جانمایی رقابتی تسهیلات با بازی ورونوی وزن‌دارتک دوری

زینب حسنی
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده علوم کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه کوثر، دانشکده علوم پایه و فنی، گروه کامپیوتر، بجنورد، ایران.
مرضیه اسکندری*
دانشگاه الزهرا، دانشکدۀ علوم ریاضی، گروه کامپیوتر
دریافت ۹۶/۰۷/۱۹	پذیرش ۹۷/۰۸/۰۷

چکیده

بازی ورونوی، یک مدل هندسی ساده برای مسائل جانمایی رقابتی تسهیلات با دو بازیکن ارائه می‌دهد. بازی ورونوی با دو بازیکن (سفید و سیاه)، در یک ناحیه پیوسته و محدود (یک بعدی یا دو بعدی) به‌عنوان صفحه بازی، انجام می‌شود. در مدل تک دوری، ابتدا بازیکن سفید تمامی مهره‌های خود را که نقطه هستند، روی صفحه بازی قرار می‌دهد. سپس نوبت به بازیکن سیاه می‌رسد تا تمامی نقاط خود را قرار دهد. سپس صفحه بازی براساس معیار نزدیکی فاصله، بین دو بازیکن تقسیم شده و بازیکنی که مساحت بیش‌تری از ناحیۀ بازی را از آن خود کرده است، برنده بازی شناخته می‌شود. در این مقاله، بازی ورونوی "وزن‌دار" تک دوری در نواحی یک بعدی و دو بعدی بررسی می‌شود. در بازی ورونوی وزن‌دار، سرویس-گیرندگان می‌توانند علاوه بر معیار نزدیکی فاصله برای انتخاب سرویس‌دهنده، کیفیت امکانات آن را نیز مد نظر قرار دهند. براین اساس، در ناحیه یک بعدی دو حالت مختلف از تسهیلات (همسان و غیرهمسان) را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم در بازی ورونوی وزن‌دار تک دوری بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است.

واژه‌های کلیدی: هندسۀ محاسباتی، جانمایی رقابتی تسهیلات، دیاگرام ورونوی، دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی، بازی ورونوی.

مقدمه

امروزه یکی از مسائل مهم درحوزه جانمایی رقابتی تسهیلات، تعیین مکان برای ایجاد یک تسهیل جدید در ارائه سرویس‌های رقابتی است. مشتریان همیشه برای انتخاب تسهیلات، ملاک‌هایی مانند نزدیکی فاصله تسهیلات، امکانات تسهیلات و امتیازهای ارائه شده به‌وسیلۀ سرویس‌دهندۀ تسهیلات را در نظر می‌گیرند. بازی ورونوی یک مدل هندسی برای جانمایی رقابتی تسهیلات است که چگونگی تأثیر تصمیم‌پذیری رفتار مشتریان را به‌خوبی مدل می‌کند.

بازی ورونوی با دو بازیکن سفید و سیاه که هر کدام دارای تعداد مشخص n مهره که نشان‌گر تسهیلات هستند و در ناحیۀ پیوسته و محدود U انجام می‌شود. بازیکن سفید همانند بازی شطرنج آغازگر بازی است. پس از این‌که تمامی $2n$ تسهیلات به‌وسیلۀ دو بازیکن سفید و سیاه جای‌گذاری شد، دیاگرام ورونوی $2n$ نقطه برای ارزیابی نتیجه بازی بررسی می‌شود و بازیکنی که تسهیلات آن ناحیۀ بزرگ‌تری را تحت کنترل داشته باشد، برنده بازی است. تاکنون مدل‌های مختلفی از بازی ورونوی با بعدهای متفاوت ناحیۀ بازی و هم‌چنین تعداد دورهای بازی، معرفی شده است. در بازی ورونوی تک دوری ابتدا بازیکن سفید تمامی n مهره‌اش را که نقطه هستند، در ناحیه بازی قرار می‌دهد، سپس نوبت به بازیکن سیاه می‌رسد تا n نقطه خود را قرار دهد.

*نویسنده مسئول	eskandari@alzahra.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.8.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.47]

آهن و همکارانش بازی ورونوی ساده‌ای با ناحیۀ بازی یک بعدی (خط و دایره) بررسی کردند و استراتژی بردی برای بازیکن دوم ارائه کردند و نشان دادند که بازیکن اول می‌تواند اختلاف برد بازیکن دوم را تا حد دلخواه کاهش دهد [۱]. چانگ و همکارانش سناریوی متفاوتی را در ناحیۀ بازی یک‌بعدی و بیش‌تر معرفی کرده و استراتژی برد را برای بازیکن دوم در حالتی که $n > n_0$ و ناحیۀ بازی مربعی شکل باشد، ارائه کردند [۳]. فکت و همکارانش بازی ورونوی دوبعدی را در ناحیۀ بازی مستطیل شکل بررسی کردند [۴]. آنها برای بازیکن دوم استراتژی برد را در حالاتی که $n \geq 3$ با $\rho > \sqrt{2}/n$ و $n = 2$ با $\rho > \sqrt{3}/2$ ارائه کردند، که در آن ρ نسبت عرض به طول مستطیل ناحیۀ بازی است و نشان دادند بازیکن اول در سایر حالت‌های باقی‌مانده برنده است. راشد و همکارانش بازی ورونوی متفاوتی را به نام بازی ورونوی همسایه معرفی کردند که استراتژی‌هایی برای برتری برهمسایه ارائه می‌شود (نه بر رقیب) [۷]. باندیاپا و همکارانش بازی ورونوی را روی گراف وزن‌دار بررسی کرده و نشان دادند که یافتن استراتژی برد برای بازیکن دوم NP-Complate است [۲].

