

## روش هم‌محلی ژاکوبی با مرتبه بالا برای معادلات دیفرانسیل کسری تک مرتبه‌ای غیرخطی

پیام مختاری؛ دانشگاه صنعتی سهند تبریز، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۴/۰۴

دریافت ۹۶/۰۷/۱۰

### چکیده

در این مقاله روش هم‌محلی مبتنی بر چند جمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته به‌عنوان توابع پایه‌ای را برای تقریب مناسب جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی تک‌مرتبه‌ای معرفی می‌کنیم. با استفاده از قضایای وجود و یکتایی نتیجه می‌گیریم که برخی از مشتقات جواب‌های این دسته از معادلات در مبدأ ناپیوسته‌اند که این به‌نوبه خود موجب می‌شود که پیاده‌سازی روش هم‌محلی به‌شکل معمول، مرتبه همگرایی پایینی داشته باشد. به‌منظور رفع این مشکل با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله را به یک معادله جدید با جواب هموارتر تبدیل می‌کنیم و سپس روش هم‌محلی موردنظر را روی آن پیاده‌سازی می‌کنیم. آنالیز همگرایی روش را بررسی کرده و نتایج عددی حاصل از اعمال روش پیشنهادی را گزارش می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی تک مرتبه‌ای، روش هم‌محلی، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، آنالیز همگرایی.

### مقدمه

هدف از این مقاله، ارائه روش تقریبی مناسب برای حل عددی معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی تک مرتبه‌ای

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = d_0, \quad x \in I = [0, 1], \alpha \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

است، که در آن  $f$  تابعی معلوم و  $d_0$  شرط اولیه داده شده است. همچنین  $D^\alpha y(x)$  مشتق کسری از نوع کاپوتوی مرتبه  $\alpha$  است که به‌وسیله این رابطه تعریف می‌شود [۱]:

$$D^\alpha y(x) = I^{1-\alpha} y'(x),$$

که در آن

$$I^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y(t) dt,$$

انتگرال کسری از مرتبه  $\alpha$  است. می‌توان نشان داد که رابطه (۲) برقرار است [۱]:

$$I^\alpha (D^\alpha y) = y(x) - y(0). \quad (2)$$

امروزه بسیاری از محققان به این دسته از معادلات، به‌دلیل کاربرد فراوان در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی و مسائل مهندسی، توجه دارند که از آن‌ها می‌توان به مدل‌سازی خواص الکتریکی و مکانیکی مواد، تشریح خواص تغییر شکل

سنگ‌ها، نوسانات غیرخطی زلزله، معادله انتشار در ریاضی فیزیک، نظریه کنترل سیستم‌های دینامیکی، مدل‌سازی معادلات انتشار نور و معادله جابه‌جایی و پراکندگی افقی هوا در یک زمان کسری، فرآیند الکتروشیمیایی، نظریه پردازش سیگنال، نظریه الکترومغناطیس، شبکه‌های الکتریکی و احتمالات اشاره کرد [۱]-[۷].

با توجه به این‌که اکثر معادلات دیفرانسیل کسری به‌ویژه از نوع غیرخطی آن‌ها یا دارای جواب تحلیلی نیستند و یا در صورت وجود، به‌دست آوردن آن‌ها نیازمند اتخاذ روش‌های بسیار پیچیده است از این‌رو، ارائه روش تقریبی مناسب برای حل عددی آن‌ها بسیار حائز اهمیت است. تاکنون روش‌های متنوعی برای حل این دسته از معادلات در مقالات ارائه شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به روش‌های تجزیه آدومیان، هموتوپ، چندگامی، برون‌یابی، اسپلین، موجک، انتگرال‌گیری ضربی و پیشگو-اصلاح‌گر اشاره کرد [۸]-[۱۷]، که اکثر آن‌ها معادله را در حالت خطی در نظر گرفته‌اند و تاکنون مقالات اندکی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری از نوع غیرخطی ارائه شده است. از این‌رو، ارائه روش‌های عددی کارا به‌منظور تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. هدف از این مقاله معرفی و تحلیل یک روش عددی با مرتبه دقت زیاد مبتنی بر روش هم‌محلی برای معادلات (۱) است.

یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی موجود، روش هم‌محلی است که برای حل عددی دسته‌ی زیادی از معادلات از قبیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات صحیح و جزئی، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل و مسائل مقدار ویژه استفاده شده است [۱۸]، [۱۹]. این به‌نوبه خود اهمیت و کارایی بالای این روش را می‌رساند. ویژگی بارز این روش داشتن مرتبه همگرایی بالا در تقریب جواب‌های هموار معادلات است. ثابت شده است که اگر جواب معادله مورد نظر به اندازه کافی هموار باشد روش هم‌محلی سرعت همگرایی با نرخ نمایی دارد. از این‌رو با توجه به ناهمواری‌های موجود در برخی از مشتقات جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری (۱)، انتظار می‌رود که پیاده‌سازی روش هم‌محلی به‌صورت معمول منجر به روشی تقریبی با سرعت همگرایی اندکی شود. مهم‌ترین انگیزه برای نگارش این مقاله، معرفی و تحلیل یک رویکرد جدید برای بازیابی همگرایی مرتبه بالای روش هم‌محلی در حل عددی معادلات (۱) است. بدین‌منظور، ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب معادله اصلی را به یک معادله دیگر با جوابی هموارتر تبدیل می‌کنیم و سپس با پیاده‌سازی روش هم‌محلی تقریب مناسب با مرتبه دقت زیاد برای معادله (۱) به‌دست می‌آوریم. با تحلیل رفتار همگرایی روش نشان می‌دهیم که رویکرد هموارسازی اتخاذ شده موجب بهبود مرتبه همگرایی می‌شود. نتایج مقایسه‌ای به‌دست آمده همگی حاکی از برتری محسوس روش پیشنهادی نسبت به روش‌های موجود در مقالات است.

