تحلیل تقارنی لی و تعیین جواب‌های صریح تحلیلی دستگاه معادلات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون

هادی روحانی قهساره*، احمد مجلسی، علی زاغیان؛
دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر، ایران

دریافت ۹۶/۰۶/۲۹ پذیرش ۹۶/۱۱/۲۸

چکیده

در این تحقیق، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با مشتقات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون که توصیف کننده انتشار نامتعارف امواج آب کم عمق است، بررسی شده است. یک روش آنالیز متقارن لی برای تحلیل مدل داده شده است. با محاسبه و استفاده از تبدیلات تشابهی مناسب، دستگاه معادلات مشتقات جزئی کسری زمانی به یک دستگاه معادلات مشتقات معمولی با مشتقات کسری اردلی-کوبر کاهش یافته است. به‌علاوه، روش زیرفضاهای ناوردا برای محاسبه یک دسته از جواب های صریح تحلیلی دستگاه کسری درینفلد-سوکولوف-ویلسون استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات درینفلد-سوکولوف-ویلسون کسری، تحلیل تقارنی لی، تبدیلات تشابهی، روش زیر فضاهای ناوردا

مقدمه

در چند دهۀ اخیر، نظریۀ حسابان(مشتق و انتگرال) کسری[1]، مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران علوم و مهندسی قرار گرفته و پیشرفت‌های چشم‌گیری در مباحث نظری و کاربردی آن انجام شده است [1]، [2]، [3]. هم‌چنین علاقه وافری برای توصیف پدیده‌های غیرخطی و طبیعی با معادلات دیفرانسیل کسری به‌وجود آمده است و بسیاری از پدیده‌های غیرعادی و فرآیندهای پیچیدۀ طبیعی که نظریۀ حسابان کلاسیک برای توصیف آن‌ها ناکارآمد بودند، با استفاده از نظریه حسابان کسری به‌طور دقیق قابل پیکربندی ریاضی هستند. در واقع نظریۀ حسابان کسری ابزاری قدرتمند برای توصیف ویژگی‌های موروثی و حافظۀ ذاتی پدیده‌های غیرعادی در طبیعت است. به‌طور ویژه، کارایی این نظریه در توصیف پدیده‌های نفوذ، انتشار و انتقال، نسبت به موارد مشابه که با معادلات دیفرانسیل کلاسیک فرمول‌بندی شده‌اند، تأیید شده است [4]، [5]. حل دقیق معادلات دیفرانسیل مرتبۀ کسری کاری سخت و در اغلب موارد غیر ممکن است، از این رو، در سال‌های اخیر توجه محققان به توسعۀ و اجرای روش‌های نیمه تحلیلی و عددی برای حل تقریبی این مسائل معطوف شده است [6]-[11]. یک ردۀ مهم از روش‌ها برای تحلیل مسائل مشتقات کسری، روش‌های مبتنی بر نظریۀ گروه‌های لی[2] هستند. در ابتدای قرن نوزدهم میلادی ریاضی‌دان نروژی سوفوس لی [3]روش تحلیل تقارنی لی را ابداع کرد که بعدها شاگردانش دنبال کردند [12]. در این روش با استفاده از تقارن‌های نقطه‌ای لی می‌توان جواب‌های ناوردای گروهی برای معادلات دیفرانسیل را به‌دست آورد. هم‌چنین می‌توان با کاهش

*نویسنده مسئول roohani@mut-es.ac.ir

1, Fractional Calculus
2, Lie group theory
3, Sophos Lie

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.6.3]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

مرتبهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ کسری، آن‌ها را به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ کسری تبدیل کرد. تعمیم روش لی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ صحیح به مرتبهٔ کسری کار ساده‌ای نیست و نیازمند تعمیم مفهوم تطویل[۱] برای عملگرهای مشتقات کسری است، که برای مشتق مرتبهٔ کسری ریمان-لیوویل این کار را گزیزف[۲] و همکارانش [13] معرفی و برای حل مسئله انتشار غیرخطی مرتبهٔ کسری زمانی به‌کار گرفته شد. به تازگی هاشمی و همکارانش به‌روشی دیگر، این فرمول را به‌دست آوردند و انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را با آن بررسی کردند [14]. طی سال جاری، سینگلا[۳] و گوپتا[۴] این روش را برای کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ کسری زمانی و هم‌چنین مرتبهٔ کسری زمانی- مکانی گسترش دادند [15]. در این تحقیق تلاش می‌شود روش اخیر معرفی شده به‌وسیلهٔ سینگلا و گوپتا برای بررسی و تحلیل تقارن‌های لی دستگاه معادلات درینفلد-سوکولوف- ویلسون[۵] مرتبه کسری زمانی، که به‌تازگی ساها-ری[۶] و همکارش برای توصیف پدیده انتشار نامتعارف امواج آب در محیط‌های کم‌عمق معرفی کرده‌اند [16]، پیاده‌سازی و اجرا شود. دستگاه کلاسیک درینفلد-سوکولوف- ویلسون (DSW) بدین‌صورت تعریف می شود [17]، [18]، [19]:

$$\begin{aligned} &u_t + pvv_x = 0 \\ &v_t + qv_{xxx} + svu_x + ruv_x = 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن p,q,r,s ثابت‌هایی ناصفرند. هیروتا[۷] و همکارانش، ساختار سولیتونی[۸] دستگاه به‌ازای $p=3, q=2, s=1, r=2$ را با استفاده از یک روش جبری بررسی کردند [20]. فان[۹] با استفاده از روش تعمیم یافته و اصلاح شده بسط توابع ژاکوبی، یک دسته از جواب‌های تحلیلی برای دستگاه (۱) ارائه کرد [21]. به‌نظر می‌رسد که اولین بار و به‌تازگی ساها-ری و همکارانش دستگاه معادلات (DSW) با مشتق زمانی مرتبه کسری را بدین‌صورت معرفی کردند [16]:

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha} u + pvv_x = 0 \\ &D_t^{\alpha} v + qv_{xxx} + ruv_x + svu_x = 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن p,q,r,s پارمترهای ناصفرند و D_t^{α} بیانگر عملگر مشتق جزئی کسری ریمان- لیوویل[۱۰] مرتبهٔ $0<\alpha\le 1$ نسبت به متغیر زمانی t است که در حالت کلی بدین‌صورت تعریف می‌شود:

