استفاده از موجک هار برای بسط سری انتگرال‌های وینر کسری

فرشید میرزائی، افسون حمزه
دانشگاه ملایر، دانشکدۀ علوم ریاضی وآمار، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۶/۱۳ پذیرش ۹۶/۱۰/۱۷

چکیده

در این مقاله، ضمن بیان ویژگی‌هایی از توابع موجک هار، به ارائۀ روشی برای تقریب جواب انتگرال وینر کسری با پارامتر هرست $H\in(\frac{1}{2},1)$ با استفاده از این توابع می‌پردازیم. هم‌چنین تجزیه و تحلیل خطای روش مورد نظر ارائه شده است. این روش را روی چند مثال پیاده سازی کرده و نتایج عددی را در قالب جدول مقادیر خطا ارائه می‌دهیم. دقت مطلوبی از نتایج در مورد تعداد کمی از نقاط در مثال‌های ارائه شده مشاهده می‌شود.

واژه های کلیدی: توابع موجک هار، انتگرال‌های وینر کسری، حرکت براونی.
رده بندی ریاضی: ۴۵E۱۰، ۴۵B۳۵، ۲۶A۳۳.

مقدمه

حسابان تصادفی در بررسی معادله‌های انتگرال تصادفی و دیفرانسیل تصادفی نقشی برجسته ایفا می‌کند. هم‌چنین، حرکت براونی کسری در بسیاری از زمینه‌های علوم ریاضی و مهندسی، از جمله فیزیک، اقتصاد، زیست شناسی کاربرد زیادی دارند. یافتن روش‌های دقیق و کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی و انتگرال تصادفی حائز اهمیت است. از آن‌جاکه جواب‌های دقیق اکثر این معادلات در دسترس نیست یا پیدا کردن جواب دقیق آن‌ها فرایند بسیار مشکلی است، روش‌های تقریبی و عددی به‌طور گسترده استفاده می‌شود. از جمله روش‌های عددی برای حل این معادلات، فرم‌های دیریکله، تقریب اویلر، محاسبات مالیاوین، انتگرال اسکروهد و تکنیک‌های مسیری و مرتبط[۱]-[۵]. هم‌چنین، در چند مقاله دیگر حل معادلات تصادفی بررسی شده است [٦]-[۱۷].

در این کار، با استفاده از بسط سری توابع موجک هار، انتگرال وینر کسری به‌صورت (۱)

$$\int_a^b f(t)\,dB^H(t),\quad t\in[0,T], \tag{۱}$$

را تقریب می‌زنیم، به‌طوری‌که تابع f ، تابعی معلوم و B^H حرکتی براونی کسری است که با توجه به این‌که $B(t)$ برای $t\geq 0$ یک حرکت براونی استاندارد است، می‌توان آن را بدین‌صورت نمایش داد [۱۸]:

$$B^H(t)=\frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\left(Z(t)+\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\,dB(s)\right),$$

*نویسندۀ مسئول f.mirzaee@malayeru.ac.ir

به‌طوری‌که Z یک فرایند تصادفی و $\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)$ یک طرح براونی کسری لیوویل است. به‌وضوح اگر $H=\frac{1}{2}$ باشد، حرکت براونی کسری تبدیل به حرکت براونی خواهد شد.

اگر $H \in (0,1)$، می‌توان فرایند تصادفی گاوس را بدین‌صورت بیان کرد:

$$E(B^H(t))=0, \quad \operatorname{cov}(B^H(s),B^H(t))=\frac{1}{2}s^{2H}+t^{2H}-(t-s)^{2H}.$$

این فرایند طرح برونین کسری با پارامتر هرست نامیده می‌شود که در [۱۹] و [۲۰] مطرح شده است. برای ساده‌سازی $B^H(0)=0$ قرار می‌دهیم. برای جزئیات بیش‌تر [۲۱] را ببینید.

موجک هار و خواص آن

خانواده متعامد موجک هار، $h_n(t)$، روی بازهٔ [۰و۱) بدین‌صورت تعریف می‌شود [۲۲]، [۲۳]:

$$h_n(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t-i), \quad j\in\mathbb{N}, \quad i\in\mathbb{Z},$$

به‌طوری‌که

$$h_0(t)=1, \quad 0\le t<1,$$

و

$$h_n(t)=\begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \alpha\le t<\beta, \\ & \qquad\qquad 0\le t<1, \quad n=1,2,\ldots, \\ -2^{\frac{j}{2}} & \beta\le t<\gamma, \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{k}{m}, \quad \beta=\frac{(k+0.5)}{m}, \quad \gamma=\frac{(k+1)}{m};$$

$$m=2^l, \quad l=0,1,\ldots, \quad k=0,1,\ldots,m-1.$$

به‌طوری‌که l یک عدد صحیح است و h_nها در خارج از بازهٔ [۰و۱) صفرند.

