن گاه یک ثابت مثبت d وجود دارد به طوری که به ازای هر $\delta_0 > 0$ و هر $f \in H_v(G)$

$$\frac{1}{d} \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta < \delta_0\} \leq \|f\|_v \leq d \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta \leq \delta_0\}$$

اثبات: الف) از لم ۱ نتیجه می شود که $C' > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{C'} v(\omega_1) \leq v(\omega_2) \leq C' v(\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in L_\delta$$

چون $\|f\|_v = \text{Sup}_{\omega \in G} |f(\omega)| v(\omega)$ بنابراین

$$\frac{1}{C'} \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta\} \leq \|f\|_v \leq C' \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta\} \quad (6)$$

بدیهی است که برای هر $\delta_0 > 0$

$$\frac{1}{C'} \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta < \delta_0 \text{ یا } \delta \geq \frac{1}{\delta_0}\} \leq \|f\|_v \quad (7)$$

اگر $\delta_0 \geq 1$ آن گاه به وضوح

$$\|f\|_v \leq C' \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta \leq \delta_0 \text{ یا } \delta \geq \frac{1}{\delta_0}\}$$

حال فرض کنید $0 < \delta_0 < 1$ چون $\delta_0 < 1$ می توان نیم صفحه بالایی را به سه قسمت G_1, G_2 و G_3 به صورت زیر تقسیم کرد

$$G_1 = \{\omega \in G: 0 < \text{Im } \omega \leq \delta_0\}, G_2 = \left\{\omega \in G: \delta_0 \leq \text{Im } \omega \leq \frac{1}{\delta_0}\right\}, G_3 = \left\{\omega \in G: \text{Im } \omega \geq \frac{1}{\delta_0}\right\}$$

به وضوح

$$\|f\|_v = \max\{\|f|_{G_1}\|_v, \|f|_{G_2}\|_v, \|f|_{G_3}\|_v\} \quad (8)$$

با توجه به رابطه (۷) کافی است که $M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i)$ را فقط روی مجموعه G_2 تقریب بزنیم. حال فرض کنید

$\delta_0 \leq \delta \leq \frac{1}{\delta_0}$ ($0 < \delta_0 < 1$) چون توابع $\frac{v(\delta i)}{v(\frac{1}{\delta_0}i)}$ و $\frac{v(\delta i)}{v(\delta_0 i)}$ روی مجموعه فشرده $[\delta_0, \frac{1}{\delta_0}]$ پیوسته هستند

بنابراین ثابت های مثبت C_1 و C_2 وجود دارند به طوری که

$$v(\delta i) \leq C_1 v(\delta_0 i), \quad v(\delta i) \leq C_2 v\left(\frac{1}{\delta_0} i\right) \quad (9)$$

حال از به کار بردن قضیه ۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 M_\infty(f, L_\delta) &\leq M_\infty(f, L_{\delta_0})^{\frac{1-\delta}{\delta_0-\delta_0}} M_\infty(f, L_\delta)^{\frac{\delta-\delta_0}{\delta_0-\delta_0}} \\
 &\leq \max\left(M_\infty(f, L_\delta), M_\infty\left(f, L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right)^{\frac{1-\delta}{\delta_0-\delta_0}} \max\left(M_\infty(f, L_\delta), M_\infty\left(f, L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right)^{\frac{\delta-\delta_0}{\delta_0-\delta_0}} \\
 &\leq \max\left(M_\infty(f, L_\delta), M_\infty\left(f, L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right) \tag{۱۰}
 \end{aligned}$$

اگر $\max(M_\infty(f, L_{\delta_0}), M_\infty(f, L_{\frac{1}{\delta_0}})) = M_\infty(f, L_{\delta_0})$ آن‌گاه از روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i) \leq C_1 M_\infty(f, L_{\delta_0})v(\delta i) \tag{۱۱}$$

اگر $\max(M_\infty(f, L_{\delta_0}), M_\infty(f, L_{\frac{1}{\delta_0}})) = M_\infty(f, L_{\frac{1}{\delta_0}})$ آن‌گاه از روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i) \leq C_2 M_\infty\left(f, L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)v\left(\frac{1}{\delta_0}i\right) \tag{۱۲}$$

روابط (۱۱) و (۱۲) نیز ایجاب می‌کنند که

$$M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i) \leq C_3 \text{Sup}\left\{M_\infty(f, L_\tau)v(\tau i): 0 < \tau < \delta_0 \text{ یا } \tau \geq \frac{1}{\delta_0}\right\} \tag{۱۳}$$

که $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$. حال اگر روابط (۶)، (۸) و (۱۳) را در نظر بگیریم و $C = \max\{C', C_3\}$ قرار دهیم قسمت (الف) ثابت می‌شود.