(۳)

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}(u(x,t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(x,s)\,ds & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}, \\ \dfrac{\partial^n}{\partial t^n}(u(x,s)) & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

که در آن $\Gamma(a)$ تابع گاما است و بدین‌صورت تعریف می شود:

1. Prolongation
2. Gazizov
3. Singla
4. Gupta
5. Drinfeld-Sokolov-Wilson (DSW)
6. Saha Ray
7. Hirota
8. Soliton
9. Fan
10. Riemann-Liouville fractional

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.6.3]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} t^{a-1}$$

دستگاه معادلات مرتبه کسری غیرخطی مذکور یک مدل ریاضی مهم برای توصیف و پیش‌بینی رفتار پدیده انتشار نامتعارف امواج آب‌های سطحی در محیط‌های کم‌عمق است. به‌دلیل کاربرد گسترده و اهمیت زیاد این معادلات، در سال‌های اخیر تحقیقات مهمی پیرامون آن انجام گرفته شده است. داوسون[1] و همکارانش [22] با استفاده از روش گالرکین به‌طوری عددی معادله (DSW) را حل کردند. هم‌چنین ماتجیلا[2] و همکارانش قوانین پایستاری آن را به‌دست آوردند [23]. ساها-ری و همکارش با به‌کارگیری روشی نسبتاً تحلیلی جدید جواب متناوب دوگانه برای معادلات کسری زمانی DSW ارائه کردند [16]. در این مقاله از ایده‌های تعمیم یافته آنالیز تقارنی لی[3] برای محاسبه تقارن‌های نقطه‌ای لی و تبدیلات تشابهی مدل استفاده شده و تلاش می‌شود دستگاه حاکم (۲،۱) به‌صورت دستگاه معادلات معمولی مرتبه کسری کاهش داده شود.

از دیگر روش‌های تحلیلی کارا و قدرتمند برای بررسی تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی و پیچیده روش موسوم به زیرفضای ناوردا[4] است. ایدۀ روش زیرفضای ناوردا را گالکتینف[5] و همکارانش برای معادلات دیفرانسیل جزئی جزئی معرفی کردند [24]. به‌تازگی گزیزف و همکارانش [25] آن را برای حل معادلات جزئی غیرخطی با مشتق زمانی مرتبه کسری تعمیم دادند. اخیراً نیز ساهادوان[6] و همکارش این روش را برای به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی دستگاه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتق زمانی مرتبه کسری تعمیم دادند [26]. در این تحقیق روش زیرفضای ناوردا تعمیم‌یافته برای مسائل مشتقات کسری برای یافتن یک دسته از جواب‌های صریح تحلیلی دستگاه (۲) پیاده‌سازی و اجرا خواهد شد.

آنالیز تقارنی لی برای دستگاه کسری زمانی درینفلد–سوکولوف– ویلسون

در این بخش ابتدا ایدۀ روش آنالیز تقارن لی تعمیم یافته برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری زمانی بیان می‌شود. سپس روش معرفی شده برای آنالیز تقارنی لی، دستگاه (DSW) پیاده‌سازی و اجرا و در نهایت یک صورت کاهش یافته از مدل با استفاده از تبدیلات تشابهی متقارن ارائه خواهد شد.

۱. بیان مقدمات روش آنالیز تقارنی لی برای دستگاه معادلات کسری زمانی

در این بخش روش آنالیز تقارنی لی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری زمانی در حالت کلی شرح داده می‌شود. برای این منظور فرض کنید $u(x,t)$ و $v(x,t)$ متغیرهای وابسته و جواب‌های دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی زیر باشند:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - F(x,t,u,u_x,u_{2x},\ldots,v_x,v_{2x},\ldots) = 0 \qquad (۴)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - H(x,t,u,u_x,u_{2x},\ldots,v_x,v_{2x},\ldots) = 0$$

1 Dawson
2 Matjila
3 Lie symmetry analysis
4 Invariant subspace method
5 Galaktionov, V.A
6 R. Sahadevan

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.6.3]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

که در آن $\alpha > 0$ و $u_{ix} = \dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}$ و $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ به‌ترتیب مشتق مرتبهٔ iام نسبت به x و مشتق جزئی ریمان-لیوویل از مرتبهٔ کسری α نسبت به t را نشان می‌دهد. G را یک گروه تقارنی لی یک پارامتری از تبدیلات پیوسته زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned}
x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u,v) + O(\varepsilon^2),\\
t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,u,v) + O(\varepsilon^2),\\
u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u,v) + O(\varepsilon^2),\\
v^* &= v + \varepsilon\phi(x,t,u,v) + O(\varepsilon^2),\\
\frac{\partial^\alpha u^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\eta^{\alpha,t} + O(\varepsilon^2),\\
\frac{\partial^\alpha v^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\phi^{\alpha,t} + O(\varepsilon^2),\\
\frac{\partial^j u^*}{\partial x^{*j}} &= \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + \varepsilon\eta^{j,x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,3,\\
\frac{\partial^j v^*}{\partial x^{*j}} &= \frac{\partial^j v}{\partial x^j} + \varepsilon\phi^{j,x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن ξ,η,ϕ,τ توابع بینهایت کوچک[۱] و $\phi^{\alpha,t},\eta^{\alpha,t}$ بینهایت کوچک‌های تعمیم یافته[۲] از مرتبهٔ α و η^{jx},ϕ^{jx} بینهایت کوچک‌های تعمیم یافته از مرتبهٔ j هستند. اکنون فرض کنید دستگاه (۴) تحت تبدیلات گروه G ناوردا باشد و V مولد تقارنی بینهایت کوچک نظیر آن بدین‌صورت تعریف شده باشد:

$$V = \xi(x,t,u,v)\partial_x + \tau(x,t,u,v)\partial_t + \eta(x,t,u,v)\partial_u + \phi(x,t,u,v)\partial_v \tag{۶}$$

بنا به تعریف $\eta^{\alpha,t}$ بدین‌صورت تعریف می شود [15]:

$$\eta^{\alpha,t} = D_t^\alpha\eta + \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) + D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u), \tag{۷}$$

