(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

مفاهیم قابلیت اعتماد و ارتباط آنها با شاخص‌های نابرابری اقتصادی

زهرا بهدانی، غلامرضا محتشمی برزادران، بهرام صادقپور گیلده
دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه آمار

دریافت ۹۶/۰۶/۱۳ پذیرش ۹۷/۰۹/۲۱

چکیده

یکی از وجوه اشتراک نظریه قابلیت اعتماد و اقتصاد بررسی داده‌های نامنفی، عموماً چوله (طول عمر و درآمد)، برازش مدل مناسب به این داده‌ها و یافتن مشخصه‌های آنها است. هدف اصلی این مقاله یافتن ارتباط بین مفاهیم و شاخص‌های اقتصاد و قابلیت اعتماد است. بررسی ارتباط بین شاخص‌های نابرابری و معیارهای سنجش قابلیت اعتماد این امکان را به محقق می‌دهد که معیارهای هر یک از دو مفهوم را برای بررسی مفهوم دیگر به‌کار بگیرد. در این مقاله ابتدا ارتباط بین شاخص‌های نابرابری و شاخص‌های قابلیت اعتماد بیان می‌شود. چنان‌که در ادامه خواهید دید شاخص‌های نابرابری اقتصادی و قابلیت اعتماد ارتباط نزدیکی با یک‌دیگر دارند. برخی از مفاهیم سالخوردگی را می‌توان با استفاده از شاخص‌های نابرابری تعیین کرد. هم‌چنین روابط ریاضی موجود بین این شاخص‌ها نیز بیان شده است. در نهایت برای درک بهتر و آشنایی بیش‌تر با مفاهیم و روابط ارائه شده با استفاده از داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۸۸-۱۳۹۳به دنبال یافتن نتایج عددی و بحث‌های کاربردی هستیم.

واژه‌های کلیدی: مفاهیم سالخوردگی، ترتیب تصادفی، منحنی لورنتس، منحنی زنگا.

مقدمه

یکی از زمینه‌های مشترک بین علم آمار و اقتصاد بحث تحلیل نابرابری درآمد و ثروت است. توزیع عادلانه درآمد یکی از وظایف مهم دولت‌ها به‌حساب می‌آید. از این‌رو بحث و قضاوت درباره چگونگی توزیع درآمد در کنار گسترش مدل‌های رشد اقتصادی، اهمیت دارد. با توجه به اهمیت این موضوع، بسیاری از محققان و سیاستمداران درصدد یافتن معیاری هستند که به خوبی نابرابری درآمد در طبقات مختلف جامعه را منعکس کند. برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های شاخص‌های نابرابری اقتصادی به‌وسیلهٔ دالتون [۶] معرفی شد.

مبحث قابلیت اعتماد در صنعت، تکنولوژی، پزشکی و سایر علوم دارای نقش اساسی و انکارناپذیری است. امروزه، مسئله قابلیت اطمینان از مهم‌ترین مسائل پیش رو در مراحل اولیه برنامه‌ریزی، طراحی و کنترل سیستم‌های تولیدی است. تعاریف متفاوتی از قابلیت اعتماد در متون آماری وجود دارد. در حقیقت می‌توان آن را احتمال عملکرد رضایت‌بخش یک سیستم در زمان معین تعریف کرد. از نظر آماری، قابلیت اعتماد، سازگاری مجموعه‌ای از ابعاد یا ابزارهای اندازه‌گیری است که اغلب به‌منظور توضیح دادن یک آزمایش استفاده می‌شود. قابلیت اعتماد یک مؤلفه می‌تواند روی قابلیت اعتماد کل سیستم تأثیر بگذارد یا به‌عبارت دیگر قابلیت اعتماد هر سیستمی به قابلیت اعتماد عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن وابسته است.

یک وجه اشتراک نظریه قابلیت اعتماد و اقتصاد، بررسی داده‌های نامنفی، عموماً چوله (طول عمر و درآمد)، برازش مدل مناسب به این داده‌ها و یافتن مشخصه‌های آنها است. کلفسجو [۱۰] و پاندیر و همکاران [۱۵] تفسیر برخی از

*نویسنده مسئول grmohtashami@um.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

نابرابری‌های اقتصادی را بر اساس مفاهیم قابلیت اعتماد ارائه دادند. جیورجی و کرشنزی [۸] کاربردهایی از ضریب جینی و شاخص بن‌فرونی را در قابلیت اعتماد و آزمون‌های زندگی بیان کردند. چاندرا و سینگپوروالا [۵]، پرزاوکان و همکاران [۱۳] و فام و ترکان [۱۴] رابطهٔ بین منحنی لورنتس، ترتیب لورنتس و تبدیل زمان کل آزمون را بررسی کردند.

هدف این مقاله یافتن ارتباط بین شاخص‌های نابرابری اقتصادی با برخی از مفاهیم و شاخص‌های قابلیت اعتماد است. در واقع در این متن به‌دنبال یافتن برخی پل‌های ارتباطی اقتصاد و قابلیت اعتماد هستیم به‌طوری‌که با داشتن شاخص‌های هر یک بتوانیم در مورد ویژگی‌ها و مشخصه‌های دیگری اظهار نظر کنیم. برای این منظور در این مقاله ابتدا در بخش ۲، برخی از شاخص‌های نابرابری اقتصادی را بیان کرده، سپس خواص و ویژگی‌های آن و ارتباط بین این شاخص‌ها تبیین می‌شود. در بخش۳، مفاهیم کلی قابلیت اعتماد، برخی از ترتیب‌های تصادفی، تبدیل زمان کل آزمون و مفاهیم سالخوردگی را یادآوری کرده و روابط بین آنها بیان می‌شوند. در بخش۴ ارتباط بین مفاهیم قابلیت اعتماد و شاخص‌های نابرابری اقتصادی بررسی می‌شود. مثال‌های عددی برای بررسی نتایج و درک بهتر مباحث مطرح شده در بخش ۵ داده شده‌اند. در این مثال‌ها شاخص‌های نابرابری اقتصادی مانند ضریب جینی، زنگا و بن فرونی برای داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۸۸-۱۳۹۳ محاسبه می‌شود و با کمک مطالب و قضایای مطرح شده در متن برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد داده‌ها از جمله مفاهیم سالخوردگی پیش‌بینی می‌شود.

شاخص‌های نابرابری اقتصادی

در هر جامعه‌ای و به‌ویژه در کشورهای در حال توسعه بحث فقر، ثروت و عدالت اجتماعی یکی از مهم‌ترین بحث‌های محافل عمومی و خصوصی است. مفهوم عادلانه توزیع درآمد این است که درصدهای تجمعی افراد جامعه تقریباً برابر درصدهای تجمعی درآمد جامعه باشند. اما در بعضی جوامع توزیع درآمدها به‌طور غیرعادلانه صورت می‌گیرد، بدین معنی که اقلیتی از طبقات مختلف جامعه سهم بزرگی از درآمد ملی را به خود تخصیص می‌دهند و بقیه درآمد بین گروه‌های متعدد دیگر توزیع می‌شود. یک ابزار مهم برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی، "منحنی لورنتس" است، که برای اولین بار به‌وسیلهٔ لورنتس [۱۲] معرفی شد. منحنی‌ها و اندازه‌های نابرابری متعددی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می‌شوند که از میان آنها می‌توان به منحنی زنگا، ضریب جینی و منحنی بن فرونی اشاره کرد. با استفاده از شاخص‌های نابرابری به دنبال یافتن پاسخی برای این سوالات هستیم:

- آیا توزیع درآمد مشابه گذشته است؟
- آیا نابرابری درآمد کشورهای درحال‌توسعه از نابرابری درآمد در کشورهای توسعه یافته بیش‌تر است؟
- چه سیاست‌هایی منجر به افزایش نابرابری درآمد و ثروت می‌شود؟

آرنولد [۱]، سارابیا و همکاران [۱۶] از کسانی هستند که در این زمینه تحقیقات ارزشمندی داشته‌اند. در این بخش مقاله برخی از شاخص‌های اندازه‌گیری نابرابری و ویژگی‌هایی از آنها را بیان می‌کنیم.