تابع دلخواه $f(t)$ روی بازهٔ [۰و۱) را می‌توان بدین‌صورت تقریب زد:

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i(t),$$

به‌طوری‌که a_iها بدین‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$a_i=\int_0^1 f(t)h_i(t)dt.$$

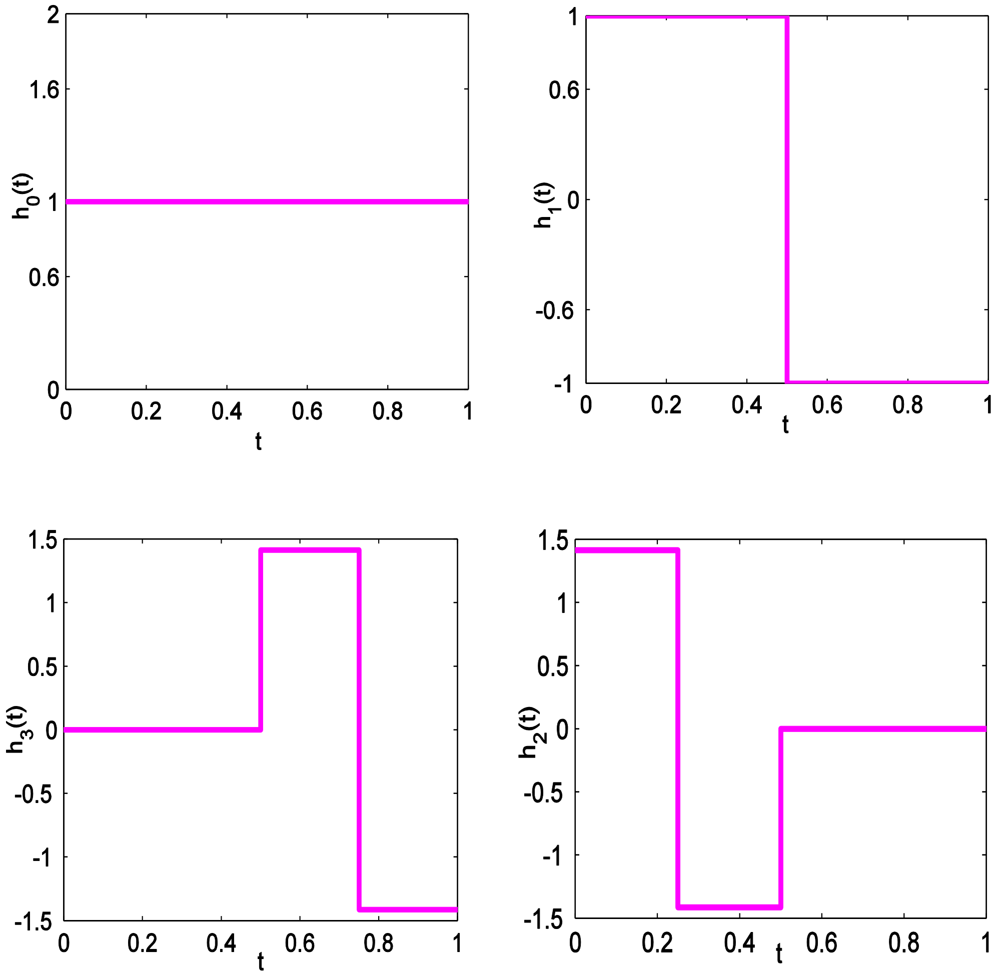
L را حداکثر مقدار از عدد صحیح l در نظر می‌گیریم و $M=2^L$ قرار می‌دهیم. تابع دلخواه $f\,(t)$ را می‌توان با استفاده از توابع موجک هار به‌صورت مجموع متناهی (۲) تقریب زد:

$$f(t)\simeq\sum_{i=0}^{M-1}a_i h_i(t),\quad i=2^j+k, i\neq 0,\quad l=0,1,\ldots,L-1. \tag{۲}$$

هم‌چنین، توابع موجک هار متعامد نرمال هستند:

$$\int_0^1 h_i(y)h_j(y)dy=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

در شکل ۱، نموداری از موجک هار برای $L=2$ نشان داده شده است.