که به‌دلیل نادرستی قاعده لایبنیتز [27] و قواعد زنجیری [28] در حسابان کسری، برای محاسبهٔ $\eta^{\alpha,t}$ از قواعد تعمیم یافته مشتقات زنجیری و لایبنیتز برای مشتقات کسری استفاده کرده و داریم [15]:

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha,t} = {}& \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha D_t(\tau))\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u\frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + (\eta_v\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - v\frac{\partial^\alpha \eta_v}{\partial t^\alpha} + \mu_1 + \mu_2)\\
& + \sum_{i=1}^{\infty}[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^i \eta_u}{\partial t^i} - \binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)]D_t^{\alpha-i}(u)\\
& + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^i \eta_v}{\partial t^i}D_t^{\alpha-i}(v) - \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^i(\xi)D_t^{\alpha-i}(u_x)
\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن

$$\mu_1 = \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s u^s\frac{\partial^j(u^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial u^r},$$

1. Infinitesimals
2. Extended infinitesimals

$$\mu_2=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s v^s\frac{\partial^j(v^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial v^r},$$

هرگاه η بر حسب u,v خطی باشد چون μ_1,μ_2 شامل مشتقات مرتبه دوم و مراتب بالاتر u,v هستند μ_1,μ_2 صفر می‌شوند. به‌طور مشابه $\phi^{\alpha,t}$ بدین‌صورت محاسبه می شوند:

$$\phi^{\alpha,t}=\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial t^\alpha}+(\phi_v-\alpha D_t(\tau))\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}-v\frac{\partial^\alpha\phi_v}{\partial t^\alpha}+(\phi_u\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-u\frac{\partial^\alpha\phi_u}{\partial t^\alpha})-\sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^i(\xi)D_t^{\alpha-i}(v_x)$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^i\phi_v}{\partial t^i}-\binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)]D_t^{\alpha-i}(v)+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^i\phi_u}{\partial t^i}D_t^{\alpha-i}(u)+\mu_3+\mu_4 \qquad (۹)$$

که در آن

$$\mu_3=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s u^s\frac{\partial^j(u^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial u^r},$$
$$\mu_4=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s v^s\frac{\partial^j(v^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial v^r},$$

هم‌چنین وقتی ϕ بر حسب u,v خطی باشد آن‌گاه μ_3,μ_4 صفر می‌شوند. عملگرهای بینهایت کوچک‌های تعمیم یافته η^{jx},ϕ^x و η^x نیز بدین‌صورت تعریف می‌شوند.

$$\eta^{jx}=D_x(\eta^{(j-1)x})-u_{(j-1)x,t}D_x(\tau)-u_{jx}D_x(\xi),\quad j=2,3,\ldots \qquad (۱۰)$$
$$\phi^{jx}=D_x(\phi^{(j-1)x})-u_{(j-1)x,t}D_x(\tau)-u_{jx}D_x(\xi),\quad j=2,3,\ldots$$

که در آن D_x نشانگر عملگر مشتق کل[1] است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+\cdots+v_x\frac{\partial}{\partial v}+v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x}+\cdots. \qquad (۱۱)$$

محک ناوردایی برای معادلات دستگاه (۴) بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$Pr^{\alpha,m_1,n_1}V(\Delta_1)|_{\Delta_1=0,\Delta_2=0}=0, \qquad (۱۲)$$
$$Pr^{\alpha,m_2,n_2}V(\Delta_2)|_{\Delta_1=0,\Delta_2=0}=0,$$

که در آن

$$Pr^{\alpha,m,n}V=V+\eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial u_t^{(\beta)}}+\eta^{1,x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\cdots+\eta^{m,x}\frac{\partial}{\partial u_{mx}}$$
$$+\phi^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial v_t^{(\alpha)}}+\phi^{1,x}\frac{\partial}{\partial v_x}+\cdots+\phi^{n,x}\frac{\partial}{\partial v_{nx}}.$$

با توجه به مطالب فوق مولد تقارنی محاسبه خواهد شد. در بخش بعد ایدۀ معرفی شده در بالا جهت تحلیل تقارنی لی مسئلۀ (۲) اجرا خواهد شد.

۲-۲. تحلیل تقارنی و تبدیلات تشابهی مسئلۀ (۲)

بنابر ایدۀ آنالیز تقارنی لی فرض می‌شود که دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی و کسری (۲) تحت تبدیلات

1. Total derivative operator

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.6.3]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

گروه G معرفی شده در (۵) ناوردا باشد، از این رو، با محاسبهٔ تطویل‌های مناسب (۱۲)، یعنی $Pr^{\alpha,0,1}V\ (\Delta1)$ و $Pr^{\alpha,1,3}V\ (\Delta2)$، داریم:

$$[\eta^{\alpha,t}+p(v\phi^x+\phi v_x)]_{\Delta_1=0,\Delta_2=0}=0, \qquad (۱۳)$$
$$[\phi^{\alpha,t}+q\phi^{xxx}+r(u\phi^x+\eta v_x)+s(v\eta^x+\phi u_x)]_{\Delta_1=0,\Delta_2=0}=0.$$

در ادامه با جای‌گذاری مقادیر متناظر عملگرهای $\phi^x,\phi^{\alpha,t},\eta^{\alpha,t},\phi^{xxx}$ و η^x معرفی شده در روابط (۷)-(۱۱) در دستهٔ معادلات (۱۲) و معادل صفر قرار دادن ضرائب جملات شامل توان‌های متغیرهای وابسته u و v و مشتقات آن‌ها دسته‌ای از معادلات با مشتقات جزئی کسری و کلاسیک بر حسب τ,η,ϕ و ξ به‌دست می‌آید. از حل هم‌زمان این دسته از معادلات مقادیر عمومی بینهایت کوچک‌های τ,η,ϕ و ξ بدین‌صوت محاسبه شده‌اند:

$$\xi=a+c\alpha x,\quad \tau=b+3ct,\quad \eta=-2\alpha uc,\quad \phi=-2\alpha cv, \qquad (۱۴)$$