منحنی لورنتس و ضریب جینی

یکی از مهم‌ترین نشانه‌های رشد اجتماعی و وضعیت رفاه در یک جامعه، تعادل و توازن توزیع درآمد یا ثروت در آن جامعه است. برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی یا به‌عبارت دیگرتوزیع ناعادلانه درآمد، معمولاً از "منحنی لورنتس" استفاده می‌شود. برای دست‌یابی به منحنی لورنتس، روی محور عمودی درصد تجمعی درآمدها را که بین گروه‌های

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

مختلف درآمد توزیع می‌شود و سهم آنها را تشکیل می‌دهد و روی محور افقی درصدهای متناظر افراد را قرار می‌دهیم. اگر توزیع درآمدها به‌طور عادلانه صورت گیرد، خط مستقیمی (در واقع قطر اصلی مربع حاصل) به‌دست می‌آید. در صورتی که توزیع درآمدها ناعادلانه و نابرابر باشد منحنی محدبی حاصل می‌شود. خط مستقیم مذکور و حاصل از حالت اول، به خط توزیع کاملاً عادلانه معروف است، و منحنی محدب حاصل، منحنی لورنتس نامیده می‌شود.

تعریف ۱. برای متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X با تابع توزیع $F(x)$، میانگین $\mu = E(X)$ و تابع چندک $F^{-1}(u) = sup\{x: F(x) \leq u\}$ منحنی لورنتس با رابطهٔ (۱) تعریف می‌شود:

$$L(u) = \frac{1}{E(X)} \int_0^u F^{-1}(t)dt, \qquad u \in [0,1]. \tag{۱}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) مشخص است که تابع لورنتس تابعی صعودی، محدب، پیوسته با $L(0)=0$ و $L(1)=1$ است. بر عکس هر تابع با این ویژگی‌ها یک تابع لورنتس از یک توزیع آماری معین است [۱۸]. شاخص‌های مختلفی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می‌شوند، که از بین آنها ضریب جینی مهم‌ترین اندازه‌ای است که برای سنجش میزان نابرابری درآمد در جامعه به‌کار برده می‌شود. ضریب جینی به‌صورت دو برابر ناحیه بین منحنی لورنتس و خط قطر تعریف می‌شود که همواره نامنفی و مقداری بین صفر و یک است. در حالت برابری اقتصادی یعنی زمانی که $L(u) = u$ است، ضریب جینی برابر صفر و در حالت نابرابری کامل مقدار این ضریب یک است. در این حالت توزیع ثروت به‌گونه‌ای است که کل ثروت تنها در دست یک نفر است و مابقی هیچ درآمدی ندارند.

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع لورنتس $L(u)$ باشد، ضریب جینی آن برابر است با:

$$G = 2\int_0^1 [u - L(u)]du = 1 - 2\int_0^1 L(u)du. \tag{۲}$$

منحنی بن‌فرونی و ضریب بن‌فرونی

در بررسی اندازه‌های نابرابری، منحنی لورنتس و ضریب جینی کاربرد بیش‌تری دارند. بن فرونی [۴] برای بررسی نابرابری اقتصادی، اندازهٔ جدیدی به‌نام ضریب بن‌فرونی را معرفی کرد. این ضریب حساسیت بیش‌تری نسبت به سطوح پایین توزیع درآمد دارد و برای اندازه‌گیری فقر در جامعه استفاده می‌شود. این شاخص در قابلیت اعتماد و آزمون طول عمر نیز کاربرد دارد. ضریب بن فرونی $B = 1 - \int_0^1 B(u)du$، بر اساس منحنی بن‌فرونی $B(u) = \frac{1}{\mu u}\int_0^u F^{-1}(t)dt$ تعریف می‌شود. مقادیر $L(u)$ کسری از کل درآمد هستند. در صورتی‌که $B(u)$ به سطوحی از درآمد نسبی اشاره دارد. در حالت کلی منحنی بن‌فرونی اکیداً صعودی است و می‌تواند محدب و یا مقعر باشد.

منحنی زنگا و ضریب زنگا

زنگا [۱۹] شاخص جدیدی به‌عنوان جای‌گزین ضریب جینی معرفی کرد. این شاخص بر پایه نسبت بین میانگین $100u\%$ پایین جامعه و میانگین $100(1-u)\%$ بالای جامعه تعریف می‌شود. زنگا [۲۰] بر اساس امید ریاضی شرطی توزیع مربوط منحنی جدیدی به‌صورت رابطهٔ (۳) معرفی کرد:

$$Z(u) = 1 - \frac{E\left(X \middle| X \leq F^{-1}(u)\right)}{E\left(X \middle| X > F^{-1}(u)\right)}, \qquad u \in [0,1], \tag{۳}$$

که به‌صورت (۴) ساده می‌شود:

$$Z(u) = 1 - \frac{1-u}{u}\frac{\int_0^u F^{-1}(t)dt}{\int_u^1 F^{-1}(t)dt}, \qquad u \in [0,1]. \tag{۴}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

شاخص زنگا برابر است با، $Z=\int_0^1 Z(u)du$. برتری این معیار نسبت به معیارهای دیگر این است که این شاخص ارتباط فقر و ثروت را به‌خوبی منعکس می‌کند. زنگا [۲۰] رابطهٔ بین ضریب جینی، ضریب بن‌فرونی و ضریب زنگا به‌صورت $G\le B\le Z$ بیان کرد.

تابع پراکنش راست[1]

تابع پراکنش راست که از آن با نام تبدیل فزونی ثروت[2] نیز یاد می‌شود، در اقتصاد و قابلیت اعتماد کاربرد دارد و با رابطهٔ (۵) تعریف می‌شود:

$$EW(u)=\int_{F^{-1}(u)}^{\infty}\bar{F}(x)dx\,,\qquad u\in[0,1], \tag{۵}$$

و می‌توان آن‌را به‌عنوان ثروت اضافی $100(1-u)$ % افراد ثروتمند جامعه تفسیر کرد.

رابطهٔ بین شاخص‌های نابرابری اقتصادی

یکی از مهم‌ترین مسائل مورد توجه جوامع بشری، مسئلهٔ نابرابر بودن توزیع درآمد افراد جامعه است. هر چه درآمد بین افراد جامعه عادلانه‌تر توزیع شود، آن جامعه رفاه اجتماعی بیش‌تری دارد. با توجه به اهمیت این موضوع، معیارهای متعددی برای بررسی نابرابری اقتصادی به‌وسیلهٔ افراد مختلفی معرفی شده است، که در بخش قبل برخی از آنها را معرفی کردیم. یافتن رابطهٔ این شاخص‌ها در درک مفاهیم، تفاوت و شباهت بین آنها بسیار مفید خواهد بود.
رابطهٔ بین منحنی لورنتس و دیگر شاخص‌های نابرابری اقتصادی را می‌توان به‌صورت خلاصه در جدول ۱ بیان کرد.