این مقاله در شش بخش تهیه و تنظیم شده است. در بخش دوم، قضیه وجود و یکتایی جواب‌های معادله (۱) را ارائه می‌دهیم که ناهموار بودن برخی از مشتقات جواب واقعی در مبدأ را نتیجه می‌دهد. در ادامه با در نظر گرفتن رفتار مجانبی جواب معادله، رویکرد هموارسازی معرفی می‌کنیم که بر اساس آن با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب معادله (۱) را به معادله‌ای جدید با جواب واقعی هموارتر تبدیل کنیم. هدف از این رویکرد، مهیا کردن مقدمات لازم برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری (۱) با استفاده از روش هم‌محلی، با مرتبه دقت زیاد است. در بخش سوم، روش هم‌محلی مبتنی بر پایه‌های چندجمله‌ای‌های ژاکوبی را برای تقریب جواب‌های معادله تبدیل یافته و هم‌چنین

معادله (۱) ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم، رفتار همگرایی روش پیشنهادی را بررسی کرده و در بخش پنجم نتایج عددی را گزارش می‌کنیم. نهایتاً در بخش ششم، نتیجه‌گیری و پیشنهادات را ارائه می‌دهیم.

### قضیه وجود و یکتایی و رویکرد هموارسازی

در این بخش، قضیه وجود و یکتایی جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری (۱) را ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۱.** [۳] فرض کنید  $\alpha = \frac{p}{q}$  که در آن  $p \geq 1, q \geq 2$  دو عدد صحیح نسبت به هم اول هستند. معادله

دیفرانسیل کسری (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که تابع  $f$  قابل نوشتن به صورت  $f(x, y) = \bar{f}(x^{\frac{1}{q}}, y)$  باشد که در آن  $\bar{f}$  یک تابع تحلیلی در یک همسایگی از نقطه  $(0, d_0)$  است. در این صورت جواب  $y$  از معادله (۱) در یک همسایگی از مبدأ قابل نوشتن به صورت سری هم‌گرای

$$y(x) = d_0 + \sum_{i=p}^{\infty} \bar{y}_i x^{\frac{i}{q}}, \quad (3)$$

با ضرایب معین  $\bar{y}_i$  است.

قضیه ۱ نشان می‌دهد که جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری (۱) دارای مشتق مرتبه اول ناپیوسته در مبدأ با رفتاری شبیه  $y'(x) \sim x^{\alpha-1}$  هستند. این ویژگی سبب می‌شود که پیاده‌سازی روش هم‌محلی به صورت معمول منجر به به دست آوردن جواب‌های تقریبی با دقت ضعیف شود. از این رو، معرفی رویکرد هموارسازی با هدف بهبود بخشیدن به وضعیت همواری توابع داده شده و در نتیجه هموارتر شدن جواب واقعی می‌تواند بسیار با اهمیت باشد. بدین منظور با استفاده از رفتار مجانبی جواب معادله (۱) که در قضیه ۱ ارائه شد به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که با اعمال تغییر

$$x = s^{\frac{1}{\alpha}}, \quad s = x^{\alpha}, \quad t = w^{\frac{1}{\alpha}}, \quad w = t^{\alpha}, \quad (4)$$

معادله (۱) قابل تبدیل به معادله (۵) است:

$$\begin{cases} \tilde{D}^{\alpha} \tilde{y}(s) = \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)), \\ \tilde{y}(0) = d_0, \quad s \in I, \end{cases} \quad (5)$$

که در آن

$$\tilde{D}^{\alpha} \tilde{y}(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s (s^{\frac{1}{\alpha}} - w^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha} \tilde{y}'(w) dw, \quad (6)$$

$$\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) = f\left(s^{\frac{1}{\alpha}}, y\left(s^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right),$$

$$\tilde{y}(s) = y(s^{\frac{1}{\alpha}}), \quad (7)$$

جواب واقعی مسئله است که با توجه به رابطه (۳) دارای درجه همواری بهتری در مقایسه با  $y(x)$  است.

### رویکرد عددی

در این بخش ابتدا روش هم‌محلی را به منظور تقریب جواب‌های معادله تبدیل یافته (۵) پیاده‌سازی کرده و سپس با استفاده از رابطه (۷) روشی عددی با دقت زیاد برای معادله (۱) معرفی می‌کنیم. بدین منظور تقریب هم‌محلی معادله (۵) را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s) = \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i J_i^{\mu, \nu}(s), \quad (8)$$

که در آن  $J_i^{\mu, \nu}(s)$  چند جمله‌ای ژاکوبی از درجه  $i$  انتقال یافته به بازه  $I$  با پارامترهای  $\mu, \nu > -1$  است [۱۸]، [۱۹]. تقریب هم‌محلی  $\tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)$  را طوری به دست می‌آوریم که در معادله (۵) صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} \tilde{D}^\alpha \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s) = \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)), \\ \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(0) = d_0. \end{cases} \quad (9)$$

با جای‌گذاری (۸) در (۹) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i \tilde{D}^\alpha J_i^{\mu, \nu}(s) = \tilde{f}(s, \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i J_i^{\mu, \nu}(s)), \\ \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i J_i^{\mu, \nu}(0) = d_0. \end{cases} \quad (10)$$

با استفاده از بسط چندجمله‌ای‌های ژاکوبی بر حسب توان‌های  $s$  [۱۸] و [۱۹] داریم:

$$J_n^{\mu, \nu}(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\mu}{k} \binom{n+\nu}{n-k} (x-1)^{n-k} x^k, \quad n \geq 0,$$

که با اعمال قضیه دو جمله‌ای قابل نوشتن بدین صورت است:

$$J_n^{\mu, \nu}(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n+\mu}{k} \binom{n+\nu}{n-k} \binom{n-k}{r} s^{n-r}, \quad n \geq 0.$$

در این صورت داریم:

$$\tilde{D}^\alpha J_n^{\mu, \nu}(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n+\mu}{k} \binom{n+\nu}{n-k} \binom{n-k}{r} \tilde{D}^\alpha s^{n-r}, \quad n \geq 0. \quad (11)$$

با توجه به رابطه (۶) داریم:

$$\tilde{D}^\alpha s^{n-r} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s (s^{\frac{1}{\alpha}} - w^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha} (w^{n-r})' dw = \frac{(n-r)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s (s^{\frac{1}{\alpha}} - w^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha} w^{n-r-1} dw. \quad (12)$$

با استفاده از فرمول [۲۰]

$$\int_0^s (s^\alpha - w^\alpha)^{-\alpha} w^j dw = s^j \frac{\alpha \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha + \alpha j)}{\Gamma(1 + \alpha j)},$$

می‌توان رابطه (۱۲) را بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\tilde{D}^\alpha s^{n-r} = s^{n-r-1} \frac{\alpha(n-r) \Gamma(\alpha(n-r))}{\Gamma(1 + \alpha(n-r-1))}. \tag{۱۳}$$