که در آن a,b و c پارامترهای ثابت و دلخواه هستند. از طرفی با توجه به این که کران پایین انتگرال‌گیری عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل مقدار ثابت است، از این رو، برای تضمین ناوردایی دستگاه تحت تبدیلات (۵) این شرط باید برقرار باشد:

$$\tau(x,t,u,v)|_{t=0}=0,$$

بنابراین از روابط (۱۲) نتیجه می‌شود، $b=0$. در نتیجه به‌ترتیب با فرض $\{a=1,c=0\}$ و $\{a=0,c=1\}$ دو دسته از مولدهای بینهایت کوچک با توجه به رابطهٔ (۶) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$V_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad V_2=\alpha x\,\frac{\partial}{\partial x}+3t\,\frac{\partial}{\partial t}-2\alpha u\,\frac{\partial}{\partial u}-2\alpha v\,\frac{\partial}{\partial v} \qquad (۱۵)$$
$$[V_1,V_2]=[V_2,V_2]=0,\qquad [V_2,V_1]=-\alpha V_1=-[V_1,V_2] \qquad (۱۶)$$

در ادامه برای کاهش مرتبهٔ دستگاه معادلات (۲)، تبدیلات تشابهی به‌ازای هریک از میدان‌های برداری مذکور محاسبه می‌شود.

حالت۱: به‌ازای میدان برداری $V_1=\frac{\partial}{\partial x}$، معادلهٔ مشخصه نظیر آن بدین‌صورت است:

$$\frac{dt}{0}=\frac{dx}{1}=\frac{du}{0}=\frac{dv}{0}$$

از اینرو، داریم، $v(x,t)=h(t)$ و $u(x,t)=f(t)$ ، به‌طوری‌که $f(t)$ و $h(t)$ توابع دلخواه و وابسته به زمان هستند، با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$\partial_t^\alpha h(t)=0,\qquad \partial_t^\alpha f(t)=0$$

از حل معادلات فوق به‌کمک تبدیل لاپلاس، جواب ناوردای زیر را برای دستگاه (۲) به‌دست می‌آید:

$$f(t)=\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1},\quad h(t)=\frac{k_2}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \qquad (۱۷)$$

که در آن k_1,k_2 پارمترهای ثابت است.

حالت۲: اگر میدان برداری V_2 را بردار مولد بینهایت کوچک در نظر بگیریم آن‌گاه معادلات مشخصه نظیرش عبارت است از:

$$\frac{dx}{\alpha x}=\frac{dt}{3t}=\frac{du}{-2\alpha u}=\frac{dv}{-2\alpha v}$$

که از آن $z=xt^{-\frac{\alpha}{3}}$ به عنوان متغیر مستقل جدید و

$$u(x,t)=t^{-\frac{2\alpha}{3}}F(z),\qquad v(x,t)=t^{-\frac{2\alpha}{3}}h(z) \tag{۱۸}$$

به‌عنوان متغیرهای وابسته جدید به‌دست می‌آیند که آن‌ها را تبدیل‌های تشابهی نیز می‌نامند. اکنون قبل از بررسی کاهش مرتبه دستگاه، عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی اردلی-کوبر[1] معرفی می‌شوند [29]، [30] که دستگاه معادلات (۲) پس از کاهش مرتبه بر حسب این عملگرها بیان می‌شوند.

تعریف ۲.۱ *برای هر* $\alpha, z>0$ *عملگر دیفرانسیل کسری* $(P_{\varsigma}^{\rho,\alpha})$ *اردلی-کوبر بدین‌صورت تعریف می‌شود:*

$$(P_{\varsigma}^{\rho,\alpha}H)(z)=\prod_{j=0}^{m-1}\left(\rho+j-\frac{1}{\varsigma}z\frac{d}{dz}\right)(K_{\varsigma}^{\rho+\alpha,m-\alpha}H)(z), \tag{۱۹}$$

و $m=\begin{cases}[\alpha]+1 & \text{if } \alpha\notin\mathbb{N},\\ \alpha & \text{if } \alpha\in\mathbb{N},\end{cases}$

که در آن $(K_{\varsigma}^{\rho,\alpha}H)(z)$ عملگر انتگرالی اردلی -کوبر است[31]:

$$(K_{\varsigma}^{\rho,\alpha}H)(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^{\infty}(\iota-1)^{\alpha-1}\iota^{-(\rho+\alpha)}H(z\iota^{\frac{1}{\varsigma}})d\iota & \text{if } \alpha>0\\ H(z) & \text{if } \alpha=0\end{cases} \tag{۲۰}$$

قضیهٔ زیر روند کاهش مرتبه دستگاه معادلات (۲) را با توجه به تبدیلات تشابهی (۱۸) بیان می‌کند.

قضیه ۲.۲ *به کمک تبدیل‌های تشابهی* $u(x,t)=t^{-\frac{2\alpha}{3}}F(z), v(x,t)=t^{-\frac{2\alpha}{3}}h(z)$ *و متغیر تشابهی* $z=xt^{-\frac{\alpha}{3}}$ دستگاه معادلات (۲) به این دستگاه تبدیل می‌شود.

$$(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3},\alpha})(z)=-ph(z)h'(z)$$

$$(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3},\alpha})(z)=-qh'''(z)-sh(z)F'(z)-rF(z)h'(z) \tag{۲۱}$$

که در آن $(P_{\varsigma}^{\rho,\alpha})$ در تعریف (۲) معرفی شده است.

برهان: به‌سادگی مشاهده می‌شود که مشتق مرتبهٔ α ریمان-لیوویل (۳) تابع $u(x,t)$ به‌ازای تبدیل تشابهی $u(x,t)=t^{\frac{-2\alpha}{3}}F(xt^{\frac{-\alpha}{3}})$ بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}s^{-\frac{2\alpha}{3}}F(xs^{-\frac{\alpha}{3}})ds\right],$$

با تغییر متغیر $\iota=\dfrac{t}{s}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{t^{n-\frac{5}{3}\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^{\infty}(\iota-1)^{n-\alpha-1}\iota^{-(n-\frac{5\alpha}{3}+1)}F(z\iota^{\frac{\alpha}{3}})d\iota\right], \tag{۲۲}$$

1. Erdelyi-Kober

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.6.3]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