جدول۱. رابطهٔ شاخص‌های نابرابری اقتصادی

برحسب	$L(u)$	$B(u)$	$Z(u)$
$\boldsymbol{L(u)}$	$\equiv$	$u.B(u)$	$\frac{u(1-Z(u))}{1-uZ(u)}$
$\boldsymbol{B(u)}$	$\frac{L(u)}{u}$	$\equiv$	$\frac{(1-Z(u))}{1-uZ(u)}$
$\boldsymbol{Z(u)}$	$\frac{u-L(u)}{u(1-L(u))}$	$\frac{1-B(u)}{1-uB(u)}$	$\equiv$
$\boldsymbol{EW(u)}$	$(u-1)F^{-1}(u)+\mu-L(u)$	$(u-1)F^{-1}(u)+\mu-uB(u)$	$(u-1)F^{-1}(u)+\mu-\frac{u(1-Z(u))}{1-uZ(u)}$

برای درک بهتر، ویژگی‌های این شاخص‌ها، در شکل۱ نمودار منحنی لورنتس، منحنی بن‌فرونی و منحنی زنگا برای توزیع‌های نمایی استاندارد، پارتو با پارامتر ۳ و توانی با پارامتر ۲ و یک نمونه داده درآمد مربوط به خانوار شهری ایران در سال ۱۳۹۳ را مشاهده می‌کنید. چنان‌که در شکل نیز مشخص است منحنی لورنتس همواره محدب و صعودی است. ولی منحنی بن فرونی صعودی است و می‌تواند محدب یا مقعر باشد. منحنی زنگا می‌تواند نزولی نیز باشد.

معرفی مفاهیمی از قابلیت اعتماد

در این بخش به مرور برخی مفاهیم مقدماتی قابلیت اعتماد، مشخصه‌ها و روابط آنها می‌پردازیم.

مفاهیم مقدماتی قابلیت اعتماد

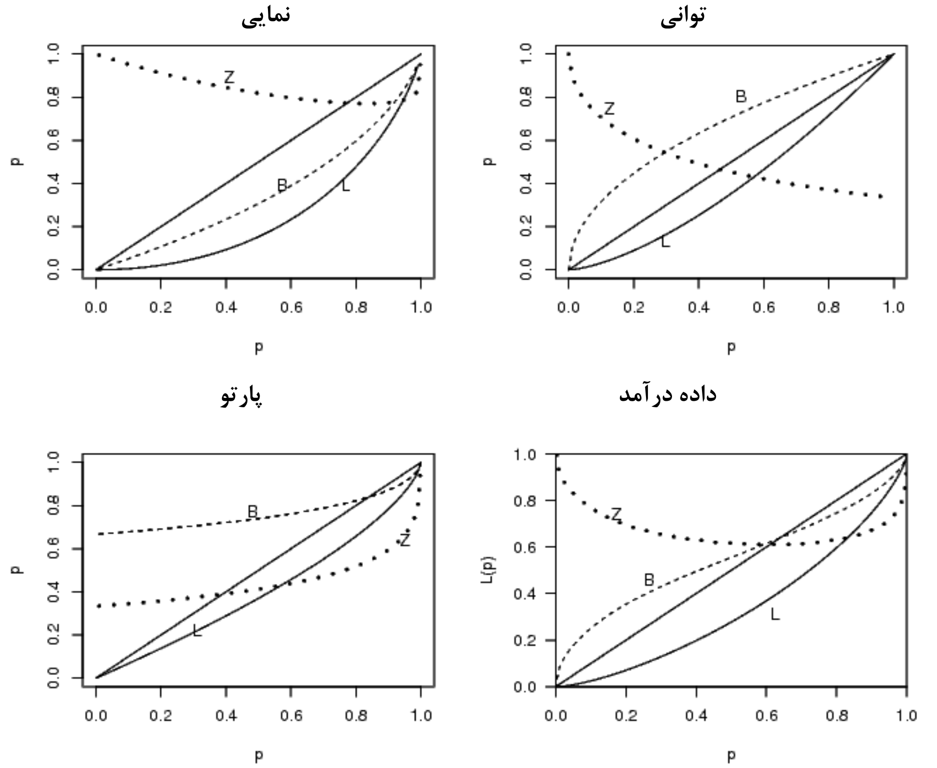
مهم‌ترین مسئله در تحلیل‌های قابلیت اعتماد یافتن مدل مناسب داده‌های مربوط به طول عمر مؤلفه‌ها و یافتن ویژگی‌های آن است. برخی از مفاهیم مقدماتی قابلیت اعتماد بدین‌صورت تعریف می‌شوند برای یافتن اطلاعات بیش‌تر در این زمینه به بارلو و پروشان [۳] مراجعه شود.

1. Right spread function
2. Excess wealth transform

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

تعریف ۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. در این‌صورت تابع بقا، نرخ شکست، تابع میانگین مانده عمر، نرخ خطر معکوس و میانگین گذشته عمر به‌ترتیب برابر است با:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}\text{،} m(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(t)dt\ \lambda(x) = \frac{f(x)}{F(x)},\ r(x) = \frac{1}{F(x)}\int_0^x F(t)dt\,.$$



شکل ۱. نمودار شاخص‌های نابرابری برای توزیع های مختلف و داده‌های درآمد سال ۱۳۹۳

زمان کل آزمون

یکی از مفاهیم مهم در تجزیهٔ داده‌های طول عمر زمان کل آزمون است که ابتدا به‌وسیلهٔ اپستین و سوبل [۷]بررسی شد. تبدیل زمان کل آزمون $T(u) = \int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(t)dt$ است.

تابع تبدیل زمان کل آزمون پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq x \leq F^{-1}(1)$ تابع توزیع پیوسته باشد. در این صورت تابع صعودی اکید است.

یک تبدیل پایا از تبدیل زمان کل آزمون که به تبدیل زمان کل آزمون قیاسی[۱] معروف است، به‌صورت $W(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(t)dt$ تعریف می‌شود. این منحنی در مربع واحد واقع می‌شود، مشتق اول آن مثبت است و در نتیجه منحنی همواره صعودی است. ولی مشتق دوم آن تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه منحنی می‌تواند محدب و یا مقعر باشد. برای متغیر تصادفی پیوسته X زمان کل آزمون قیاسی تجمعی برابر است با $V = \int_0^1 W(u)du = \frac{1}{\mu}\int_0^1 T(u)du$.

1. Scaled total time on test transform

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

مفاهیم سالخوردگی

در مفاهیم قابلیت اعتماد، توزیع‌های طول عمر بر اساس رفتار توابعی چون نرخ شکست و میانگین مانده عمر به رده‌های مختلف تقسیم می‌شوند. این تقسیم‌بندی بر اساس مشخصه‌های سالخوردگی توزیع‌های طول عمر، برای انتخاب مدل مناسب، مفید است. هدف از بررسی مفاهیم سالخوردگی این است که بررسی شود، یک مؤلفه یا سیستم با افزایش سن بهبود می‌یابد یا بدتر می‌شود. در این بخش از مقاله برخی از مفاهیم سالخوردگی معرفی می‌شوند. برای آشنایی بیش‌تر و مشاهده ارتباط آنها با یک‌دیگر خواننده علاقه‌مند می‌تواند به بارلو و پروشان [۳] مراجعه کند.