شکل ۱. توابع موجک هار برای $L=2$

تقریب انتگرال وینر کسری با استفاده از موجک هار

برای تقریب انتگرال وینر کسری در بازهٔ [۰و۱) با استفاده از موجک هار با توجه به رابطهٔ (۲) داریم:

$$\int_0^1 f(t)dB^H(t)\simeq\int_0^1\sum_{i=0}^{M-1} f_i h_i(t)dB^H(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{M-1} f_i\int_0^1 h_i(t)dB^H(t)=\sum_{i=0}^{M-1}(\int_0^1 f(t)h_i(t)\mathrm{dt})(\int_0^1 h_i(t)dB^H(t)),$$

و چون $h_i(t)$ها توابعی اسکالر هستند، داریم:

$$\int_0^1 f(t)dB^H(t)=\sum_{i=0}^{M-1} h_i^2(t)(\int_0^1 f(t)dt)(\int_0^1 dB^H(t)).$$

همگرایی و آنالیز خطا

در این بخش، روش ارائه شده بررسی می‌شود. فرض کنید که سری قطع شده توابع موجک هار، یک جواب تقریبی برای معادلهٔ (۱) باشد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید تابع f ، تابعی انتگرال پذیر مربعی در بازهٔ $t\in D=[0,1)$ باشد و $f_m(t)=\sum_{i=0}^{M-1} f_i h_i(t)$ بسط تابع f با استفاده از توابع موجک هار باشد. هم‌چنین فرض کنید که $e=f-f_m$، در این صورت اگر $|f'(t)|\leq L$، داریم [۲٤]:

$$\| e\|\leq \frac{L}{\sqrt{3}\mathrm{M}}.$$

قضیهٔ ۲. خطای تقریب عددی انتگرال وینر کسری با استفاده از توابع موجک هار را،

$$e_m=\int_0^1 (f(t)-f_m(t))dB^H(t)$$

قرار می‌دهیم. آن‌گاه داریم:

$$\| e_m\|\leq \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{3}M}.$$

اثبات: با استفاده از $\| x\|^2=E(x^2)$، داریم:

$$\|\int_0^1 (f(t)-f_m(t))dB^H(t)\|^2=E(\int_0^1 (f(t)-f_m(t))dB^H(t))^2.$$

هم‌چنین، در [۲۱] مطرح شده است که اگر $f(t)\in v[a,b]$ و $H\in(\frac{1}{2},1)$ آن‌گاه داریم:

$$E(\int_a^b f(t)dB^H(t))^2=H(2H-1)\int_a^b\int_a^z f^2(t)(\mathrm{z}-t)^{2H-2}dtdz. \qquad (۳)$$

بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۳) داریم:

$$E(\int_0^1 (f(t)-f_m(t)dB^H(t))^2=H(2H-1)\int_0^1\int_0^z (f(t)-f_m(t))^2(z-t)^{2H-2}dtdz$$

$$=H(2H-1)\int_0^1\int_t^1 (f(t)-f_m(t))^2(z-t)^{2H-2}dzdt=H\int_0^1 (f(t)-f_m(t))^2(1-t)^{2H-1}dt.$$

حال با توجه به این‌که $H\in(\frac{1}{2},1)$ و $0<t<1$، می‌نویسیم:

$$\|\int_0^1 (f(t)-f_m(t))dB^H(t)\|^2 \le \int_0^1 (f(t)-f_m(t))^2 dt.$$

سپس با توجه به قضیهٔ ۱، داریم:

$$\|\int_0^1 (f(t)-f_m(t))dB^H(t)\| \le \int_0^1 \| f(t)-f_m(t)\| dt \le \frac{L}{\sqrt{3}M}.$$

بنابراین، اثبات قضیه تکمیل شد.

مثال‌های عددی

در این بخش به‌منظور بیان کارایی روش موجک هار، دو مثال می‌آوریم. نتایج عددی با نرم‌افزار متلب به‌دست آمده است.

مثال۱: انتگرال وینر کسری (۴) را در نظر بگیرید:

$$\int_0^1 \sin(t^2)dB^H(t), \qquad (۴)$$

که جواب دقیق آن معلوم نیست. می‌توان مقدار انتگرال فوق را بدین‌صورت محاسبه کرد:

$$\int_0^1 \sin(t^2)dB^H(t) = \sin(1)B^H(1) - \int_0^1 2t\cos(t^2)B^H(t)dt,$$

که $\int_0^1 2t\cos(t^2)B^H(t)dt$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای حساب می‌کنیم. از طرف دیگر با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله مقدار (۴) را محاسبه می‌کنیم. به‌طوری‌که جدول‌های ۱ و ۲ میانگین خطا $(\overline{X}_E)$ و انحراف معیار (S_E) را برای مقادیر متفاوت H با ۲۰۰ تکرار نشان داده شده است.