اکنون با تطبیق (۲۲) با رابطهٔ (۲۰) می‌توانیم $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ را بدین‌صورت بر حسب عملگر انتگرالی اردلی-کوبر بیان کرد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^n}{\partial t^n}[t^{n-\frac{5}{3}\alpha}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)]. \qquad (۲۳)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}[t^{n-\frac{5}{3}\alpha}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)])\\
&=[(n-\frac{5}{3}\alpha)t^{n-\frac{5}{3}\alpha-1}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)+t^{n-\frac{5}{3}\alpha}\frac{d}{dz}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)\frac{\partial z}{\partial t}]\\
&=[t^{n-\frac{5}{3}\alpha-1}(n-\frac{5}{3}\alpha+t\frac{\partial z}{\partial t}\frac{d}{dz})(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)]\\
&=[t^{n-\frac{5}{3}\alpha-1}(n-\frac{5}{3}\alpha-\frac{\alpha}{3}z\frac{\partial}{\partial z}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)].\end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطهٔ بالا می‌توان رابطهٔ (۲۳) را بدین‌صورت نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}&=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\frac{\partial}{\partial t}[t^{n-\frac{5}{3}\alpha}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)])\\
&=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[t^{n-\frac{5}{3}\alpha-1}(n-\frac{5}{3}\alpha-\frac{\alpha}{3}z\frac{\partial}{\partial z}(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)].\end{aligned}$$

این فرآیند را می‌توان n بار تکرار کرد تا عبارت سمت راست تساوی بالا بدین‌صورت به‌دست آید که مشابهت زیادی با عملگر دیفرانسیلی اردلی کوبر دارد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=[t^{-\frac{5}{3}\alpha}(\prod_{j=0}^{n-1}(1-\frac{5}{3}\alpha+j-\frac{\alpha}{3}z\frac{d}{dz}))(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3},n-\alpha}F)(z)]=t^{-\frac{5}{3}\alpha}(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3},\alpha}F)(z).$$

تساوی آخر با توجه به تطبیق عبارت سمت راست با عملگر دیفرانسیلی اردلی-کوبر حاصل شده است. به‌طور مشابه، می توان رابطهٔ (۲۴) را برای $\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}$ به‌دست آورد.

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}=t^{-\frac{5}{3}\alpha}(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{5\alpha}{3},\alpha}h)(z). \qquad (۲۴)$$

اگر α یک عدد صحیح مثبت باشد برای $z=xt^{-\frac{n}{3}}$ که $n=1,2,3,\ldots$ این روابط را می‌توان به‌دست آورد:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^n u}{\partial t^n}[t^{-\frac{2n}{3}}F(z)]=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[\frac{\partial}{\partial t}(t^{-\frac{2n}{3}}F(z))]=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[t^{-\frac{2n}{3}-1}(-\frac{2n}{3}-\frac{n}{3}z\frac{d}{dz})F(z)] \qquad (۲۵)$$

و بعد از n بار تکرار، رابطه بالا می‌تواند بدین‌صورت نوشته شود:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=t^{-\frac{5}{3}n}\prod_{j=0}^{n-1}(1-\frac{5}{3}n+j-\frac{n}{3}z\frac{d}{dz})F(z)=t^{-\frac{5}{3}n}(P_{\frac{3}{n}}^{1-\frac{5n}{3},n}F)(z), \qquad (۲۶)$$

به‌طور مشابه برای $\alpha=n=1,2,3,\ldots$ داریم:

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = t^{\frac{-5n}{3}} (P_{\frac{3}{n}}^{1-\frac{5n}{3},n} h)(z). \qquad (۲۷)$$

بنابراین روابط (۲۵) و (۲۶) به‌ازای هر α که $n-1<\alpha \le n$ برقرار است. در نهایت با جای‌گذاری تبدیلات تشابهی $u(x,t)=t^{\frac{-2\alpha}{3}}F(z)$ و $v(x,t)=t^{\frac{-2\alpha}{3}}h(z)$ در دستگاه (۲) و استفاده از روابط (۲۶) و (۲۷) قضیه ثابت می‌شود.

چنان‌که مشاهده شد با استفاده از تبدیلات تشابهی دستگاه معادلات جزئی (۲) با یک واحد کاهش مرتبه به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی کسری با عملگر اردلی-کوبر (۲۱) تبدیل شد.

روش زیر فضای ناوردا و یافتن جواب دقیق

در این بخش روش زیرفضای ناوردا برای محاسبهٔ یک دسته جواب‌های صریح و تحلیلی دستگاه معادلات (۲) بررسی و اجرا می‌شود. برای این منظور ابتدا ایده روش برای حل تحلیلی دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی که اخیراً معرفی شده است [26] به‌طور مختصر بیان می‌شود. برای این منظور دستگاه معادلات جزئی کسری زمانی (۲۸) را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} = G_1[x,u_1,u_2,...,u_1^{(k_1)},u_2^{(k_2)}] \qquad (۲۸)$$
$$\frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} = G_2[x,u_1,u_2,...,u_1^{(k_1)},u_2^{(k_2)}]$$

که در آن $\frac{\partial(.)}{\partial t^\alpha}$ مشتق مرتبهٔ αام ریمان-لیوویل و G_1,G_2 توابع به‌قدر کافی هموار و به‌ترتیب از مرتبهٔ k_2 و k_1 نسبت به متغیرهای وابسته u_2 و u_1 و با فرض $(k_1 \ge k_2)$ بوده است که در این شرط‌ها صدق می‌کنند:

$$(\frac{\partial G_1}{\partial u_1^{(k_1)}})^2 + (\frac{\partial G_1}{\partial u_2^{(k_1)}})^2 \ne 0$$
$$(\frac{\partial G_2}{\partial u_1^{(k_2)}})^2 + (\frac{\partial G_2}{\partial u_2^{(k_2)}})^2 \ne 0. \qquad (۲۹)$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} (\frac{\partial G_1}{\partial u_2^{(i)}})^2 \ne 0,$$
$$\sum_{i=1}^{k_2} (\frac{\partial G_2}{\partial u_1^{(i)}})^2 \ne 0. \qquad (۳۰)$$

برای بعضی از $j \in \{1,2\}$ داریم:

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial u_1^{(l)} \partial u_2^{(s)}} \ne 0 \quad l,s \in \{0,1,2,..,k_j\} \qquad (۳۱)$$