تعریف۳. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با تابع توزیع $F(x)$، تابع بقا $\bar{F}(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ با $x,t>0$ باشد. گوییم تابع توزیع F، دارای

- نرخ خطر صعودی (IFR) است، هرگاه نرخ شکست آن صعودی باشد.
- متوسط نرخ خطر صعودی (IFRA) است، اگر $\frac{\int_0^t h(x)dx}{t}$ صعودی باشد.
- ویژگی نو بهتر از استفاده شده (NBU) است، اگر $\overline{F}(x+t) \le \bar{F}(x)\bar{F}(t)$.
- میانگین مانده عمر صعودی، (IMRL)، است، اگر میانگین مانده عمر آن صعودی باشد.
- ویژگی نو بهتر از استفاده شده در میانگین، (NBUE)، است هرگاه $\mu \ge m(x)$.
- ویژگی نو بهتر از استفاده شده در ترتیب محدب، (NBUC) است، اگر $\int_y^\infty \bar{F}(t)dt \le \int_y^\infty \bar{F}(t|x)dt$.
- ویژگی (HNBUE) است، هرگاه $\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \le \mu e^{-\frac{x}{\mu}}$.
- نو بهتر از استفاده شده در نرخ شکست، (NBUFR) ، است، اگر $h(x) \ge h(0)$.
- نو بهتر از استفاده شده در متوسط نرخ شکست، (NBUFRA) است، اگر $h(0) \le \frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$.

ترتیب‌های تصادفی

ترتیب‌های تصادفی در زمینه‌های مختلف آمار و احتمال استفاده شده‌اند. مقایسهٔ جامع دو متغیر تصادفی از طریق ترتیب‌های تصادفی متنوع مانند ترتیب‌های تصادفی معمول، نسبت درست‌نمایی، نرخ شکست، لورنتس و ... انجام‌پذیر است. ترتیب‌های تصادفی در مواردی که توابع چگالی احتمال بسیار پیچیده هستند، منجر به ارائه روش‌ها و کران‌های قوی‌تر می‌شوند. در اقتصاد ابزاری با ارزش در مقایسهٔ کنش‌هایی که منجر به ایجاد هزینه‌های مختلف نامعین می‌شوند، است. هم‌چنین، ترتیب‌های تصادفی که حاکی از روابط ترتیبی بین توزیع‌های احتمال هستند، برای مقایسه متغیرهای تصادفی مفیدند. ترتیب لورنتس یک ابزار ساده برای مقایسه تغییرپذیری متغیرهای تصادفی نامنفی است. مقایسهٔ تغییرپذیری متغیرهای تصادفی مخصوصاً آماره‌های مرتب در قابلیت اعتماد اهمیت فراوان دارد. یکی از کاربردهای ترتیب‌های تصادفی مقایسه طول عمر سیستم‌ها است که می‌توان آن را از دیدگاه‌های مختلف مورد بحث قرار داد. جزئیات بیش‌تر در این زمینه را می‌توان در شیکد و شانتیکومار [۱۷] بررسی کرد.

تعریف ۴. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته با توابع چگالی $f(x)$ و $g(x)$ و توابع بقا $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$ هستند. در این صورت گوییم، X کوچک‌تر از Y در

- ترتیب محدب $(X \le_c Y)$ است هرگاه $G^{-1}F(x)$ در x محدب باشد.
- ترتیب لورنتس $(X \le_L Y)$ است هرگاه $L_F(u) \ge L_G(u)$ باشد.
- ترتیب زنگا $(X \le_Z Y)$ است هرگاه $Z_F(u) \ge Z_G(u)$ باشد.

- ترتیب بن فرونی $(X \leq_B Y)$است هرگاه $B_F(u) \geq B_G(u)$ باشد.
- ترتیب فزونی ثروت $(X \leq_{EW} Y)$است هرگاه $EW_F(u) \leq EW_G(u)$ باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی ذکر شده این رابطه برقرار است:

$$X \leq_c Y \implies X \leq_{EW} Y \Rightarrow X \leq_L Y \Leftrightarrow X \leq_Z Y \Leftrightarrow X \leq_B Y.$$

رابطهٔ بین مفاهیم قابلیت اعتماد و شاخص‌های نابرابری اقتصادی

امروزه یکی از اهداف مهم محققان برقراری ارتباط بین علوم مختلف و یا شاخه‌های متنوع هر یک از علوم است. برخی از شاخص‌های نابرابری را می‌توان به پدیده‌هایی غیر توزیع درآمد تعمیم داد. به‌عنوان مثال، چاندرا و سینگپوروالا [۵] و فام و ترکان [۱۴] و محققان دیگری مانند کلفسجو [۱۰] کاربردهایی از منحنی لورنتس را در بررسی آزمون‌های طول عمر و قابلیت اعتماد بیان کردند.

یافتن ارتباط بین مفاهیم قابلیت اعتماد و شاخص‌های نابرابری اقتصادی می‌تواند بسیار مفید واقع شود. زیرا یافتن ارتباط بین این مفاهیم محققان را قادر می‌سازد تا از نتایجی که برای هریک از این مفاهیم و شاخص‌ها به‌طور جداگانه کسب شده است استفاده کنند. به‌عنوان مثال، می‌توان ضریب جینی را برای آزمون‌های نمایی استفاده کرد، یا با استفاده از مفاهیم قابلیت اعتماد شاخص جدیدی از نابرابری را تعریف کرد و یا تعابیری از شاخص‌های نابرای اقتصادی را برای داده‌های طول عمر به‌دست آورد. برای نمونه با استفاده از رابطهٔ (۳) می‌توان منحنی زنگا را به‌عنوان تفاضل متوسط عمر مؤلفه‌هایی که قبل از رسیدن به سن مورد نظر نابود شده‌اند و متوسط سن آنهایی که به سن مورد نظر رسیده‌اند نسبت به آنهایی که به سن مورد نظر رسیده‌اند، تفسیر کرد. علاوه بر این می‌توان رده‌هایی از توزیع‌های طول عمر را با استفاده از شاخص‌های نابرابری به‌دست آورد.

رابطهٔ بین شاخص‌های نابرابری و مفاهیم کلی قابلیت اعتماد

کاربرد مفاهیم قابلیت اعتماد در تحلیل‌های اقتصادی را می‌توان در بررسی‌های مختلفی دید. در این بخش به‌دنبال یافتن رابطهٔ بین شاخص‌های نابرابری اقتصادی و برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد مانند میانگین مانده عمر، میانگین گذشته عمر و ... هستیم. در این راستا قضایای زیر به اثبات رسیده است:

قضیهٔ ۵. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع F و میانگین مثبت متناهی μ باشد. آن‌گاه رابطهٔ بین میانگین مانده عمر با برخی از شاخص‌های نابرابری بدین‌صورت است:

$$m(u) = \frac{\mu(1-L(F(u)))}{\bar{F}(u)} - u,$$

$$m(u) = \frac{\mu(1-F(u)B(F(u)))}{\bar{F}(u)} - u,$$

$$m(u) = \frac{\mu}{1-F(u)Z(F(u))} - u,$$

$$m(u) = \frac{EW(F(u)))}{\bar{F}(u)}.$$

برهان: برهان قسمت اول این قضیه به‌سادگی با توجه به تعریف میانگین مانده عمر و رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از تابع میانگین مانده عمر داریم:

$$m(x) = -x + \int_x^\infty tf(t)dt/\bar{F}(x) = \frac{\mu - \int_0^x tf(t)dt}{\bar{F}(x)} - x = \frac{\mu(1-L(F(x)))}{\bar{F}(x)} - x.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

قسمت دوم و سوم قضیه با توجه به رابطهٔ منحنی بن‌فرونی و زنگا با منحنی لورنتس و قسمت قبل قضیه قابل اثبات است. قسمت چهارم نیز با توجه به تعریف تبدیل فزونی ثروت و جای‌گذاری $x = F^{-1}(u)$ در تعریف میانگین مانده عمر به‌دست می‌آید.