حال با جای‌گذاری (۱۳) در (۱۱) داریم:

$$\tilde{D}^\alpha J_n^{\mu,\nu}(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n+\mu}{k} \binom{n+\nu}{n-k} \binom{n-k}{r} \frac{\alpha(n-r) \Gamma(\alpha(n-r))}{\Gamma(1 + \alpha(n-r-1))} s^{n-r-1}, \quad n \geq 0. \tag{۱۴}$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۴) در (۱۰) و استفاده از فرمول [۱۸] و [۱۹]

$$J_i^{\mu,\nu}(0) = (-1)^i \frac{\Gamma(i+\nu+1)}{i! \Gamma(\nu+1)}, \quad i \geq 0,$$

می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب مجهول تقریب هم‌محلی (۸) در رابطه (۱۵) صدق می‌کنند.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{i-k} (-1)^r \tilde{y}_i \binom{i+\mu}{k} \binom{i+\nu}{i-k} \binom{i-k}{r} \frac{\alpha(i-r) \Gamma(\alpha(i-r))}{\Gamma(1 + \alpha(i-r-1))} s^{i-r-1} &= \tilde{f}(s, \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i J_i^{\mu,\nu}(s)), \\ \sum_{i=0}^N (-1)^i \tilde{y}_i \frac{\Gamma(i+\nu+1)}{i! \Gamma(\nu+1)} &= d_0. \end{aligned} \right. \tag{۱۵}$$

در روش هم‌محلی، ضرایب مجهول در جواب تقریبی طوری به‌دست می‌آیند که رابطه (۱۵) در  $(N+1)$  نقاط گروه‌ای (نقاط هم‌محلی) صدق کنند. در این مقاله نقاط هم‌محلی را نقاط انتگرال‌گیری گاوس-ژاکوبی انتقال یافته به بازه  $I$  را انتخاب می‌کنیم که عبارتند از [۱۸] و [۱۹]:

$$\{s_j^{\mu,\nu}\}_{j=0}^N = \{s \mid J_{N+1}^{\mu,\nu}(s) = 0\}. \tag{۱۶}$$

در نهایت تقریب هم‌محلی (۸) را طوری به‌دست می‌آوریم که ضرایب مجهول  $\tilde{y}_i$  در دستگاه غیرخطی از مرتبه  $(N+1)$  زیر صدق کنند.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^{i-k} (-1)^r \tilde{y}_i \binom{i+\mu}{k} \binom{i+\nu}{i-k} \binom{i-k}{r} \frac{\alpha(i-r) \Gamma(\alpha(i-r))}{\Gamma(1 + \alpha(i-r-1))} (s_j^{\mu,\nu})^{i-r-1} \\ &= \tilde{f}(s_j^{\mu,\nu}, \sum_{i=0}^N \tilde{y}_i J_i^{\mu,\nu}(s_j^{\mu,\nu})), \quad j=1, 2, \dots, N, \\ \sum_{i=0}^N (-1)^i \tilde{y}_i \frac{\Gamma(i+\nu+1)}{i! \Gamma(\nu+1)} &= d_0. \end{aligned} \right.$$

بدیهی است که با حل دستگاه فوق ضرایب مجهول  $\tilde{y}_i$  و در نتیجه تقریب  $\tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)$  تعریف شده در (۸) برای جواب معادله تبدیل یافته (۵) به دست می‌آیند. حال می‌توان با استفاده از روابط (۴) و (۷) جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی (۱) را بدین صورت تعریف کرد:

$$y_N^{\mu,\nu}(\mathbf{x}) = \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s) = \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(\mathbf{x}^\alpha).$$

### آنالیز همگرایی

در این بخش به بررسی رفتار همگرایی روش پیشنهادی در حل عددی معادله (۵) و در نتیجه معادله (۱) می‌پردازیم. در این بخش نشان می‌دهیم که رویکرد هموارسازی پیشنهادی در بخش قبل موجب می‌شود که مرتبه همگرایی روش هم‌محلی با افزایش درجه همواری تابع اصلاح شده  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  بیش‌تر شود و هنگامی که این تابع بینهایت بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد همگرایی از نرخ نمایی به دست آید.

از این‌جا به بعد فرض می‌کنیم  $C$  ثابت مثبت دلخواه و مستقل از درجه تقریب  $N$  باشد. ابتدا چند تعریف و لم که در ادامه مورد نیاز است را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱. [۱۸]، [۱۹]، [۲۱].

• فضای وزن دار  $L_{\mu,\nu}^2(I)$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$L_{\mu,\nu}^2(I) = \left\{ u \mid \int_I |u(s)|^2 w^{\mu,\nu}(s) ds < \infty \right\},$$

که در آن  $w^{\mu,\nu}(s) = 2^{\mu+\nu} s^\nu (1-s)^\mu$  تابع وزن متناظر با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته به بازه  $I$  است. هم‌چنین در این فضا نرم بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\|y\|_{\mu,\nu}^2 = \int_I |y(s)|^2 w^{\mu,\nu}(s) ds.$$

• فضای سوبولف وزن دار از مرتبه  $m$ ،  $m \geq 0$  با  $B_{\mu,\nu}^m(I)$  نشان داده و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$B_{\mu,\nu}^m(I) = \left\{ u \mid u^{(k)} \in L_{\mu+k,\nu+k}^2(I), 0 \leq k \leq m \right\}.$$

به‌علاوه نرم و شبه‌نرم در این فضا بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{\mu,\nu,m}^2 = \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_{\mu+k,\nu+k}^2, \quad \|u\|_{\mu,\nu,m} = \|u^{(m)}\|_{\mu+m,\nu+m}.$$

• فضای تمامی توابع پیوسته در بازه  $I$  با  $C(I)$  نشان داده و نرم در این فضا بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in I} |u(x)|.$$

• چندجمله‌ای درون‌یاب برای تابع پیوسته  $u$  در بازه  $I$  با  $I_N^{\mu,\nu} u$  نشان داده و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$(I_N^{\mu,\nu} u)(s) = \sum_{k=0}^N u(s_k^{\mu,\nu}) L_k(s),$$

که در آن  $L_k$  چندجمله‌ای لاگرانژ  $k$ ام، از درجه  $N$  مبتنی بر نقاط  $\{s_k^{\mu,\nu}\}_{k=0}^N$  است.

حال به ارائه چند قضیه در ارتباط با کران خطای برشی حاصل از تقریب به‌وسیله چندجمله‌ای درون‌یاب و نامساوی

گرونوال می‌پردازیم.