در ادامه از نمادهای $u_j(x,t)=u_j,\ j=1,2$ و $u_j^{(q)} = \frac{\partial^q u_j(x,t)}{\partial x^q}$ برای $q=1,2,...,k_j$ استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۱ [32]. *یک فضای خطی با بعد متناهی W_n نسبت به عملگر دیفرانسیلی G ناوردا گفته می‌شود هرگاه $G[W_n] \subseteq W_n$ یا به‌عبارتی دیگر، برای هر $u \in W_n$ داشته باشیم $F[u] \in W_n$.*

فرض کنید $j=1,2$ ، $W^j_{n_j}$ فضای خطی تولید شده به‌وسیلهٔ توابع مستقل خطی $\{f_i^j(x)\,|\,1\le i\le n_j, j=1,2\}$ باشد و $(j=1,2)$ $W^j_{n_j}$ نسبت به عملگر دیفرانسیلی ($G_j[u_1,u_2]$ $(j=1,2)$ ناوردا باشد و برای هر $j=1,2$ و $i=1,2,\dots,n_j$ مشتق $D_t^\alpha f_i^j(t)$ وجود داشته باشد و برای $(u_1,u_2)\in W^1_{n_1}\times W^2_{n_2}$ ، بسط $G_j[u_1,u_2]$ بدین‌صورت باشد:

$$G_j[\sum_{i=1}^{n_1}a_i^1 f_i^1(x),\sum_{i=1}^{n_2}a_i^2 f_i^2(x)]=\sum_{i=1}^{n_j}\phi_i^j(a_1^1,\dots,a_{n_1}^1,a_1^2,\dots,a_{n_2}^2)f_i^j(x) \qquad (۳۲)$$

آن‌گاه دستگاه (۲۸) دارای جواب دقیقی بدین‌صورت است:

$$u_j(x,t)=\sum_{i=1}^{n_j}a_i^j(t)f_i^j(x) \qquad j=1,2 \qquad (۳۳)$$

که در آن توابع $a_i^j(t)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۳۴) صدق می کنند [34]:

$$\frac{d^\alpha a_i^j(t)}{dt^\alpha}=\phi_i^j(a_1^1(t),\dots,a_{n_1}^1(t),a_1^2(t),\dots,a_{n_2}^2(t)) \quad i=1,2,\dots,n_j \qquad (۳۴)$$

در ادامه فرض کنید فضای ناوردای $W^j_{n_j}=\mathcal{L}\{f_1^j(x),\dots,f_{n_j}^j(x)\}$ توسط جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n_j زیر تولید شده باشد:

$$\mathcal{L}[y_j]=y_j^{(n_j)}+a_{n_j}^j(x)y_j^{(n_j-1)}+\dots+a_2^j(x)y_j^1+a_1^j(x)y_j=0 \quad j=1,2 \qquad (۳۵)$$

در این صورت برای آن‌که زیر فضای W نسبت به عملگر دیفرانسیل برداری G ناوردا باشد باید داشته باشیم:

$$\mathcal{L}_j[G_j[u_1,u_2]]|_{[H_1]\cap[H_2]}=0 \quad j=1,2 \qquad (۳۶)$$

که در آن $[H_j]$ نشان‌دهندهٔ معادلهٔ $\mathcal{L}_j[u_j]=0$ و نتایج دیفرانسیلی آن نسبت به x است.

از طرفی برآورد بیش‌ترین بعد[1] از زیر فضاهای ناوردا، نقش مهمی در این روش دارد و به‌کمک آن می‌توانیم یک رده‌بندی کامل از زیر فضای‌های ناوردا و متناظر با آن‌ها جواب دقیق معادلات مورد نظر را به‌دست آوریم. این برآورد به شرط ناوردایی (۳۶) بستگی دارد و در قضیهٔ ۲. ۳ ارائه شده است:

قضیه ۳.۲ [33] *فرض کنید $G=(G_1,G_2)$ یک عملگر برداری باشد که شرایط (۲۹)-(۳۱)) را برآورد می‌کند و اگر $k_1\ge k_2$ $W^1_{n_1}\times W^2_{n_2}$ $(n_1\ge n_2>0)$ نسبت به عملگر G ناوردا باشد، آنگاه*

$$n_1-n_2\le k_2 \quad , \quad n_1\le 2(k_1+k_2)+1$$

قضیه ۳.۳ [33] *فرض کنید $G_2\in G$ یک عملگر دیفرانسیلی غیر خطی و G یک دستگاه معادلات مشابه (۲۸) باشد. بدون آنکه خللی به عمومیت مسئله وارد شود فرض می کنیم. $k_1\ge k_2$ اگر $W^1_{n_1}\times W^2_{n_2}$ $(n_1\ge n_2>0)$ نسبت به عملگر G ناوردا باشد، آن‌گاه*

$$n_2\le 2(k_1+k_2)+1,\quad n_2-n_1\le k_1.$$

اکنون از روش معرفی شده در بالا برای حل تحلیلی دستگاه معادلات (۲) استفاده می‌شود، برای این منظور با توجه به

1. maximal dimension

[DOI: 10.29252/mmr.4.2.185]

مطالب مذکور مؤلفه‌های دستگاه (۲) را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$G_1 = -qv_{3x} - svu_x - ruv_x$$
$$G_2 = -pvv_x \qquad (10.3)$$

که در آن $k_2 = 1, k_1 = 3$. در ادامه مشاهده می‌شود که عملگرهای G_1 و G_2 در شرایط (۲۹)-(۳۱) صدق می‌کنند، زیرا:

$$(\frac{\partial G_1}{\partial v_{3x}})^2 + (\frac{\partial G_1}{\partial u_{3x}})^2 = (-q)^2 + (0)^2 \neq 0,$$
$$(\frac{\partial G_2}{\partial v_x})^2 + (\frac{\partial G_2}{\partial u_x})^2 = (-pv)^2 + (0)^2 \neq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial G_1}{\partial u_{ix}})^2 = (-sv)^2 + (0)^2 + (0)^2 \neq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{1}(\frac{\partial G_2}{\partial v_{ix}})^2 = (-pv)^2 \neq 0,$$
$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial u \partial v_x} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial G_2}{\partial v_x}) = -r \neq 0$$