فرع ۶. تحت شرایط قضیهٔ ۵ رابطهٔ بین برخی شاخص‌های اقتصادی و میانگین مانده عمر بدین‌صورت است:

$$L(\mathrm{u}) = 1 - \frac{1}{\mu}(1-\mathrm{u})[\mathrm{m}(\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{u})) + \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{u})],$$

$$B(\mathrm{u}) = \frac{1 - \frac{1}{\mu}(1-\mathrm{u})[\mathrm{m}(\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{u})) + \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{u})]}{\mathrm{u}},$$

$$Z(u) = u^{-1}\left[1 - \frac{\mu}{m(F^{-1}(u)) + F^{-1}(u)}\right],$$

$$EW(u) = (1-u)m(F^{-1}(u)).$$

قضیهٔ ۷. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع F و میانگین مثبت متناهی μ باشد. آن‌گاه رابطهٔ بین میانگین گذشته عمر با منحنی لورنتس، منحنی زنگا، منحنی بن فرونی و تبدیل فزونی ثروت بدین‌صورت است:

$$r(u) = u - \frac{\mu\, L(F(u))}{F(u)},$$

$$r(u) = u - \mu\, B(F(u)),$$

$$r(u) = u - \frac{\mu\,(1 - Z(F(u)))}{1 - F(u)Z(F(u))},$$

$$r(u) = \frac{u + EW(F(u)) - \mu}{F(u)}\ .$$

فرع ۸. تحت شرایط قضیهٔ ۷ این روابط اثبات می‌شود:

$$L(u) = \frac{u}{\mu}(F^{-1}(u) - r(F^{-1}(u))),$$

$$B(u) = \frac{F^{-1}(u) - r(F^{-1}(u))}{\mu},$$

$$Z(u) = \frac{F^{-1}(u) - r(F^{-1}(u)) - \mu}{u(F^{-1}(u) - r(F^{-1}(u))) - \mu},$$

$$EW(u) = \mu - u(F^{-1}(u) - r(F^{-1}(u))).$$

فرع ۹. رابطهٔ بین شاخص‌های نابرابری اقتصادی با برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد در ذیل ارائه شده است:

$$F^{-1}(u) = \mu\, L'(u),$$

$$f(u) = \frac{1}{\mu L''(F(u))},$$

$$L(u) = \frac{\int_0^u \int_0^t \frac{dx}{(1-x)h(F^{-1}(x))}\,dt}{\mu},$$

$$L(u) = \mu[W(u) - \frac{1-u}{\mu}F^{-1}(u)],$$

$$B(u) = \frac{\int_0^u \int_0^t \frac{dx}{(1-x)h(F^{-1}(x))}\,dt}{u\mu},$$

$$h(u)=\frac{1}{\bar{F}(u)\mu L''(F(u))},$$
$$EW(u)=\int_0^u \frac{-1}{h(F^{-1}(t))}dt,$$
$$T(u)=\mu-EW(u),$$
$$G=1-V,$$
$$V=2\int_0^1 L(u)du\,.$$

هم‌چنین پاندیر و همکاران [۱۵] نشان دادند که $B\leq\frac{1+G}{2}$ و با استفاده از فرع ۴.۳، $B\leq\ 1-\frac{V}{2}$ است و به این ترتیب می‌توان کران بالایی برای شاخص بن فرونی یافت.

رابطهٔ بین مفاهیم سالخوردگی و شاخص‌های نابرابری

در این قسمت از مقاله به‌دنبال یافتن ارتباط بین شاخص‌های نابرابری اقتصادی و رده‌های طول عمر هستیم. برای مثال ضریب جینی شاخصی است که برای اندازه‌گیری میزان نابرابری اقتصادی جوامع به‌کار می‌رود. اندازه ضریب جینی برابر مساحت بالای شکل زمان کل آزمون است. از این‌رو، می‌توان از این شاخص نیز در قابلیت اعتماد استفاده کرد. برای نمونه اگر X متغیر تصادفی نامنفی باشد، آن‌گاه ضریب جینی $0.5\ \leq\ G\ \leq\ 1$ نشان‌دهندهٔ این است که توزیع X متعلق به رده توزیع‌های IFR است. محققانی مانند چاندرا و سینگپوروالا [۵]، بارلو و کامپو [۲]، کلفسجو [۱۰] و کوچار و ژو [۱۱] رابطهٔ منحنی لورنتس را با برخی مفاهیم سالخوردگی مانند IFR، $IFRA$، $NBUE$ و $HNBUE$ را بررسی کردند.

در ادامه روابط جدیدی از شاخص‌های نابرابری اقتصادی و مفاهیم سالخوردگی با تکیه بر منحنی لورنتس ارائه می‌شود (برای سایر شاخص‌ها نیز می‌توان به‌طور مشابه روابطی به‌دست آورد). این روابط به محققان کمک می‌کند که بسیاری از آزمون‌های طول عمر را با استفاده از شاخص‌های نابرابری انجام دهند و یا بالعکس با داشتن اطلاعاتی از رده‌های طول عمر، مشخصه‌هایی از شاخص‌های نابرابری و منحنی‌های تمرکز جامعه را یافت. به‌دلیل سادگی، اثبات برخی ذکر نشده است.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و میانگین متناهی μ و $G(x)$ تابع توزیع متناظر با یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین μ باشد. در این صورت توزیع F، IFR است اگر و فقط اگر:

$$L_F(u)\geq L_G(u)\qquad ,(B_F(u)\geq B_G(u))$$

منحنی لورنتس $L_G(u)=u+(1-u)\log(1-u)$ است.

برهان: بارلو و پروشان [۳] ثابت کردند که اگر $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ توزیع نمایی و $F(x)$ یک توزیع پیوسته با $F(0)=0$ باشد در این صورت؛ توزیع F، IFR است اگر و فقط اگر $F\leq_C G$. بارلو و پروشان [۳] (قضیهٔ ۵.A.۳ نشان دادند که برای دو جامعه با میانگین برابر $F\leq_C G$ است اگر و فقط اگر $\int_u^1 \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\leq\int_u^1 \mathrm{G}^{-1}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ و یا $\int_0^u \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\geq\int_0^u \mathrm{G}^{-1}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ با توجه به فرض میانگین متناهی و برابر برای دو متغیر تصادفی $L_F(u)\geq L_G(u)$ است.