در همۀ این مدل‌ها، محققان با فرض یک‌سان بودن خدمات تسهیلات و تنها با معیار فاصله از تسهیلات، به بررسی انواع مختلف بازی ورونوی پرداخته‌اند. در حالی که در واقعیت مشتریان و سرویس‌گیرندگان علاوه بر نزدیکی فاصله تسهیلات، کیفیت امکانات تسهیلات را نیز در نظر می‌گیرند که این امر با دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی قابل مدل‌سازی است و می‌توان علاوه بر فاصله تسهیلات، امکانات رقابتی تسهیلات را برای مشتریان در نظر گرفت.

در این مقاله بازی ورونوی تک دوری با معیار انتخاب کیفیت امکانات و فاصله برای دو بازیکن بررسی شده است. بازی ورونوی وزن‌دار مضربی به‌عنوان مدل مناسبی برای این مسئله معرفی و در ناحیۀ بازی یک‌بعدی و دوبعدی بررسی می‌شود و استراتژی برد برای بازیکن دوم ارائه می‌شود. با توجه به این‌که در این مدل مشتریان می‌توانند سرویس‌دهنده خود را بر اساس هر دو معیار نزدیکی فاصله و خصوصیات سرویس‌دهنده مانند پارکینگ، قیمت، تنوع، کیفیت محصولات و .... انتخاب کنند، این مدل به دنیای واقعی نزدیک‌تر است.

تعاریف

فرض کنید مجموعه $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ شامل n نقطه، که سایت نامیده می‌شوند، در صفحه داده شده باشد. دیاگرام ورونوی S افرازی از صفحه به n ناحیه است (یک ناحیۀ نظیر هر سایت) با این خاصیت که ناحیۀ نظیر هر سایت p_i، شامل نقاطی از صفحه است که p_i، نزدیک‌ترین سایت به آنها باشد. در دیاگرام ورونوی مرزهای نواحی بخش‌هایی از عمود منصف زوج سایت‌های مجاور است. در این تعریف کلاسیک از دیاگرام ورونوی، فاصله براساس متر اقلیدسی محاسبه می‌شود [۶]. فاصله اقلیدسی دو نقطه x و y را با نماد $d(x, y)$ نشان می‌دهیم.

در بازی ورونوی دو بازیکن سفید و سیاه که هر یک دارای n مهره‌ی نقطه‌ای هستند، شرکت دارند. مهره‌های بازیکن سفید را با $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ و مهره‌های بازیکن سیاه را با $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ نشان می‌دهیم. در مدل تک دوری، ابتدا بازیکن سفید بازی را شروع می‌کند و تمامی n نقطه‌اش را در ناحیۀ بازی U جای‌گذاری می‌کند. سپس نوبت بازیکن سیاه است تا n نقطه‌اش را در ناحیۀ بازی قرار دهد. هم‌چنین دو بازیکن نمی‌توانند نقاطی را که قبلاً اشغال شده است تغییر یا مجدداً استفاده کنند. سپس دیاگرام ورونوی همۀ نقاط محاسبه شده و مجموع مساحت‌های نواحی ورونویی که سایت نظیرشان سفید است به‌عنوان امتیاز بازیکن سفید در نظر گرفته می‌شود. مشابهاً امتیاز بازیکن سیاه هم قابل محاسبه و براین اساس برندۀ بازی تعیین می‌شود. در واقع مجموع مساحت‌های نواحی ورونویی که سایت نظیرشان به یک رنگ است، نشان‌گر سهم آن بازیکن از بازار است.

با توجه به کاربردهای دیاگرام ورونوی در انواع مسائل جانمایی تسهیلات، تعمیم‌های مختلفی از دیاگرام ورونوی وجود داردکه با جای‌گزینی توابع فاصله دیگری به‌جای فاصله اقلیدسی در تعریف و محاسبه دیاگرام ورونوی به‌دست می‌آیند.