جدول ۱. میانگین $(\overline{X}_E)$، انحراف معیار (S_E) و فاصلهٔ اطمینان برای میانگین با پارامتر $H=0/5$ برای مثال ۱

فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا				
کران بالا	کران پایین	S_E	$\overline{X}_E$	L
۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۱۵۲۰	۰/۰۰۳۲۵	۲
۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۸۳۴	۰/۰۰۱۰۵	۴
۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۰۰۴۶	۰/۰۰۰۴۱۳	۰/۰۰۰۵۲۶	۸
۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۴۰۲	۱۶

جدول ۲. میانگین $(\overline{X}_E)$، انحراف معیار (S_E) و فاصله اطمینان برای میانگین با پارامتر $H=0/8$ برای مثال ۱

فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا				
کران بالا	کران پایین	S_E	$\overline{X}_E$	L
۰/۰۰۰۵۶۳	۰/۰۰۰۴۷۲	۰/۰۰۰۳۲۸	۰/۰۰۰۵۱۸	۲
۰/۰۰۰۳۴۲	۰/۰۰۰۲۸۵	۰/۰۰۰۲۰۴	۰/۰۰۰۳۱۴	۴
۰/۰۰۰۰۳۷۲	۰/۰۰۰۰۳۲۷	۰/۰۰۰۰۱۶۲	۰/۰۰۰۰۳۵	۸
۰/۰۰۰۰۱۲۹	۰/۰۰۰۰۱۱۰	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۱۲	۱۶

مثال ۲: انتگرال وینر کسری زیر را در نظر بگیرید:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.9.3]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.229]

$$\int_0^1 e^{t^2} dB^H(t), \quad (5)$$

که جواب دقیق آن معلوم نیست. می‌توان مقدار انتگرال فوق را بدین‌صورت محاسبه کرد:

$$\int_0^1 e^{t^2} dB^H(t) = eB^H(1) - \int_0^1 2te^{t^2} B^H(t)dt,$$

که $\int_0^1 2\mathrm{te}^{t^2} \mathrm{B}^H(t)dt$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای حساب می‌کنیم. از طرف دیگر با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله مقدار (۵) را محاسبه می‌کنیم. به‌طوری‌که جدول‌های (۳ و ۴)میانگین خطا $(\overline{X}_{\mathrm{E}})$ و انحراف معیار (S_E) را برای مقادیر متفاوت H با ۲۰۰ تکرار نشان داده شده است.

جدول ۳. میانگین $(\overline{X}_{\mathrm{E}})$، انحراف معیار (S_E) و فاصله اطمینان برای میانگین با پارامتر $H=0/5$ برای مثال ۲

فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا				
کران بالا	کران پایین	S_E	$\overline{X}_{\mathrm{E}}$	L
۰/۰۰۰۶۹۶	۰/۰۰۰۵۵۳	۰/۰۰۰۵۱۳	۰/۰۰۰۶۲۵	۲
۰/۰۰۰۱۲۹	۰/۰۰۰۰۱۰۸	۰/۰۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۱۱۹	۴
۰/۰۰۰۰۱۶۴	۰/۰۰۰۰۰۰۲۱۵	۰/۰۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۰۰۸۱	۸
۰/۰۰۰۰۰۴۸۹	۰/۰۰۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۰۴۴	۱۶

جدول ۴. میانگین $(\overline{X}_{\mathrm{E}})$، انحراف معیار (S_E) و فاصله اطمینان برای میانگین با پارامتر $H=0/8$ برای مثال ۲

فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا				
کران بالا	کران پایین	S_E	$\overline{X}_{\mathrm{E}}$	L
۰/۰۰۰۱۵۱	۰/۰۰۰۱۳۳	۰/۰۰۰۰۶۱۸	۰/۰۰۰۱۴۲۵	۲
۰/۰۰۰۰۲۲۶	۰/۰۰۰۰۱۸۳	۰/۰۰۰۰۱۵۲	۰/۰۰۰۰۲۰۵	۴
۰/۰۰۰۰۰۶۶۹	۰/۰۰۰۰۰۵۵	۰/۰۰۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۰۰۶۱	۸
۰/۰۰۰۰۰۰۵۶۹	۰/۰۰۰۰۰۰۴۷	۰/۰۰۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۰۰۵۲	۱۶