فرع ۱۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی طول عمر با میانگین متناهی مثبت μ باشد. در این صورت

- X متعلق به رده توزیع‌های $IMRL$ است. اگر، $L(F(u))\geq 1-\frac{u\bar{F}(u)}{\mu}-\frac{\bar{F}(u)}{\mu h(u)}$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

- X متعلق به رده توزیع‌های $NBUE$ است. اگر، $L(u) \geq 1-(1-u)(1+F^{-1}(u)\mu)$.
- X متعلق به رده توزیع‌های HNBUE است. اگر، $L(u) \geq\ 1-exp(-L'(u))-L'(u)(1-u)$.
- X متعلق به رده توزیع‌های $NBUC$ است. اگر،

$$\mu(\bar{L}(F(x+t))-\bar{F}(t)\bar{L}(F(x)))\ \leq -x\bar{F}(x)\bar{F}(t)+(x+t)\bar{F}(x+t).$$

- X متعلق به رده توزیع‌های $NBUFR$ است. اگر، $L''(F(u)) \leq \frac{1}{\bar{F}(u)\mu h(0)}$.
- X متعلق به رده توزیع‌های $NBUFRA$ است. اگر، $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\mu L''(F(u))\bar{F}(u)} du \geq h(0)$.

که در آن $\bar{L}(u)=1-L(u)$ و $L'(u)$ و $L''(u)$ به‌ترتیب مشتق اول و دوم تابع لورنتس است.

نتایج عددی

در این بخش از مقاله به‌کمک داده‌های درآمد طی سال‌های ۱۳۹۳-۱۳۸۸ به بررسی مطالب ارائه شده در بخش‌های قبل می‌پردازیم. این داده‌ها مربوط به طرح "آمارگیری از هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی" است، که به‌وسیلۀ مرکز آمار ایران و با همکاری معاونت‌های آمار سازمان‌های مدیریت و برنامه‌ریزی استان‌های کشور اجرا و نتایج آن در قالب کتابچه‌هایی در سطح کل کشور منتشر می‌شود. به‌علاوه داده‌ها و نتایج خام این طرح نیز برای محققان و برنامه‌ریزان قابل دسترسی است. با استفاده از نرم‌افزار R[۱] مقدار ضریب جینی، ضریب زنگا، زمان کل آزمون تجمعی قیاسی و ضریب بن فرونی برای داده‌های درآمد خانوار شهری و روستایی کشور طی سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۳ محاسبه شده و در جدول ۲ به‌صورت خلاصه نمایش داده شده است. با توجه به اطلاعات جدول، ضریب جینی درآمد شهری و روستایی کشور طی این سال‌ها متغیر بوده و دارای روندی نزولی است. ضریب جینی خانوار شهری بیان‌گر همگنی بیش‌تر بین خانوار شهری کشور نسبت به خانوار روستایی است. کاهش قابل ملاحظه ضریب جینی بعد از سال ۱۳۹۰ که یکی از دلایل آن توزیع یارانه در جامعه است. روندی مشابه ضریب جینی برای شاخص زنگا و بن‌فرونی نیز قابل مشاهده است که مطابق با انتظار است. ولی روند تغییرات برای زمان کل آزمون قیاسی تجمعی به‌صورت صعودی است که عکس آن‌چیزی است که در مورد سایر شاخص‌ها مشاهده شد. البته این مورد نیز با توجه به ارتباط این دو شاخص بدیهی است.

شکل ۲ شامل دو نمودار است. که به‌ترتیب نمودار سمت چپ و راست منحنی زنگا برای داده‌های درآمد شهری (ممتد) و روستایی (خط چین) کشور در سال ۱۳۸۹ و ۱۳۹۳ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل شاهد بالاتر واقع شدن منحنی زنگا داده‌های درآمد روستایی نسبت به درآمدهای شهری هستیم که بیان‌گر نابرابری اقتصادی بیش‌تر در روستاها نسبت به شهرها است. هر نقطه روی منحنی $Z(u)$ نشان می‌دهد که میانگین درآمد $100u\%$ فقیرترین برابر با$1-Z(u)$ ام میانگین درآمد$100(1-u)\%$ ثروتمندترین است. برای مثال در سال ۱۳۸۹ در بخش روستایی میانگین درآمد20% فقیر تقریبا برابر با 0.2 ام میانگین درآمد 80% ثروتمند است، و در سال ۱۳۹۳ با

---

۱. طبق تعریف منحنی لورنتس، منحنی بن فرونی و منحنی زنگا، هر سه شاخص به تابع توزیع جامعه که مجهول است، بستگی دارند. برای برآورد این توابع روش‌های مختلفی وجود دارد که به‌وسیله برخی محققان مطرح شده است و مورد نظر نویسندگان نبوده است. روابط تجربی برای براورد وجود دارد که خواننده می تواند برای مثال در کلیبر و کاتز (۲۰۰۳) [۹] مشاهده کند. در این مقاله برای رسم منحنی لورنتس و برآورد ضریب جینی از نرم افزار R و یکی از بسته های این نرم افزار به نام ineq استفاده شده است، در این بسته برخی از شاخص‌های اندازه‌گیری نابرابری درآمد از جمله منحنی لورنتس و ضریب جینی برآورد و منحنی لورنتس رسم می‌شود. سایر منحنی‌ها و شاخص‌ها نیز به‌وسیلۀ کدهای نوشته شده به‌وسیلۀ نویسندگان برآورد و رسم شده است. برای رسم منحنی نرخ شکست داده‌ها نیز از بسته muhaz استفاده شد.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

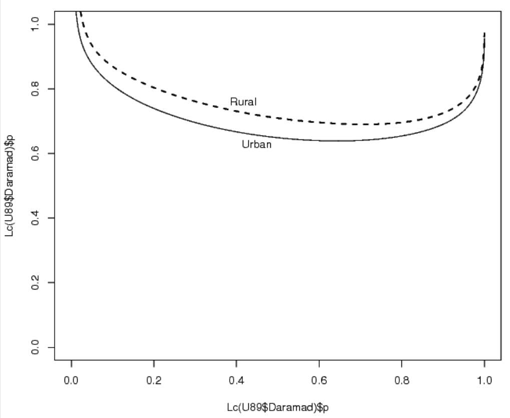
ویژگی‌های مشابه برابر با ۰/۲۲ است. به‌علاوه شاخص زنگا را می‌توان در کنار منحنی زنگا رسم کرد. در نتیجه می‌توان فاصلهٔ نابرابری هر نقطه مانند u را نسبت به میانگین سطح نابرابری، به‌خوبی نمایش داد.

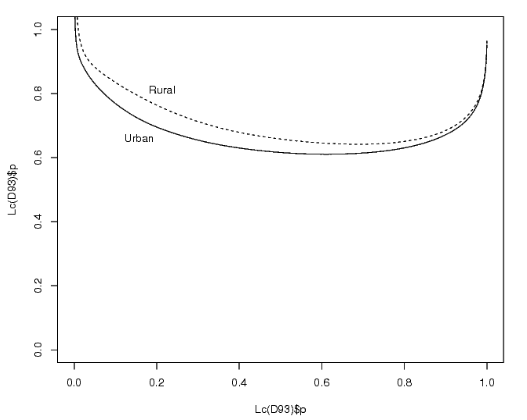
شکل۳ شامل نمودارهای لورنتس، بن فرونی و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی برای داده‌های درآمد خانوار شهری (ممتد) و روستایی (خط چین) (سال ۱۳۸۹ سمت چپ و ۱۳۹۳ سمت راست) است. بررسی منحنی‌های لورنتس داده‌ها در سال‌های مختلف نشان داد که منحنی لورنتس مناطق شهری همواره بالاتر از منحنی لورنتس مناطق روستایی می‌باشد که بیان‌گر عادلانه‌تر بودن توزیع درآمد در این مناطق نسبت به مناطق روستایی است. این روند برای نمودارهای زنگا و بن فرونی نیز مشابه لورنتس است.