لم ۱. [۱۸] و [۱۹]: برای هر  $u \in B_{\mu, \nu}^m(I)$  با  $m \geq 1$  داریم:

$$\|u - I_N^{\mu, \nu} u\|_{\mu, \nu} \leq C N^{-m} |u|_{\mu, \nu, m}.$$

لم ۲. (نامساوی گرونوال): [۲۲] فرض کنید  $u$  تابعی نامنفی و انتگرال‌پذیر در  $I$  باشد طوری که در نامساوی

$$u(s) \leq b(s) + d \int_0^s (s-w)^m w^n u(w) dw, \quad w \in I, \quad m, n > -1,$$

با  $b(s) \geq 0, d > 0$  صدق کند. در این صورت ثابت مثبت  $h$  وجود دارد به طوری که

$$u(s) \leq b(s) + h \int_0^s (s-w)^m w^n b(w) dw, \quad w \in I.$$

حال به بیان و اثبات قضیه همگرایی می‌پردازیم.

قضیه ۲ (همگرایی). فرض کنید  $\tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)$  تقریب هم‌محلی ژاکوبی برای جواب  $\tilde{y}(s)$  از معادله تبدیل یافته (۵) باشد و تابع  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  در شرط لیپ شیتس نسبت به متغیر دوم صدق کند، یعنی ثابت  $K \geq 0$  موجود باشد به طوری که

$$|\tilde{f}(s, \tilde{y}_1(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}_2(s))| \leq K |\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)|.$$

در این صورت اگر تابع  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  به اندازه کافی هموار باشد آن‌گاه به ازای  $N$  های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\|\tilde{e}_N^{\mu, \nu}\|_{\mu, \nu} \leq C N^{-m} |\tilde{f}(0, \tilde{y}_{(0)})|_{\mu, \nu, m},$$

که در آن  $\tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s) = \tilde{y}(s) - \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)$  تابع خطا و  $m \geq 1$  درجه همواری تابع  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  است.

اثبات: با توجه به روش هم‌محلی پیشنهادی در بخش قبل، جواب تقریبی معادله در این رابطه صدق می‌کند:

$$\tilde{D}^\alpha \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s) = I_N^{\mu, \nu}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s))). \quad (۱۷)$$

تذکر این‌که بنا به رابطه (۱۴)  $\tilde{D}^\alpha \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $N$  است و در نتیجه

$$I_N^{\mu, \nu}(\tilde{D}^\alpha \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)) = \tilde{D}^\alpha \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s).$$

با کم کردن رابطه (۵) از رابطه (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^\alpha \tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s) &= \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - I_N^{\mu, \nu}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s))) \\ &= \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)) + e_{I_N^{\mu, \nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s))), \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که در آن  $e_{I_N^{\mu, \nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s))) = \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)) - I_N^{\mu, \nu}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)))$  خطای حاصل از درون‌یابی است. با

اعمال تغییر متغیر (۴) در عملگر انتگرال کسری  $I^\alpha$ ، عملگر  $\tilde{I}^\alpha$  بدین صورت به دست می‌آید:

$$\tilde{I}^\alpha \tilde{y}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-w)^{\frac{1}{\alpha}-1} \tilde{y}(w) \frac{w^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} dw,$$

که با استفاده از رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tilde{I}^\alpha(\tilde{D}^\alpha \tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s)) = \tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s) - \tilde{e}_N^{\mu, \nu}(0) = \tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s). \quad (۱۹)$$

با اعمال عملگر  $\tilde{I}^\alpha$  به طرفین رابطه (۱۸) و با استفاده از رابطه (۱۹) می‌توان نوشت:

$$\tilde{e}_N^{\mu, \nu}(s) = \tilde{I}^\alpha(\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s))) + \tilde{I}^\alpha(e_{I_N^{\mu, \nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu, \nu}(s)))).$$

با توجه به این‌که تابع  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  نسبت به متغیر دوم در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند رابطه مذکور به صورت (۲۰) قابل بازنویسی است.

$$|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}| \leq \tilde{I}^\alpha (|\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s))|) + |\tilde{I}^\alpha (e_{I_N^{\mu,\nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s))))|$$

$$\leq \tilde{I}^\alpha (|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}(s)|) + |\tilde{I}^\alpha (e_{I_N^{\mu,\nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s))))|. \tag{20}$$

با به‌کارگیری لم ۲ (نامساوی گرونوال) در رابطه (۲۰) داریم:

$$\|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}\|_{\mu,\nu} \leq \|\tilde{I}^\alpha (e_{I_N^{\mu,\nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s))))\|_{\mu,\nu}. \tag{21}$$

با توجه به این‌که عملگر انتگرال کسری در فضای  $L^2_{\mu,\nu}(I)$  عملگری کران‌دار است (به لم ۲،۱ در مرجع [۲] مراجعه شود) رابطه (۲۱) را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}\|_{\mu,\nu} \leq C \|e_{I_N^{\mu,\nu}}(\tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)))\|_{\mu,\nu}.$$

با به‌کارگیری لم ۱ در رابطه مذکور داریم:

$$\|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}\|_{\mu,\nu} \leq C N^{-m} \left\| \frac{\partial^m}{\partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)) \right\|_{\mu+m,\nu+m}. \tag{22}$$

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)) = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) + \tilde{e}_N^{\mu,\nu} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tilde{y}_N^{\mu,\nu} \partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)) \Big|_{\tilde{y}_N^{\mu,\nu} \rightarrow \tilde{y}}, \tag{23}$$

که در آن  $\tilde{y}$  تابعی بین  $\tilde{y}$  و  $\tilde{y}_N^{\mu,\nu}$  است. با توجه به فرض همواری تابع  $\tilde{f}(s, \tilde{y}(s))$  در قضیه و به‌کارگیری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}\|_{\mu,\nu} \leq C N^{-m} (\left\| \frac{\partial^m}{\partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) \right\|_{\mu+m,\nu+m} + \|\tilde{e}_N^{\mu,\nu}\|_{\mu+m,\nu+m} \left\| \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tilde{y}_N^{\mu,\nu} \partial s^m} \tilde{f}(s, \tilde{y}_N^{\mu,\nu}(s)) \right\|_{\tilde{y}_N^{\mu,\nu} \rightarrow \tilde{y}}),$$

که به‌ازای  $N$  های به اندازه کافی بزرگ همان نامساوی مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

### نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی به‌دست آمده از پیاده‌سازی روش هم‌محلی برای تقریب جواب‌های معادله (۱) را ارائه می‌دهیم. در جدول منظور از خطا همان

$$\|e_N^{\mu,\nu}\|_{\mu,\nu}^2 = \int_0^1 (e_N^{\mu,\nu}(x))^2 w^{\mu,\nu}(x) dx,$$

است که در آن  $e_N^{\mu,\nu}(x) = y(x) - y_N^{\mu,\nu}(x)$ . هم‌چنین مرتبه همگرایی روش از طریق فرمول

$$order = \left| \frac{\ln\left(\frac{e_{N_1}^{\mu,\nu}}{e_{N_2}^{\mu,\nu}}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)} \right|,$$

محاسبه شده است. به‌منظور سادگی نتایج را در حالت‌های  $\mu = \nu = 0$  (چندجمله‌ای‌های لژاندر) و  $\mu = \nu = -\frac{1}{2}$  (چندجمله‌ای‌های چبیشف) گزارش می‌کنیم. هم‌چنین دستگاه‌های غیرخطی حاصل با استفاده از روش نیوتن اصلاح شده حل شده‌اند.



مثال ۱: معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی (۲۴) را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} y(x) = -e^x (1 + \sqrt{x}) + \frac{\text{Arc cosh}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi(x-1)}} + e^{x+y}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

که دارای جواب واقعی  $y(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$  است که در مبدأ دارای مشتق ناپیوسته است. معادله (۲۴) در شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند زیرا داریم:

$$f(x, y) = -e^x (1 + \sqrt{x}) + \frac{\text{Arc cosh}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi(x-1)}} + e^{x+y} = f^-(\sqrt{x}, y),$$

که در آن  $f^-(s, y) = -e^{s^2} (1 + s) + \frac{\text{Arc cosh}(s)}{\sqrt{\pi(s^2-1)}} + e^{s^2+y}$  یک تابع تحلیلی بر حسب  $s, y$  است. بنابراین بنا

بر قضیه ۱، جواب واقعی معادله قابل نوشتن به صورت سری همگرا

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{y}_i x^{\frac{i}{2}},$$

است که نشان‌دهنده مشتق‌ناپذیر بودن جواب در مبدأ است. به منظور رفع این مشکل، با توجه به روش پیشنهادی در مقاله تغییر متغیر

$$x = s^2, \quad s = \sqrt{x}, \quad t = w^2, \quad w = \sqrt{t},$$

را روی معادله (۲۴) اعمال می‌کنیم و آن را به معادله

$$\begin{cases} \tilde{D}^{\frac{1}{2}} \tilde{y}(s) = f^-(s, y), \\ \tilde{y}(0) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

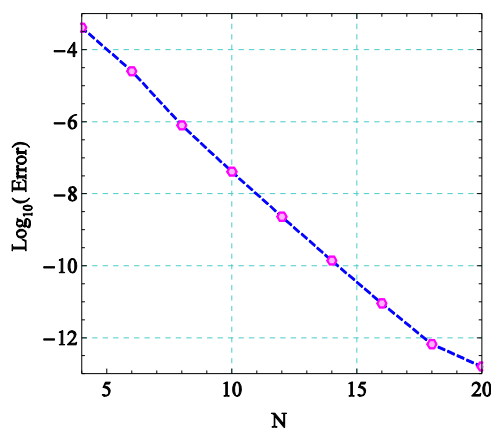
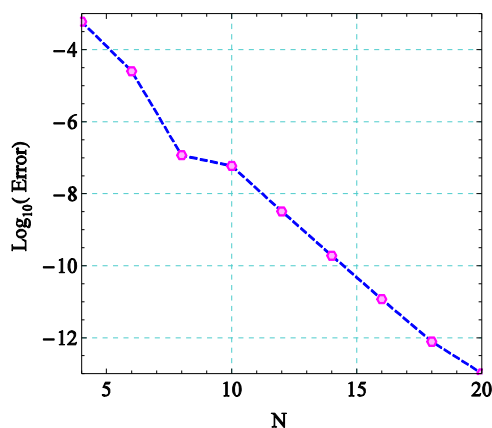
با جواب واقعی هموار  $\tilde{y}(s) = \ln(s+1)$  تبدیل می‌کنیم. حال معادله تغییر یافته (۲۵) را با استفاده از روش هم‌محلی پیشنهادی به‌طور عددی حل کرده و نتایج عددی به‌دست آمده را در جدول‌های ۱ و ۲ و شکل ۱ گزارش می‌کنیم که همگی حاکی از مناسب بودن و مرتبه بالای همگرایی روش پیشنهادی است. با توجه به این که  $\tilde{y}$  نامتناهی بار به‌طور پیوسته در بازه  $I$  مشتق‌پذیر است در قضیه ۲ داریم  $m = \infty$  که نشان‌دهنده این است که پس از اعمال رویکرد هموارسازی تقریب هم‌محلی دارای سرعت همگرایی از نرخ نمایی است. این نتیجه را می‌توان از مرتبه‌های همگرایی ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲ و همچنین شکل ۱ نیز دریافت. آن‌جا که در شکل ۱ رفتار لگاریتمی مشتق به‌زای مقادیر متفاوت  $N$  بعد از مرحله‌ای به بعد تقریباً خطی است و در جدول‌های ۱ و ۲ مرتبه‌های همگرایی با افزایش درجه تقریب رفته رفته بیش‌تر شده و به بینهایت میل می‌کنند.

جدول ۱. نتایج به‌دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر برای مثال ۱

$N$	خطا	مرتبه همگرایی	زمان اجرای برنامه (ثانیه)
۴	$0.5/99 \times 10^{-4}$	۰.۴/۸۴	۰.۲/۲۷
۸	$0.1/17 \times 10^{-6}$	۹	۰.۷/۵۵
۱۲	$0.3/21 \times 10^{-9}$	۱۴/۵۵	۰.۹/۵۶
۱۶	$0.1/18 \times 10^{-11}$	۱۹/۴۹	۱۳/۱۸
۲۰	$0.1/0.2 \times 10^{-13}$	۲۱/۳۹	۲۸/۵۴

جدول ۲. نتایج به‌دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های چبیشف برای مثال ۱

