استفاده از موجک هار برای بسط سری انتگرال‌های وینر کسری

فرشید میرزایی، افسون حمزة
دانشگاه ملایر، دانشکده علوم ریاضی و آمار، گروه ریاضی
درباره‌ی نویسنده: f.mirzaee@malayeru.ac.ir

چکیده
در این مقاله، ضمن بیان ویژگی‌هایی از توابع موجک هار، به ارائه روشی برای تقریب جواب انتگرال وینر کسری با پارامتر هرست H با استفاده از این توابع می‌پردازیم. همچنین تجزیه و تحلیل خطای روش مورد نظر ارائه شده است. این روش را روی چند مثال پیاده‌سازی کرده و نتایج عددی را در قالب جدول مقایسه خطای می‌دهیم. در نهایت مطلب که انتگرال‌های وینر کسری با روش‌های تقریبی و عددی به‌طور گسترده استفاده می‌شود، در این مقاله چکیده‌ای از تاریخچه و اهمیت انتگرال‌های وینر کسری و تکنیک‌های مربوط به حل آن‌ها در قالب جدول مقداری خطای می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع موجک هار، انتگرال‌های وینر کسری، حرکت براونی

مقدمه
حسابان تصادفی در بررسی معادله‌های انتگرال تصادفی و دیفرانسیل تصادفی نقشی می‌بازد. همچنین حرکت براونی کسری در بسیاری از زمینه‌های علوم ریاضی و مهندسی، از جمله فیزیک، اقتصاد، زیست شناسی کاربرد زیادی دارد. بافتی روش‌های دقیق و کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی و انتگرال تصادفی حائز اهمیت است. از آن‌جا که جواب‌های دقیق این معادلات در دسترس نیست با پیاده‌سازی روش‌های تقریبی و عددی به‌طور کامل استفاده از جمله روش‌های عددی برای حل این معادلات، از مبانی تقریب اویلر، محاسبات مالاپولو، انگرال اسکروهد و تکنیک‌های مشابهی استفاده می‌شود. در [6-11] همچنین در چند مقاله دیگر حل معادلات تصادفی بررسی شده است.

مقدمه
حسابان تصادفی در بررسی معادله‌های انتگرال تصادفی و دیفرانسیل تصادفی نقشی می‌بازد. همچنین حرکت براونی کسری در بسیاری از زمینه‌های علوم ریاضی و مهندسی، از جمله فیزیک، اقتصاد، زیست شناسی کاربرد زیادی دارد. بافتی روش‌های دقیق و کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی و انتگرال تصادفی حائز اهمیت است. از آن‌جا که جواب‌های دقیق این معادلات در دسترس نیست با پیاده‌سازی روش‌های تقریبی و عددی به‌طور کامل استفاده از جمله روش‌های عددی برای حل این معادلات، از مبانی تقریب اویلر، محاسبات مالاپولو، انگرال اسکروهد و تکنیک‌های مشابهی استفاده می‌شود. در [6-11] همچنین در چند مقاله دیگر حل معادلات تصادفی بررسی شده است.

در این کار، با استفاده از بسط سری توابع موجک هار، انتگرال وینر کسری به صورت (1)

\[ \int_{0}^{t} f(t) dB^H(t), \quad t \in [0,T], \]

برای 0 ≤ t ≤ H به‌طور که تابع f نابع معلوم و B^H که حالت اولیه به این که t = 0 برای i ≥ 0 تابعی معلوم و جبری در مجموعه اعداد مثبت، می‌توان آن را به صورت نمایش داد [18]

\[ B^H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} (Z(t) + \int_{0}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)), \]

f.mirzaee@malayeru.ac.ir
موجک هار و خواص آن

خانواده متعامد موجک هار، $h_n(t)$، روتی‌بازه (1،0) به‌دین صورت تعریف می‌شود [22].

$$h_n(t) = 2^n n \psi(2^n t - i), \quad j \in \mathbb{N}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

به‌طوری‌که

$$h_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \alpha \leq t < \beta, \\ 0 & 0 \leq t < 1, \quad n = 1,2,\ldots, \\ -2^{\frac{j}{2}} & \beta \leq t < \gamma, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{(k+0.5)}{m}, \quad \gamma = \frac{(k+1)}{m};$$

$$m = 2^l, \quad l = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots,m-1.$$
استفاده از موجک‌هار برای بسط سری‌انتگرال واینر‌کسری

را حداکثر مقدار از عدد صحیح $L$ در نظر می‌گیریم و $M = 2^L$. عبارت دلخواه $f(t)$ را می‌توان با

$$f(t) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i h_i(t), \quad i = 2^l + k, i \neq 0, \quad l = 0, 1, \ldots, L-1.$$ 

تقریب زد.

همچنین، توابع موجک‌هار متعامد نرمال هستند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(y) h_j(y) dy = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

در شکل 1، نموداری از موجک‌هار برای $L = 2$ نشان داده شده است.

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$

$\quad$
همگرايی و آناليز خطای

در این بخش، روش ارائه شده بررسی می‌شود. فرض کنید که سری قطعی شده توابع موجک هار با استفاده از توابع موجک هار باشد. همچنین فرض کنید که $H = \frac{1}{2}$ باشد و $f(t)$ در بازه $(0,1)$ پیوسته باشد.