اثبات ب): فرض کنید $\delta_0 > 0$ داده شده باشد. از رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{C} \text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): 0 < \delta \leq \delta_0\} \leq \|f\|_v$$

چون $f \in H_v(G)$ و v کران‌دار است از لم ۴ نتیجه می‌شود:

$$M_\infty(f, L_\delta) \leq M_\infty(f, L_{\delta_0})$$

و در نتیجه

$$M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i) \leq M_\infty(f, L_{\delta_0})v(\delta_0 i) \frac{v(\delta i)}{v(\delta_0 i)}$$

چون v کران‌دار و تقریباً صعودی است از این رو، $C' > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{v(\delta i)}{v(\delta_0 i)} \leq C' \quad \forall \delta \geq \delta_0$$

بنابراین

$$\text{Sup}\{M_\infty(f, L_\delta)v(\delta i): \delta > \delta_0\} \leq C' M_\infty(f, L_{\delta_0})v(\delta_0 i)$$

حال اگر $d = \max\{C, C'\}$ اختیار شود حکم ثابت می‌شود.

برای به دست آوردن دومین نمایش معادل برای نرم سوپریمم وزنی به لم (۵) نیاز داریم.

لم ۵: اگر v یک وزن استاندارد روی G و $\tilde{v}: D \rightarrow (0, \infty)$ را با ضابطه

$$\tilde{v}(z) = v(\alpha(-|z|)) = v\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right)$$

تعریف کنیم، آن‌گاه \tilde{v} یک وزن استاندارد روی D است.

اثبات : به وضوح \tilde{v} شعاعی و پیوسته است. هم چنین اگر

$$|z_1| < |z_2| \Rightarrow \frac{1 - |z_2|}{1 + |z_2|} < \frac{1 - |z_1|}{1 + |z_1|}$$

و چون v تقریباً صعودی روی محور موهومی است از این رو، \tilde{v} روی D (نسبت به $|z|$) تقریباً نزولی می شود (در واقع \tilde{v} نیز روی D وزن استاندارد است)

هم چنین

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \tilde{v}(z) = \lim_{|z| \rightarrow 1^-} v\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right) = 0$$

قضیه ۴: فرض کنید v یک وزن استاندارد روی G و $\tilde{v}: D \rightarrow (0, \infty)$ مانند لم ۵ تعریف شده باشد. در این صورت ثابت های مثبت C_1 و C_2 وجود دارند به طوری که

$$C_1 \|f\|_v \leq \text{Sup}_{a \in \mathbb{R}} \|(T_a f) \circ \alpha\|_{\tilde{v}} \leq C_2 \|f\|_v$$

در واقع برای نرم سوپریمم وزنی $\|\cdot\|_v$ و v وزن استاندارد روی G ، یک نرم سوپریمم وزنی معادل $\|\cdot\|_{\tilde{v}}$ ، (وزن استاندارد روی D) یافته ایم.

اثبات: با توجه به قسمت (ب) قضیه ۳، ثابت مثبت d وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{d} \text{Sup}_{0 < \delta < 1} M_\infty(f, L_\delta) v(\delta i) \leq \|f\|_v \leq d \text{Sup}_{0 < \delta < 1} M_\infty(f, L_\delta) v(\delta i) \quad (۱۴)$$