با توجه شکل۴ و قضیهٔ ۱۰ می‌توان ادعا کرد که تابع توزیع داده‌های درآمد خانوار شهری و روستایی سال۱۳۹۳ و ۱۳۸۹ متعلق به رده توزیع‌های IFR است زیرا نمودار لورنتس این داده‌ها بالای منحنی لورنتس توزیع نمایی واقع شده‌است. درستی این ادعا به‌وسیلهٔ نمودار نرخ شکست داده‌ها (شکل ۵) نیز تأیید می‌شود. هم‌چنین چون مساحت بالای نمودار زمان کل آزمون قیاسی برابر ضریب جینی است پس در حالتی که میانگین دو داده با هم برابر باشد ضریب جینی داده‌هایی بیش‌تر خواهد بود که در ترتیب زمان کل آزمون کوچک‌تر است، که بیان‌گر این موضوع است که تابع توزیعی که در ترتیب زمان کل آزمون بزرگ‌تر است نابرابری کم‌تری از توزیع دیگر دارد.

جدول ۲. ضریب جینی، ضریب زنگا، زمان کل آزمون قیاسی تجمعی و ضریب بن فرونی برای داده‌های درآمد سال‌های۱۳۹۳-۱۳۸۸

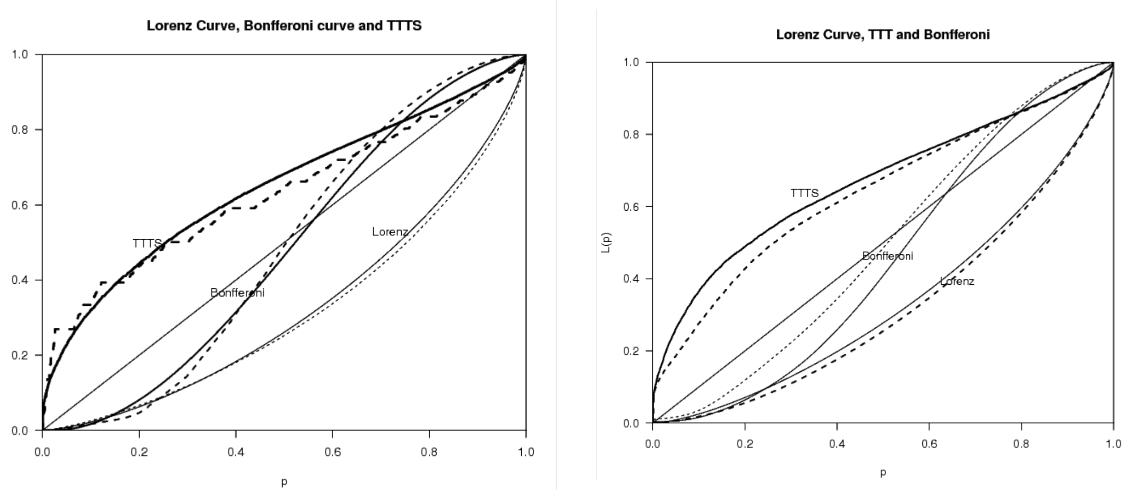
	ضریب زنگا		ضریب جینی		زمان کل آزمون قیاسی تجمعی		ضریب بن‌فرونی	
سال	شهری	روستایی	شهری	روستایی	شهری	روستایی	شهری	روستایی
۱۳۸۸	۰/۷۱	۰/۷۵	۰/۳۶	۰/۴۰	۰/۶۴	۰/۶۰	۰/۴۹	۰/۵۳
۱۳۸۹	۰/۷۱	۰/۷۵	۰/۳۵	۰/۴۰	۰/۶۵	۰/۶۰	۰/۴۹	۰/۵۳
۱۳۹۰	۰/۶۷	۰/۷۱	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۶۸	۰/۶۵	۰/۴۵	۰/۴۹
۱۳۹۱	۰/۶۷	۰/۷۱	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۶۸	۰/۶۵	۰/۴۴	۰/۴۹
۱۳۹۲	۰/۶۷	۰/۷۰	۰/۳۲	۰/۳۴	۰/۶۸	۰/۶۶	۰/۴۸	۰/۴۵
۱۳۹۳	۰/۶۷	۰/۷۲	۰/۳۳	۰/۳۶	۰/۶۷	۰/۶۴	۰/۴۵	۰/۵۰



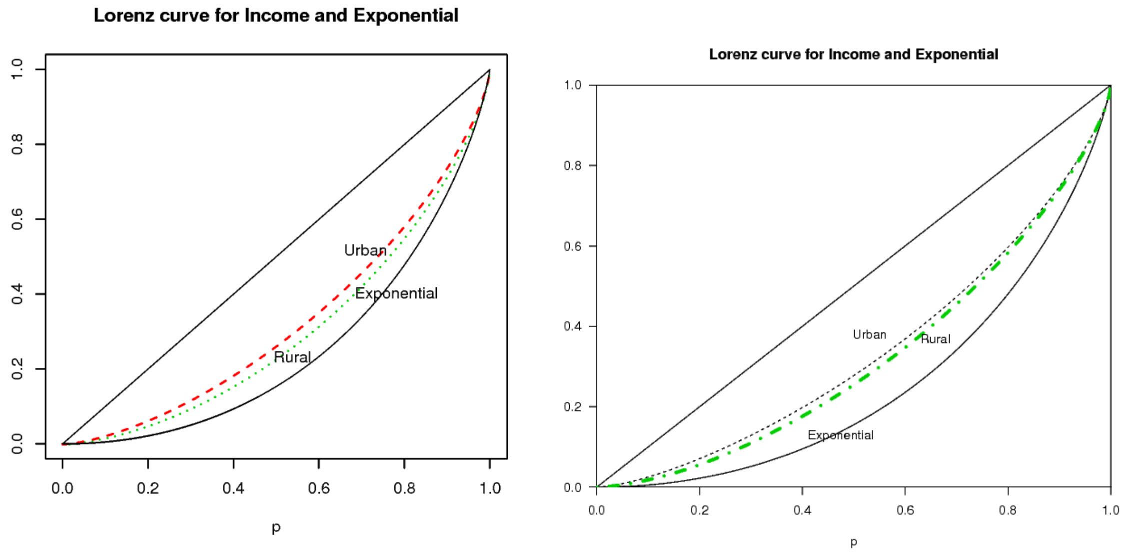


شکل ۲. منحنی زنگا داده‌های درآمد شهری (خط ممتد) و روستایی (خط چین) در سال ۱۳۸۹ (سمت چپ) و۱۳۹۳ (سمت راست)