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از توابع موجک هار که ساده‌ترین موجک ممکن است، جواب تقریبی برای انتگرال‌های وینر کسری که بعضی مواقع غیرممکن است که بتوان جواب دقیق برای آن‌ها یافت، به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین، تحلیل خطا برای روش مطرح شده ارائه شده است. مهم‌ترین مزیت این روش کم بودن هزینه راه‌اندازی دستگاه، بدون استفاده از روش‌های طرح‌ریزی است، بنابراین هزینۀ محاسباتی روش کم است و این مزیت، این روش محاسباتی را بسیار جذاب، ساده و مقرون به‌صرفه می‌کند. علاوه بر این، دقت روش با دو مثال نشان داده شده است.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده شان که موجب بهبود کیفیت و پربارتر شدن مقاله شد، کمال تشکر قدردانی را داریم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.9.3]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.229]

منابع

1. Bertoin J., "Sur une intégrale pour les processus á α-variation borne", The Annals of Probability, 17(4) (1989) 1521-1535.
2. Guerra J., Nualart D., "Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion", Stochastic Analysis and Applications, 26(5) (2008) 1053-1075.
3. Lisei H., Soós A., "Approximation of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion", Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, 59, (2008) 227-241.
4. Mishura Y., Shevchenko G., "The rate of convergence for Euler approximations of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion", Stochastic, 80(5) (2008) 489-511.
5. Russo F., Vallois P., "Forward, backward and symmetric stochastic integration", Probability Theory and Related Fields, 97 (1993) 403-421.
6. Cortes J., Joda L., Villafuerte L., "Mean square numerical solution of random differential equations: facts and possibilities", Computers and Mathematics with Applications, 53, (2007) 1098-1106.
7. Cortes J. C., Joda L., Villafuerte L., "Numerical solution of random differential equations: A mean square approach", Mathematical and Computer Modelling, 45 (2007) 757-765.
8. Jankovic S., Ilic D., "One linear analytic approximation for stochastic integro-differential equations", Acta Mathematica, Scientia , 30 (2010) 1073-1085.
9. Khodabin M., Maleknejad K., Rostami M., Nouri M., "Numerical solution of stochastic differential equations by second order Runge-Kutta methods(2011), Mathematical and Computer Modelling, 53 (2011) 1910-1920.
10. Kloeden P. E., Platen E., "Numerical solution of stochastic differential equations", Berlin, Applications of Mathematics, Springer-Verlag (1999).
11. Murge M., Pachpatte B., "Successive approximations for solutions of second order stochastic integro-differential equations of Itô type", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21(3) (1990) 260-274.
12. Saito Y., Mitsui T., "Simulation of stochastic differential equations", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 45 (1993) 419-432.
13. Heydari M. H., Hooshmandasl M. R., Maalek Ghaini F. M., Cattani C., "A computational method for solving stochastic Itô-Volterra integral equations based on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions, Journal of Computational Physics, 270 (2014) 402-415.

14. Zeng C., Yang Q., Chen Y. Q., "Lyapunov techniques for stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion", Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis (2014).

15. Guerra J., Nualart D., "Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion, Stochastic Analysis and Applications (2008) 26.

16. Dai W., Heyde C. C., "Itô formula with respect to fractional Brownian motion and its application, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 9 (1996) 439-448.

17. Lin S. J., "Stochastic analysis of fractional Brownian motions", Stochastics Stochastics, 55, (1995) 121-140.

18. Dung N. T., "Fractional stochastic differential equations with applications to finance", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 397 (2013) 334-348.

19. Kolmogorov A. N., "Wienershe Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum", Comptes Rendus (Doklady) de ÍAcademie des Sciences de ÍURSS, 26, (1940) 115-118.

20. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W., "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications", SIAM Review, 10(4) (1968) 422-437.

21. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T., "Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications, London, Springer (2008).

22. Strang G., "Wavelets and dilation equations", SIAM, 31 (1989) 614-627.

23. Lepik U., "Numerical solution of differential equations using Haar wavelets", Mathematics and Computers in Simulation, 68 (2005) 127-143.

24. Mohammadi F., "Haar wavelets approach for solving multidimensional stochastic Itô-Volterra integral equations", Applied Mathematics E-Notes, 15 (2015) 80-96.