بنابراین زیر فضایی مثل $W = W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$ چنان موجود است که تحت $G = [G_1, G_2]$ ناوردا است، به‌طوری‌که $n_1 \leq 9$ و $n_1 - n_2 \leq 1$ بنابراین ابعاد $W_{n_1}^1 \times W_{n_2}^2$ می‌توانند به‌صورت زوج های مرتب زیر داده شوند:

$$(n_1, n_2) = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), \ldots, (9,8), (9,9)\}$$

به‌عنوان مثال با فرض $(n_1, n_2) = (2,2)$، زیر فضای ناوردای $W_{1,2} = W_2^1 \times W_1^2$ با معادلات دیفرانسیل معمولی (۳۷) محاسبه می شوند:

$$W_2^1 = \{y \mid \mathcal{L}[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\} \qquad (۳۷)$$
$$W_1^2 = \{z \mid \mathcal{L}_2[z] = z'' + b_1 z' + b_0 z = 0\}$$

که در آن باید پارامترهای ثابت b_1, a_1, a_0, b_0 تعیین شوند. شرایط ناوردایی را می‌توان بدین‌صورت نمایش داد:

$$(D^2 G_1 + a_1 D G_1 + a_0 G_1)|_{v \in W_2^1, u \in W_1^2} = 0 \qquad (۳۸)$$
$$D^2 G_2 + b_1 D G_1 + b_0 G_1 |_{v \in W_2^1, u \in W_1^2} = 0$$

که در آن G_1, G_2 در (۲۷) تعریف شدند. در شرط ناوردایی بالا اگر ضرایب $uv_x, u_x v, v_x^2, v_x$ را برابر صفر قرار دهیم به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$a_1 = 0, \quad -3b = 0, \quad -2b_0 + b_1^2 - a_1 b_1 + a_0 = 0, \quad ra_0 = 0$$

که از حل آن‌ها $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0$ نتیجه می‌شود. پس $W = \{1, x\} \times \{1, x\}$ زیر فضای ناوردای تحت G است به‌شرطی‌که r, p, q ناصفر باشند. بنابراین دستگاه معادلات (۲) باید جواب‌های تحلیلی به‌صورت $u(x,t) = c_1(t) + xc_2(t)$ و $v(x,t) = c_3(t) + xc_4(t)$ داشته باشند بنابراین با جای‌گذاری جواب‌های پیشنهادی در دستگاه معادلات (۲) داریم:

$$\frac{\partial^\alpha c_1}{\partial t^\alpha} = -pc_3(t)c_4(t)$$
$$\frac{\partial^\alpha c_2}{\partial t^\alpha} = -pc_4^2(t) \tag{۳۹}$$
$$\frac{\partial^\alpha c_3}{\partial t^\alpha} = -sc_2(t)c_3(t) - rc_1(t)c_4(t)$$
$$\frac{\partial^\alpha c_4}{\partial t^\alpha} = -(r+s)c_2(t)c_4(t)$$

در ادامه تلاش می‌شود دستگاه معادلات معمولی با مشتقات کسری ریمان-لیویل فوق حل شود، برای این منظور از روابط مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیویل توابع چندجمله‌ای استفاده خواهد شد. این روابط در حالت کلی بدین‌صورت است::

$$I^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \tag{۴۰}$$
$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}$$

که D^α, I^α به‌ترتیب انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیویل مرتبهٔ α را نشان می‌دهند. با توجه به معادلات دوم و چهارم دستگاه (۴۰)، انتظار می‌رود تابع $c_4(t)$ به‌صورت $c_4(t) = At^\gamma$ باشد، که در آن A و γ پارامترهای ثابتی است که در ادامه تعیین می‌شوندد. از این رو، با این فرض از سطر دوم دستگاه معادلات (۴۰) به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$c_2(t) = -\frac{pA^2\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\gamma+\alpha+1)} t^{2\gamma+\alpha} \tag{۴۱}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر $c_2(t)$ و $c_4(t)$ را در سطر چهارم از دستگاه معادلات (۴۰)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{A\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha} = \frac{(r+s)pA^3(2\gamma+1)}{\Gamma(2\gamma+\alpha+1)} t^{3\gamma+\alpha}$$

این تساوی تنها به‌ازای $\gamma - \alpha = 3\gamma + \alpha$ یا $\gamma = -\alpha$ و هم‌چنین:

$$A = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{p(r+s)}}$$

برقرار است. بنابراین داریم:

$$c_2(t) = \frac{-1}{r+s} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha} \tag{۴۲}$$

$$c_4(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha} \frac{1}{\sqrt{p(r+s)}} t^{-\alpha} \tag{۴۳}$$

به‌طور مشابه با فرض $c_3(t) = k_1 t^\beta$ و جای‌گذاری آن در دسته اول از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری (13.3) و در نهایت از جای‌گذاری مقادیر محاسبه شده، $c_3(t), c_2(t)$ و $c_4(t)$ در دستهٔ سوم از معادلات، توابع $c_1(t)$ و $c_3(t)$ بدین‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$c_1(t)=\frac{-pk_1}{\sqrt{p(r+s)}}t^{-\alpha} \qquad c_3(t)=k_1t^{-\alpha}.$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات (۲) بدین‌صورت محاسبه می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{-pk_1}{\sqrt{p(r+s)}}t^{-\alpha}-\frac{x}{r+s}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha}$$

$$v(x,t)=k_1t^{-\alpha}+\frac{x}{\sqrt{p(r+s)}}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha}$$

که در آن k_1 یک ثابت دلخواه است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مدل مهم در مهندسی که توصیف کننده رفتار پدیدهٔ انتشار نامتعارف امواج آب در محیط‌های کم عمق است و به دستگاه معادلات جزئی با مشتقات کسری زمانی درینفلد-سوکولوف-ویلسون معروف است، بررسی شد. یک تحلیل قوی ریاضی مبتنی بر نظریه تقارن لی برای بررسی ناوردایی معادلات و تشکیل تقارن‌های نقطه‌ای لی مدل ارائه شد. متناظر به تقارن‌های نقطه‌ای لی، برخی تبدیلات تشابهی مهم برای مسئله محاسبه و با استفاده از آن‌ها مدل به یک دستگاه معادلات معمولی با مشتقات کسری اردلی-کوبر کاهش یافت. در ادامه از یک روش تحلیلی قوی مبتنی بر زیر فضاهای ناوردا یک دسته از جواب‌های دقیق معادله درینفلد-سوکولوف-ویلسون به‌صورت صریح محاسبه شد. مشاهده می‌شود که هر دو تحلیل استفاده شده در این تحقیق که به تازگی برای دستگاه معادلات کسری گسترش داده شده‌اند، کارآیی زیادی برای مواجهه با این مسئله مهم دارد.