$N$	خطا	مرتبه همگرایی	زمان اجرای برنامه (ثانیه)
۴	$0.4/11 \times 10^{-4}$	۰.۴/۹۹	۰.۱/۷۸
۸	$0.7/91 \times 10^{-7}$	۰.۹/۰.۲	۰.۴/۸۲
۱۲	$0.2/3 \times 10^{-9}$	۱۴/۴	۰.۶/۹۴
۱۶	$0.8/96 \times 10^{-12}$	۱۹/۲۸	۱۵/۴۰
۲۰	$0.1/58 \times 10^{-13}$	۱۹/۰.۹	۲۹/۱۱



شکل ۱. خطاهای به‌دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر (سمت چپ) و چبیشف (سمت راست) برای مثال ۱

مثال ۲: معادله دیفرانسیل کسری

$$\begin{cases} y''(x) + \beta\sqrt{\pi}D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

را در نظر بگیرید که در مدل‌سازی دستگاه میکرو-الکترو-مکانیک (MEMS) که عمدتاً برای اندازه‌گیری چسبندگی سیالاتی که در طول روند استخراج نفت به آن‌ها برخورد می‌شود؛ استفاده می‌شود [۲۳]. جواب واقعی معادله به‌صورت سری نامتناهی است:

$$y(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\beta\sqrt{\pi})^j (j+k)! x^{2+2k+\frac{j}{2}}}{j! k! (2+2k+\frac{j}{2}) \Gamma(2+2k+\frac{j}{2})} \quad (27)$$

این معادله از نوع باگلی-تورویک<sup>۱</sup> است که یکی از پر کاربردترین معادلات دیفرانسیل کسری است. چون این معادله تک مرتبه‌ای نیست از این‌رو، به‌منظور پیاده‌سازی روند عددی پیشنهادی در این مقاله، ابتدا با استفاده از قضیه ۸،۱ از مرجع [۳] معادله (۲۶) را به دستگاه معادله دیفرانسیل تک مرتبه‌ای

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} y_0(x) = y_1(x) \\ D^{\frac{1}{2}} y_1(x) = y_2(x) \\ D^{\frac{1}{2}} y_2(x) = y_3(x) \\ D^{\frac{1}{2}} y_3(x) = -\beta\sqrt{\pi}y_3(x) - y_0(x) \\ y_0(0) = 1, y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

تبدیل می‌کنیم که در آن جواب  $y_0(x)$  از دستگاه (۲۸)، متناظر با جواب  $y(x)$  از معادله (۲۶) است و سپس آن را به‌روش هم‌محلی به‌طور عددی حل می‌کنیم. بدیهی است که معادله (۲۸) قابل بازنویسی به‌صورت تک مرتبه‌ای برداری است:

$$D^{\frac{1}{2}} Y(x) = F(x, Y(x)), \quad (29)$$

که در آن

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix}, \quad F(x, Y(x)) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ -\beta\sqrt{\pi}y_3(x) - y_0(x) \end{bmatrix},$$

و  $Y(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  شرایط اولیه مورد نیاز است. حال روش پیشنهادی را به‌منظور تقریب جواب‌های معادله (۲۹) با در نظر گرفتن  $\beta = 0.1$  و پنجاه جمله از سری جواب (۲۷) پیاده‌سازی می‌کنیم و نتایج عددی به‌دست آمده برای جواب

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ D^{\frac{1}{2}} y(x) \\ y'(x) \\ D^{\frac{3}{2}} y(x) \end{bmatrix},$$

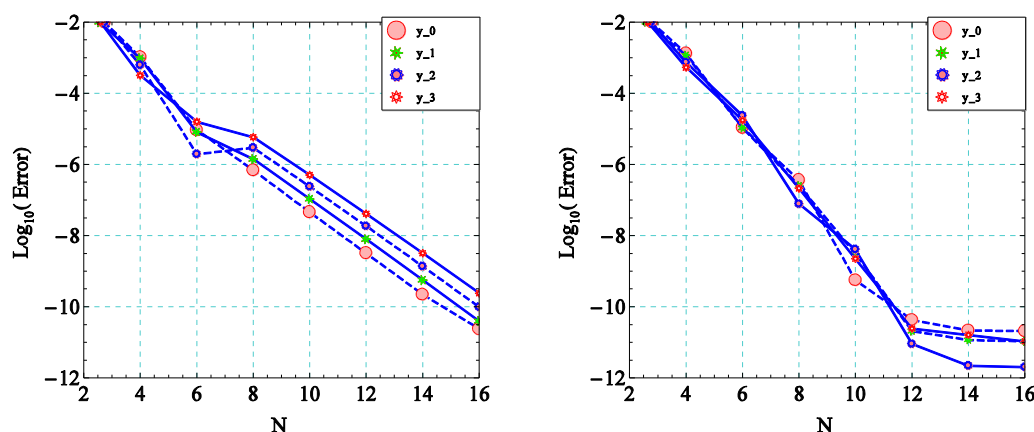
از دستگاه (۲۸) و مقادیر متناظرشان در معادله (۲۶) را در جدول‌های ۳ و ۴ و شکل ۲ ارائه می‌دهیم.

جدول ۳. خطاهای به دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر برای مثال ۲

$y_3(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_0(x)$	$N$
$0.3/19 \times 10^{-7}$	$0.6/31 \times 10^{-7}$	$0.9/53 \times 10^{-7}$	$0.1/0.4 \times 10^{-7}$	۴
$0.5/87 \times 10^{-6}$	$0.2/95 \times 10^{-6}$	$0.1/41 \times 10^{-6}$	$0.6/91 \times 10^{-7}$	۸
$0.4/12 \times 10^{-8}$	$0.1/85 \times 10^{-8}$	$0.7/92 \times 10^{-9}$	$0.3/23 \times 10^{-9}$	۱۲
$0.2/39 \times 10^{-10}$	$0.3/98 \times 10^{-11}$	$0.3/98 \times 10^{-11}$	$0.2/38 \times 10^{-11}$	۱۶

جدول ۴. نتایج به دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های چبیشف برای مثال ۲

$y_3(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_0(x)$	$N$
$0.5/33 \times 10^{-7}$	$0.7/38 \times 10^{-7}$	$0.1/17 \times 10^{-7}$	$0.1/31 \times 10^{-7}$	۴
$0.2/13 \times 10^{-7}$	$0.7/77 \times 10^{-8}$	$0.2/55 \times 10^{-7}$	$0.3/64 \times 10^{-7}$	۸
$0.2/45 \times 10^{-11}$	$0.8/99 \times 10^{-12}$	$0.2/0.7 \times 10^{-11}$	$0.4/28 \times 10^{-11}$	۱۲
$0.1/63 \times 10^{-11}$	$0.2/21 \times 10^{-12}$	$0.1/17 \times 10^{-11}$	$0.2/14 \times 10^{-11}$	۱۶