قضیه 1. فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ باشد. در اینصورت، اگر $e(t) = f(t) - f_m(t)$ باشد، داریم:

$$\|e\| \leq \frac{L}{\sqrt{3M}}.$$ (1)

قضیه 2. خطای تقریب عددی انتگرال ویتاینگ با استفاده از توابع موجک هار را،

$$e_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (f(t) - f_m(t)) dB^H(t)$$

قرار می‌دهیم. آن‌گاه داریم:

$$\|e_m\| \leq \frac{L}{\sqrt{3M}}.$$ (2)

اثبات: با استفاده از (1) داریم:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (f(t) - f_m(t)) dB^H(t) \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} (f(t) - f_m(t))^2 dB^H(t)^2.$$ (3)

همچنین، در [1] مطرح شده است که اگر $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ باشد، داریم:

$$E\left( \int_{0}^{1} (f(t) dB^H(t))^2 \right) = H (2H - 1) \int_{0}^{1} f^2(t) (z - t)^{2H-2} dz dt.$$ (4)

بنابراین با استفاده از رابطه (3) داریم:

$$E\left( \int_{0}^{1} (f(t) - f_m(t)) dB^H(t)^2 \right) = H (2H - 1) \int_{0}^{1} (f(t) - f_m(t))^2 (z - t)^{2H-2} dz dt = \frac{1}{2} (1 - t)^{2H-1} dt.$$ (5)

حال با توجه به این که

$$0 < t < 1 \quad \text{و} \quad H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

می‌تویم:
استفاده از موجک هار برای بسط سری انتگرال‌های ویر کسری

$$\| \int_0^1 (f(t) - f_m(t)) dB^H(t) \| ^2 \leq \int_0^1 (f(t) - f_m(t))^2 dt.$$ \[
\text{سپس با توجه به قضیه 1 داریم:}
\]
$$\| \int_0^1 (f(t) - f_m(t)) dB^H(t) \| \leq \int_0^1 || f(t) - f_m(t) || dt \leq \frac{L}{\sqrt{5M}}$$

بنابراین، اثبات قضیه تکمیل شد.

مثال‌های عددی

در این بخش به منظور بیان کارایی روش موجک هار، دو مثال می‌آوریم. نتایج عددی با نرم‌افزار متلب به دست آمده است.

مثال 1: انتگرال ویر کسری (4) را در نظر بگیرید:

$$\int \sin(t^2) dB^H(t),$$ \[
(4)
\]

که جواب دقیق آن معلوم نیست. می‌توان مقدار انتگرال فوق را بدین صورت محاسبه کرد:

$$\int \sin(t^2) dB^H(t) = \sin(1) B^H(1) - \int_0^1 2\cos(t^2) B^H(t) dt,$$

که روی دوم این انتگرال فوق را با استفاده از روشهای ذوزنقه، حساب می‌گیریم. از طرف دیگر با استفاده از روشهای عددی و انحراف معیار $E(X)$ (جدول 1) می‌توانیم با استفاده از فاصله اطمینان $\overline{X}$ داده شده در این مقاله متغیر $H$ با 200 تکرار داده شده است.

جدول 1: میانگین انحراف معیار (S_E) و فاصله اطمینان برای میانگین با پارامتر $H = 0.5/5$ برای مثال 1

<table>
<thead>
<tr>
<th>L</th>
<th>$X_E$</th>
<th>$S_E$</th>
<th>$\overline{X}$</th>
<th>$\overline{X}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.125</td>
<td>0.375</td>
<td>0.250</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.375</td>
<td>0.500</td>
<td>0.499</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>0.500</td>
<td>0.750</td>
<td>0.649</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>16</td>
<td>0.750</td>
<td>1.000</td>
<td>0.849</td>
<td>0.000</td>
</tr>
</tbody>
</table>

جدول 2: میانگین انحراف معیار ($S_E$) و فاصله اطمینان برای میانگین با پارامتر $H = 0.8/8$ برای مثال 1

<table>
<thead>
<tr>
<th>L</th>
<th>$X_E$</th>
<th>$S_E$</th>
<th>$\overline{X}$</th>
<th>$\overline{X}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.18</td>
<td>0.35</td>
<td>0.234</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.35</td>
<td>0.60</td>
<td>0.499</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>0.50</td>
<td>1.00</td>
<td>0.649</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>16</td>
<td>0.75</td>
<td>1.50</td>
<td>0.849</td>
<td>0.000</td>
</tr>
</tbody>
</table>

مثال 2: انتگرال ویر کسری زیر را در نظر بگیرید:
بزرگ‌ویا، ریاضی یک
(نشریه علم دانشگاه خوارزمی)

چگونه آن معلوم نیست. می‌توان مقدار انتگرال فوق را بدین صورت محاسبه کرد:

\[ \int e^{t^2} dB^H(t), \quad (5) \]

که جواب دقیق آن معلوم نیست. می‌توان مقدار انتگرال فوق را بدین صورت محاسبه کرد:

\[ \int e^{t^2} dB^H(t) = eB^H(1) - \int 2te^{t^2} B^H(t)dt, \]

که را با استفاده از روش دیگری محاسبه می‌کنم. از طرف دیگر با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله مقدار (5) را محاسبه می‌کنم. به طوریکه جدول‌های (3) و (4) میانگین خطای (\(X_E^2\)) و انحراف معیار (\(S_E\)) را برای مقادیر متغیر \(H\) با 200 گذار نشان داده است.

جدول 2. میانگین (\(X_E^2\))، انحراف معیار (\(S_E\)) و فاصله اطمنان برای میانگین با پارامتر \(H = 0\) برای مثال 2

<table>
<thead>
<tr>
<th>L</th>
<th>(X_E^2)</th>
<th>(S_E)</th>
<th>کران بالا</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.425</td>
<td>0.653</td>
<td>0.158</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.389</td>
<td>0.379</td>
<td>0.366</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>0.314</td>
<td>0.330</td>
<td>0.353</td>
</tr>
<tr>
<td>16</td>
<td>0.244</td>
<td>0.242</td>
<td>0.239</td>
</tr>
</tbody>
</table>

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از توابع ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگین ویا به‌عنوان میانگی...
منابع