منابع

1. Oldham K. B., Spanier J., "The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", Academic Press, New York, NY, USA, (1974).
2. Miller K. S., Ross B., "An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations" Wiley, New York (1993)
3. Podlubny I., "Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications", Mathematics in Science and Engineering Vol. 198, Academic Press, New York, (1999).
4. Loverro A., "Fractional Calculus: History, Defnitions and Applications for the Engineer", Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame Notre Dame, U.S.A, (2004).
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional

Differential Equations", NorthHolland Mathematics Studies Vol. 204, Elsevier, Amsterdam, (2006).

6. Jafari Hossein, Kadkhoda Nematollah, Baleanu Dumitru, "Fractional Lie group method of the time-fractional Boussinesq equation", Nonlinear Dynamics 81.3 (2015) 1569-1574.
7. Hashemi M. S., "Group analysis and exact solutions of the time fractional Fokker- Planck equation", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 417 (2015) 141-149.
8. Hashemi M. S., Baleanu D., "Lie symmetry analysis and exact solutions of the time fractional gas dynamics equation", JOURNAL OF OPTOELECTRONICS AND ADVANCED MATERIALS 18.3-4 (2016) 383-388.
9. Pashayi S., Hashemi M. S., Shahmorad S., "Analytical lie group approach for solving fractional integro-di erential equations" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 51 (2017) 66-77.
10. Roohani Ghehsareh H., Bateni S. H., Zaghian A., "A meshfree method based on the radial basis functions for solution of two-dimensional fractional evolution equation", Engineering Analysis with Boundary Elements. 61 (2015) 52-60
11. Roohani Ghehsareh H., Zaghian A., Zabetzadeh S. M., "The use of local radial point interpolation method for solving two-dimensional linear fractional cable equation", Neural Computing and Applications (2017).
12. Ovsiannikov L.V., "Group analysis of differential equations", New York: Academic Press; (1982).
13. Rafail K., Gazizov Alexey A., Kasatkin, Stanislav Yu Lukashchuk, "Continuous transformation groups of fractional differential equations", (2007).
14. Hashemi M. S., Bahrami F., Najafi R., "Lie symmetry analysis of steady-state fractional reaction-convection-diffusion equation", Optik IJLEO 59017, (2017) 3-21.
15. Komal Singla, Gupta R. K., "On invariant analysis of some time fractional nonlinear systems of partial differential equations", I, JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS 57, 101504 (2016).
16. saha Ray S., sahoo S., "New double-periodic solutions of fractionasl Drifeld-Sokolov-Wilson equation in shallow water waves", Nonlinear Dyn. DOI.10.1007s1007-017-3349-9, (2017).
17. Drinfel’d V. G., Sokolov V. V., "Equations of Korteweg-de Vries type and simple Lie

algebras", Sov. Math. Dokl. 23 (1981) 457-462.

18. Drinfel'd V.G., Sokolov V. V., "Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type", J. Sov. Math. 30(2), 1975-2036 (1985).
19. Wilson G., "The affine lie algebra C(1)2 and an equation of Hirota and Satsuma", Phys. Lett. A 89(7) (1982) 332-334.
20. Hirota R., Gramimaticos B., Rahmani A., "Soliton structure of the Drinfeld-Sokolov-Wilson eqution", journal of Mathematical physics, Vol. 27,No. 6 (1986)1499-1505.
21. Fan E., "Analgebraic mathod for finding a series of exact solutions to integrable and nonintegrable nonlinear evolution equtions", Journal of physics A:Mathmatical and General, Vol. 36,No. 25 (2003) 7009-7026.
22. Dawson C., Santillana M., "A numerical approch to study the properties of solutions of the diffusive wave approximation of the shallow water equations comput", Geossci.14 (1) (2009) 31-53.
23. Matjila C., Muatjeta B., Khalique C. M., "Exact solutions and conservation laws of the Drinfeld-Sokolov-Wilson system", Abstr, Appl. Anasl (2014) 1-6.
24. Galaktionov V. A., "Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities", In: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, vol. 125 (1995) 225-246.
25. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., "Construction of exact solutions for fractional order differential equations by invariant subspace method", Comput.Math. Appl. 66 (2013) 576-584.
26. Sahadevan R., Prakash P., "Exact solution of certain time fractional nonlinear partial differential equations", Nonlinear Dyn DOI 10.1007/s11071-016-2714-4 (2016).
27. Liu C.-s., "Counterexamples on Jumarie's two basic fractional calculus formulae", Commun,Nonlinear Sci., Numer, Simul, 22 (2015) 92-94.
28. Tarasov V. E., "On chain rule for fractional derivatives", Commun. Nonlinear Sci. Numer, Simul, 30 (2016) 1–4.
29. Hilfer R., "Applications of Fractional Calculus in Physics", World Scientific, River Edge, (2000).
30. Kiryakova V., "Generalized Fractional Calculus and Applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific Technical, Longman Group, U.K, (1994).

31. Sneddon I. N., "The Use in Mathematical Physics of Erdélyi-Kober Operators and Some of their Generalizations", Lecture Notes in Mathematics Vol. 457, Springer Verlag, NewYork, (1975) 37-79.

32. Zhu C. R., Qu C. Z., "Maximal dimension of invariant subspaces admitted by non- linear vector differential operators", J Math Phys. 52, 043507 (2011) 15.

33. Shen S. F., Qu C. Z., Jin Y. Y., Ji LN., "Maximal dimension of invariant subspaces to systems of nonlinear evolution equations", Chin Ann Math Ser-B, 33 (2012) 161-78.

34. Sahadevan R., Prakash P., "On Lie symmetry analysis and invariant subspace methods of coupled time fractional partial di erential equations", Chaos, Solitons, Fractals 104 (2017) 107-120.