شکل ۲. خطاهای به دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر (سمت چپ) و

چبیشف (سمت راست) برای مثال ۲

مثال ۳: معادله

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) = (0.5 - x^\alpha) \sin(y(x)) - 0.8 \sin(x^{3\alpha}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (30)$$

را در نظر می‌گیریم. چون در حالت کلی روش کاربردی مناسب برای به دست آوردن جواب واقعی معادله (۳۰) در دسترس نیست باید از روش‌های عددی همیشه همگرا برای محاسبه یک جواب مرجع مناسب که بتواند جای‌گزین خوبی برای جواب واقعی باشد، استفاده کنیم. بدین منظور در این مثال از روش تکرار و روشی (VIM<sup>1</sup>) استفاده می‌کنیم [۲۴]، [۲۵]. در این روش جواب واقعی  $y(x)$  از معادله (۳۰) به صورت (۳۱) ارائه می‌شود:

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x), \quad (31)$$

که در آن تکرارهای  $y_k(x)$  به وسیله رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} y_0(x) = y(0) = 1, \\ y_{k+1}(x) = y_k(x) - I^\alpha [(D^\alpha y_k(x)) - (0.5 - x^\alpha)g_1(y_k(x)) - 0.8g_1(x^{3\alpha})], \end{cases}$$

به‌دست می‌آیند که در آن  $g_1$  همان سری تیلور از درجه  $k$  برای تابع  $\sin(x)$  است. بنا بر رابطه (۳۱) مطمئناً جواب

$$\bar{y}(x) = y_L(x), \quad (32)$$

به‌ازای  $L$  های به اندازه کافی بزرگ یک گزینه مناسب برای جای‌گزینی جواب واقعی  $y(x)$  در محاسبه دقت جواب هم‌محلی به‌دست آمده از روش پیشنهادی در بخش سوم مقاله است. معادله (۳۰) را به‌ازای

$$L = 100, \alpha = \frac{1}{4}, N = 15,$$

با استفاده از روش هم‌محلی و روش تکرار و روشی حل کرده و مقادیر تقریبی به‌دست آمده به‌ازای نقاط متفاوت را در جدول ۵ ارائه دادیم. بدیهی است که مقایسه نتایج به‌دست آمده همگی حاکی از داشتن ارتباطی نزدیک بین جواب مرجع و جواب هم‌محلی است.

### جدول ۵. نتایج عددی به‌دست آمده برای مثال ۳

$x$	جواب مرجع	روش هم محلی-لژاندر	روش هم محلی-چبیشف
۰/۲	۰/۱۰۶۱۶۷۲۹۶۰	۰/۱۰۶۱۶۷۲۱۴۶	۰/۱۰۶۱۶۷۲۲۲۲
۰/۴	۰/۱۰۶۸۷۸۸۴۴۷	۰/۱۰۶۸۷۸۸۵۵۸	۰/۱۰۶۸۷۸۸۰۴۹
۰/۶	۰/۱۰۶۲۷۷۴۱۱۶	۰/۱۰۶۲۷۷۴۵۲۷	۰/۱۰۶۲۷۷۴۱۱۶
۰/۸	۰/۱۱۱۰۶۴۵۶۳۷	۰/۱۱۱۰۶۴۲۰۲۹	۰/۱۱۱۰۶۴۲۶۶۹
۱	۰/۲۸۷۶۲۱۳۷۹	۰/۲۸۷۶۲۵۶۰۲	۰/۲۸۷۶۲۵۳۹۴

مثال ۴: معادله ریکاتی از مرتبه کسری

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} y(x) = y(x) + \sqrt{x} y^2(x) + f(x) \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (33)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن

$$f(x) = -x^q (1 + x^{q+\frac{1}{2}}) + \frac{qx^{q-\frac{1}{2}}\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{1}{2})},$$

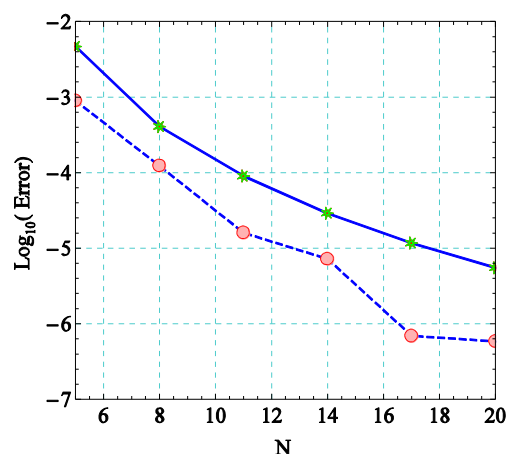
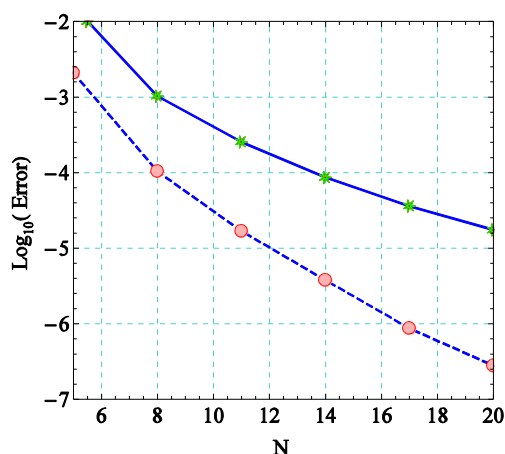
و جواب واقعی معادله برابر با  $y(x) = x^q, q > 0$  است. معادله (۳۳) در [۲۶] به‌ازای  $q$  های متفاوت به‌روش تاو عملیاتی مبتنی بر چند جمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر حل شده است. به‌منظور تأیید مناسب بودن روش پیشنهادی در این مقاله، معادله (۳۳) را به‌روش هم‌محلی ارائه شده در بخش ۳ و با در نظر گرفتن  $q = 1.8$  حل کرده و خطاهای به‌دست آمده را با خطاهای ارائه شده در جدول ۲ در [۲۶] مقایسه می‌کنیم و نتایج را در جدول‌های ۶ و ۷ و شکل ۳ ارائه می‌دهیم. بدیهی است که نتایج گزارش شده در جدول‌های ۶ و ۷ و شکل ۳ همگی حاکی از برتری روش پیشنهادی به‌روش ارائه شده در [۲۶] است.