فرض کنید $\omega \in G$ دل خواه پس از انتخاب ثابت و $d = \text{Im } \omega < 1$

هم چنین فرض کنید $a = \text{Re } \omega$ با توجه به لم ۱ ثابتی مانند $d_1 > 1$ وجود دارد به طوری که

$$|f(\omega)|v(\omega) \leq d_1 |(T_a f)(i\delta)|v(\delta i)$$

اگر $z = \alpha^{-1}(i\delta) = \frac{\delta-1}{\delta+1}$ قرار دهیم آن گاه $|z| = -\text{Re } z = \frac{1-\delta}{1+\delta}$ (توجه کنید که $\delta < 1$) و در نتیجه $\delta = \frac{1-|z|}{1+|z|}$ بنابراین

$$|f(\omega)|v(\omega) \leq d_1 |(T_a f)\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right)|v\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right)$$

یا به طور معادل

$$|f(\omega)|v(\omega) \leq d_1 |(T_a f)(\alpha(-|z|))|v(\alpha(-|z|))$$

چون $z = \alpha^{-1}(-|z|)$ ، پس از رابطه مذکور نتیجه می شود

$$|f(\omega)|v(\omega) \leq d_1 \text{Sup}_{z \in D} |(T_a f) \circ \alpha(z)| \tilde{v}(z) = d_1 \|(T_a f) \circ \alpha\|_{\tilde{v}}$$

بنابراین

$$\text{Sup}\{|f(\omega)|v(\omega) : \omega \in G, \text{Im } \omega < 1\} \leq d_1 \text{Sup}_{a \in \mathbb{R}} \|(T_a f) \circ \alpha\|_{\tilde{v}} \quad (۱۵)$$

از روابط (۱۴) و (۱۵) نتیجه می شود که $C_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$C_1 \|f\|_v \leq \text{Sup}_{a \in \mathbb{R}} \|(T_a f) \circ \alpha\|_v$$

حال فرض کنید $z \in D$ دل خواه پس از انتخاب ثابت باشد. هم چنین $a \in \mathbb{R}$ ثابت را در نظر بگیرید. با توجه به این که

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \frac{1 - |z|^2}{|1 + z|^2} = \text{Im } (\alpha(z))$$

و این که v روی G استاندارد است نتیجه می شود که $d_2 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$v\left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|}i\right) \leq d_2 v\left(\frac{1 - |z|^2}{|1 + z|^2}i\right)$$

بنابراین

$$|(T_{af})\alpha(z)|\tilde{v}(z) \leq d_2|(T_{af})\alpha(z)|v(Im(\alpha(z)))$$

حال اگر $\alpha(z) = \omega$

$$|(T_{af})\alpha(z)|\tilde{v}(z) \leq d_2|(T_{af})(\omega)|v(\omega) \leq d_2\|T_{af}\|_v \leq d_3\|f\|_v$$

که نامساوی آخر در رابطه مذکور از لم ۲ نتیجه شده است. نهایتاً

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{z \in D} |(T_{af})\alpha(z)|\tilde{v}(z) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(T_{af})\alpha\|_{\tilde{v}} \leq d_3\|f\|_v$$

حال کافی است $C_2 = d_3$ اختیار شود.

منابع

1. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the disc", Michigan Math. J. 3 (1982) 3-25.
2. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions", J. Reine, Angew Math. 299/300 (1978) 265-279.
3. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions", Trans, Amer. Math. Soc. 162 (1971) 287-302.
4. Lusky W., "On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions", studia Math. 1(2006) 19-45.
5. Lusky W., "On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions", J. Lond. Math Soc. 51(1995) 309-320.
6. Lusky W., "Growth conditions for harmonic and holomorphic functions", Functional Analysis (Trier,1994), S. Dierolfetal (ends), de Gruyter (1996) 281-291.
7. Bonet J., Domanski P., Lindstrom M., "Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions", studia math. 137(1999) 177-194.
8. Bonet J., Domanski P., Lindstrom M., "Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions", Canad. Math. Bull. 42 (1999) 139-148.
9. Ardalani M. A., Lusky W., "Bounded operators on weighted spaces of holomorphic functions on upper half plane", studia math. 209 (2012) 225-234.
10. Ardalani M. A., Lusky W., "Weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-planes math", scandinavica, 111 (2012) 244-260.
11. Ardalani M.A., "Boundedness of composition operator between weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane", Taiwanese journal of mathematics, 18, No.1 (2014) 277-283.
12. Rudin W., "Real and complex analysis", Mc. Grawhill book company (1966).