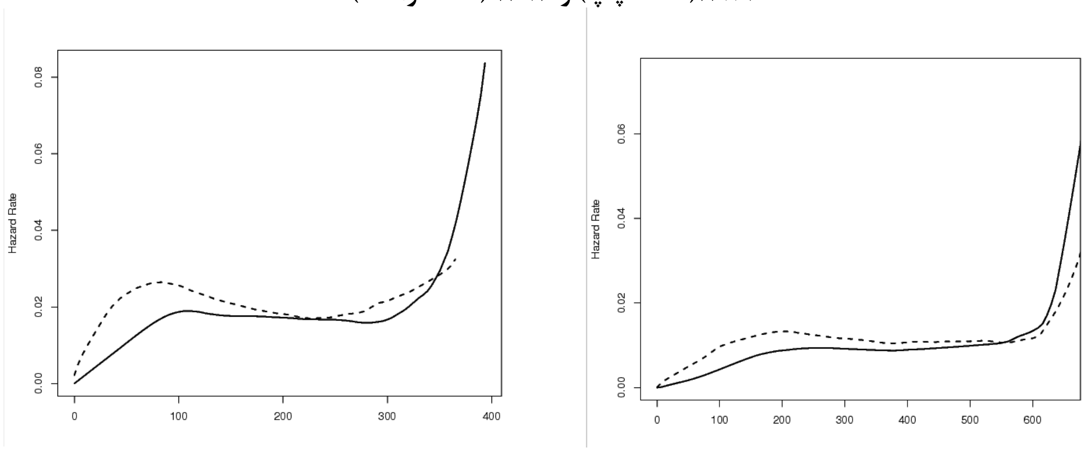
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]



شکل۳. منحنی‌های لورنتس بن فرونی و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی داده های درآمد شهری (خط ممتد) و روستایی (خط چین) در سال‌های ۱۳۸۹(سمت چپ) و ۱۳۹۳ (سمت راست)



شکل ۴. منحنی‌های لورنتس توزیع نمایی استاندارد(خط ممتد) و داده‌های درآمد شهری و روستایی در سال‌های ۱۳۸۹(سمت چپ) و ۱۳۹۳ (سمت راست)



شکل۵: منحنی نرخ شکست داده‌های درآمد شهری (خط ممتد) و روستایی (خط چین) در سال ۱۳۸۹(سمت چپ) و ۱۳۹۳ (سمت راست)

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.6.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.25]

بحث و نتیجه‌گیری

به‌عنوان نتیجهٔ کلی از مقاله حاضر، با توجه به وجوه اشتراک اقتصاد و قابلیت اعتماد، می‌توان گفت: بین شاخص‌های اندازه‌گیری نابرابری اقتصادی و روابط و مفاهیم قابلیت اعتماد رابطهٔ نزدیکی برقرار است. در رابطه با شاخص‌های نابرابری اقتصادی، با وجود این‌که شاخص جینی عمومیت بیش‌تری دارد، اما منعکس کننده واقعیت اختلاف درآمدی و شکاف طبقاتی نیست. این شاخص به تمام سطوح نابرابری وزن یکسان می‌دهد و با توجه به این شاخص نمی‌توان متوجه شد اکثریت جامعه فقیر هستند یا ثروتمند، البته می‌توان با توجه به شاخص‌های دیگری در کنار این شاخص این امر را متوجه شد. شاخص زنگا به خوبی نابرابری درآمدی بین افراد کم درآمد و افراد ثروتمند را نشان می‌دهد. این شاخص، اجباری برای گرفتن مقادیر صفر و یک در نقاط ابتدایی و انتهایی خود ندارد و شکل نموداری آن نیز با توجه به درآمدهای خانوار تغییر می‌کند.

چنان‌که مشاهده شد هر یک از شاخص‌های نابرابری را می‌توان بر اساس مفاهیم قابلیت اعتماد مانند نرخ شکست، میانگین مانده عمر و میانگین گذشته عمر به‌دست آورد و یا برعکس. از طرفی بین ترتیب‌های لورنتس، زنگا، بن فرونی و ترتیب‌های طول عمر مانند ترتیب زمان کل آزمون، ترتیب ستاره، ترتیب محدب و .... نیز روابطی برقرار است برای مثال ترتیب ستاره ترتیب لورنتس را نتیجه می‌دهد. در بخش اعظمی از مقاله مفاهیم سالخوردگی با استفاده از شاخص‌های نابرابری جستجو شدند و بسیاری از رده‌های طول عمر را توانستیم با استفاده از شاخص‌های نابرابری مخصوصاً منحنی لورنتس به‌دست آوریم.

یافتن این روابط بین شاخص‌های اقتصادی و قابلیت اعتماد می‌تواند کمک بزرگی به محققان باشد. برای مثال با در دست داشتن نرخ شکست داده‌ها می توان اطلاعاتی در مورد نابرابری در آن دسته داده یافت و یا بالعکس در صورتی‌که منحنی لورنتس و یا نابرابری داده‌ای مشخص باشد می‌توان حدس زد که به کدام رده طول عمر تعلق دارد.

منابع

1. Arnold B. C., "On Zenga and Bonferroni curves," Metron, 73 (1) (2015) 25-30.
2. Barlow R. E., Campo R. A., "Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis (No. ORC-75-8)", California Univ Berkeley Operations Research Center (1975).
3. Barlow R. E., Proschan F., "Statistical theory of reliability and life testing: probability models}. Florida state univ", Tallahassee (1975).
4. Bonferroni C. E., "Elementi di statistica general", Libreria Seber, Fireze (1930).
5. Chandra, M., Singpurwalla N. D., "Relationships Between Some Notions Which Are Common to Reliability Theory and Economics", Mathematics of Operations Research. 5, 1(1981) 113-121.
6. Dalton H., "The measurement of the inequality of incomes", The Economic Journal, 30(119), (1920) 348-361.
7. Epstein B., Sobel M., "Life testing. Amer. Statst", Assoc. 48 (1953) 486-502.
8. Giorgi G. M., Crescenzi M., "A look at the Bonferroni inequality measure in a reliability framework", Statistica anno LXI, N. 4. (2001) 571-583.

9. Kleiber C., Kotz S., "Statistical size distributions in economics and actuarial sciences", John Wiley (2003).
10. Klefsjo B., "Reliability Interpretations of Some Concepts from Economics", Naval Research Logistics Quarterly, 3 1, 2 (1984) 301-308.
11. Kochar S., Xu M., "Connections between some concepts in reliability and economics," Modeling, Computation and Optimization, 6 (2009) 45.
12. Lorenz M. O., "Methods of measuring the concentration of wealth", Publications of the American statistical association, 9(70) (1905) 209-219.
13. Perez Ocon R., Gamiz Perez M. L., Ruiz Castro J. E., "A study of different ageing classes via total time on test transform and Lorenz curves", Applied stochastic models and data analysis, 13(3 4) (1997) 241-248.
14. Pham T. G., Turkkan N., "The Lorenz and the scaled total time on test transform curves: a unified approach", IEEE Transactions on reliability, 43, 1 (1994) 76-84.
15. Pundir S., Arora S., Jain K., "Bonferroni curve and the related statistical inference", Statistics and probability letters, 75 (2) (2005) 140-150.
16. Sarabia, J. M., Castillo E., Pascual M., Sarabia M., "Mixture Lorenz curves," Economics Letters 89, (2005) 89-94.
17. Shaked M., Shanthikumar J. G., "Stochastic orders," Springer Science and Business Media (2007).
18. Thompson W. A. Jr., "Fisherman's luck," Biometrics, 32 (1976) 265-271.
19. Zenga M., "Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione equantili reddito", Giornale degli economisti Annali di Economia (1984) 301-326.
20. Zenga M., "Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means", Statistica and Applicaziani, (2007) 5.