جدول ۶. نتایج به‌دست آمده از مقایسه خطاهای به‌دست آمده از روش هم‌محلی پیشنهادی و روش تاو عملیاتی [۲۶] به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر برای مثال ۴

$N$	روش هم محلی پیشنهادی	روش تاو عملیاتی
۵	$۰.۲/۰.۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۰.۱/۵۹ \times ۱۰^{-۲}$
۸	$۰.۱/۰.۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۰.۱/۰.۳ \times ۱۰^{-۳}$
۱۱	$۰.۱/۶۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۰.۲/۵۵ \times ۱۰^{-۴}$
۱۴	$۰.۳/۷۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۰.۸/۶۵ \times ۱۰^{-۵}$
۱۷	$۰.۸/۶۹ \times ۱۰^{-۷}$	$۰.۳/۶۲ \times ۱۰^{-۵}$
۲۰	$۰.۲/۷۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۰.۱/۷۴ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۷. نتایج به‌دست آمده از مقایسه خطاهای به‌دست آمده از روش هم‌محلی پیشنهادی و روش تاو عملیاتی [۲۶] به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های چیشف برای مثال ۴

$N$	روش هم محلی پیشنهادی	روش تاو عملیاتی
۵	$۰.۸/۹۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۰.۴/۶۸ \times ۱۰^{-۳}$
۸	$۰.۱/۲۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۰.۴/۰.۷ \times ۱۰^{-۴}$
۱۱	$۰.۱/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۰.۹/۰.۱ \times ۱۰^{-۵}$
۱۴	$۰.۷/۱۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۰.۲/۹۱ \times ۱۰^{-۵}$
۱۷	$۰.۶/۸۹ \times ۱۰^{-۷}$	$۰.۱/۱۷ \times ۱۰^{-۵}$
۲۰	$۰.۵/۸۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۰.۵/۵۱ \times ۱۰^{-۶}$



شکل ۳. خطاهای به‌دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی (شکل خط چین) و روش تاو عملیاتی [۲۶] (شکل خط پر) به‌ازای  $N$  های متفاوت با پایه‌های لژاندر (سمت چپ) و چیشف (سمت راست) برای مثال ۴

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارائه یک روش عددی کارآمد به‌منظور تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی تک مرتبه‌ای می‌پردازیم. بنا به تکینگی جواب‌های این دسته از معادلات در مبدأ، یک رویکرد هموارسازی به‌منظور بهبود درجه همواری جواب واقعی مسئله معرفی کرده و تقریب هم‌محلی را برای تقریب معادله تبدیل یافته پیاده‌سازی کردیم. هم‌چنین آنالیز همگرایی روش ارائه شد. نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی، همگی حاکی از کارآمدی و مرتبه بالای روش پیشنهادی بوده است.

## منابع

1. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, SanDiego, CA. (1999).
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. "Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier", Amsterdam (2006).
3. Diethelm K., "The Analysis of Fractional Differential Equations", Springer-Verlag Berlin (2010).
4. Oldham K. B., Spanier J., "The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration of Arbitrary Order", Academic Press, New York (1974).
5. Torvik P. J., Bagley R. L., "On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials", J. Appl. Mech., 51 (1984) 294-298.
6. Caputo M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, Geophys", J. Roy. Astron. Soc., 13 (1967) 529-539.
7. Caputo M., Mainardi F., "A new dissipation model based on memory mechanism", Pure Appl. Geophys., 91 (1971) 134-147, reprinted in Fract. Calc. Appl. Anal., 10, (2007) 310-323.
8. El-sayed A., Gaber M., "The Adomian decomposition method for solving partial differential equations of fractional order in finite domains", Phys. Lett. A., 359 (2006) 175-182.
9. Odibat Z., Momani S., Xu H., "A reliable algorithm of Homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations", Appl. Math. Model., 34 (2010) 593-600.
10. Galeone L., Garrappa R., "On multistep methods for differential equations of fractional order", Mediterr. J. Math., 3 (2006) 565-580.
11. Diethelm K., Walz G., "Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation", Numer. Algorithms, 16 (1997) 231-253.
12. Lakestani M., Dehghan M., Irandoust-Pakchin S., "The construction of operational matrix of fractional derivatives using B-spline functions", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17(2012) 1149-1162.
13. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations, Numer. Algorithms", 74 (2017) 223-245.
14. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-Bernoulli wavelets and their applications", Appl. Math. Model., 40 (2016) 8087-8107.
15. Rehman M. U., Khan R. A., "The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16 (2011) 4163-4173.
16. Garrappa R., Popolizio M., "On accurate product integration rules for linear fractional differential equations", J. Comput. Appl. Math., 235 (2011) 1085-1097.

17. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., "A Predictor-Corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations", *Nonlinear Dynam.*, 16 (2002) 3-22.
18. Hesthaven J. S., Gottlieb S., Gottlieb D., "Spectral Methods for Time-Dependent Problems, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics", Vol 21, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York(2007).
19. Shen J., Tang T., Wang L. L., "Spectral methods, Algorithms, Analysis and Applications", Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 41, Springer, Berlin, Heidelberg and New York (2011).
20. Ghoreishi F., Mokhtary P., "Spectral collocation method for multi-order fractional differential equations", *Int. J. Comput. Methods*, 11, No. 5, (2014)1350072(23 ).
21. Rivlin T. J., "An Introduction to the Approximation of Functions", United States (1969).
22. Mokhtary P., "Reconstruction of exponentially rate of convergence to Legendre collocation solution of a class of fractional integro-differential equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 279 (2015) 145-158.
23. Fitt A. D., Goodwin A. R. H., Ronaldson K. A., Wakeham W. A., "A fractional differential equation for a MEMS viscometer used in oil industry, *J. Comput. Appl. Math.*, 229 (2009) 373-381.
24. He Ji-Huan, Wu Xu-Hong, "Variational iteration method: new development and applications", *Comput. Math. Appl.*, 54 (7-8) (2007) 881-894.
25. Odibat Z., "A study on the convergence of variational iteration method", *Math. Comput. Modelling*, 51 (9-10) (2010) 1181-1192.
26. Mokhtary P., Ghoreishi F., "Convergence analysis of spectral Tau method for fractional Riccati differential equations", *Bull. Iran. Math. Soc.*, 40, No. 5 (2014) 1275-1290.