تعریف ۱: اگر برای هر سایت p_i یک عدد حقیقی مثبت ω_i به‌عنوان وزن نظیر کنیم، تابع فاصله وزن‌دار بدین‌صورت تعریف می‌شود [۵].

$$d_w(p_i, x) = d(p_i, x)/\, \omega_i \qquad (۱)$$

براساس تعریف فاصله وزن‌دار، دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی برای سایت‌های وزن‌دار تعریف می‌شود. در دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی، ناحیهٔ ورونوی سایت p_i به‌صورت (۲) مشخص می‌شود:

$$V(p_i) = \{x / d_w(p_i, x) \leq d_w(p_j, x),\ \forall\, i \neq j\} \qquad (۲)$$

فرض کنید سایت‌ها در یک فضای یک‌بعدی واقع باشند. در کاربردهای مختلف، این فضای یک‌بعدی معمولاً یک خط یا یک دایره در نظر گرفته می‌شود. برای توصیف دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی سایت‌های وزن‌دار واقع بر یک خط یا یک دایره، توجه داشته باشید که فاصله اقلیدسی دو نقطه x و y در این فضا، طول پاره‌خط یا کمان xy است که با نماد اختصاری $|x-y|$ نیز نشان داده می‌شود. توجه کنید که در حالت دایره، مقدار $|x-y|$ طول کمان xy را نشان می‌دهد. در چنین فضایی با در نظرگرفتن فاصله وزنی، عمودمنصف دو سایت x_i و x_j، مکان هندسی نقاطی مانند x در این فضاست که شرط $d_w(x_i, x) = d_w(x_j, x)$ برقرار باشد. با ساده کردن این رابطه، داریم:

$$\mathrm{d}_w(x_j, x) = \mathrm{d}_w(x_i, x) \Rightarrow |x_j - \mathrm{x}|/\ \omega_j = |x_i - \mathrm{x}|/\ \omega_i \Rightarrow |x_j - \mathrm{x}| = |x_i - \mathrm{x}| * \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

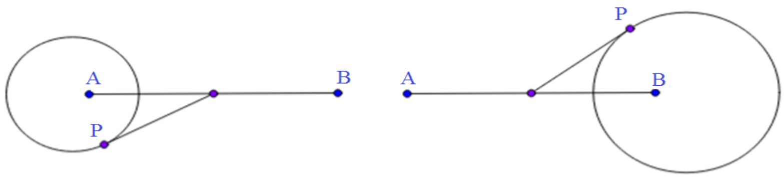
حال با توجه به این‌که x نقطه‌ای روی کمان یا پاره خط $x_i x_j$ است، داریم: $|x_i - x_j| = |x_j - \mathrm{x}| + |x_i - \mathrm{x}|$.
بنابراین داریم:

$$|x_i - x_j| = |x_i - x| * \frac{\omega_j}{\omega_i} + |x_i - \mathrm{x}| = \frac{\omega_j + \omega_i}{\omega_i} |x_i - x| \Rightarrow$$
$$|x_i - x| = \frac{\omega_i}{\omega_j + \omega_i} |x_i - x_j| \qquad (۳)$$

بنابراین عمودمنصف دو نقطه‌ی $\mathrm{x_i}$ و $\mathrm{x_j}$ درفضای یک بعدی یک نقطه بر پاره‌خط یا کمان $x_i x_j$ است که آن را به دو بخش به طول‌های $\frac{\omega_\mathrm{i}}{\omega_\mathrm{j}+\omega_\mathrm{i}} |x_i - x_j|$ و $\frac{\omega_\mathrm{j}}{\omega_\mathrm{j}+\omega_\mathrm{i}} |x_i - x_j|$ تقسیم می‌کند.

در حالتی که سایت‌های وزن‌دار در ناحیه دوبعدی مانند صفحه قرار داشته باشند، برای توصیف دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی لازم است ساختار عمودمنصف دو سایت p_i و p_j بررسی می‌شود.

تعریف ۲: نقاط A و B با وزن‌های ω_A و ω_B به فاصلهٔ d از هم در فضای R^2 قرار دارند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از دو نقطه A و B متناسب با نسبت وزن دو نقطه باشد، را در هندسهٔ کلاسیک دایره آپولونیوس می‌نامند [۵].



شکل ۱. الف) دایرهٔ آپولونیوس دو نقطهٔ A و B برای $\omega_A < \omega_B$ به‌طوری‌که مقدار k=3 ، ب) دایرهٔ آپولونیوس دو نقطه A و B برای $\omega_A > \omega_B$ مقدار k=0.3.

در شکل ۱ دایره‌های آپولونیوس دو نقطهٔ A و B با نسبت‌های متفاوت وزن دو نقطه نشان داده شده است. در صورتی که دو نقطه دارای وزن یک‌سان باشند، دایره آپولونیوس همان عمودمنصف پاره‌خط واصل این دو نقطه است.

دایره آپولونیوس، در واقع مکان هندسی نقاطی مانند p است به‌طوری‌که:

$$\frac{/A-p/}{/B-p/}=\frac{\omega_A}{\omega_B}$$

توجه داشته باشید که عبارت فوق معادل این است که فاصله وزن‌دار نقطه p از A و B به یک اندازه باشد، یعنی نقاط واقع بر عمودمنصف AB با متر وزن‌دار. این نسبت را با k نشان می‌دهیم:

$$\frac{Ap}{Bp}=\frac{\omega_A}{\omega_B}=k \qquad (۴)$$

آن‌گاه شعاع دایره آپولونیوس از رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید [۵]:

$$r=\frac{k}{k^2-1}d \qquad (k>1) \qquad (۵)$$

که در آن r شعاع دایره آپولونیوس و d فاصلهٔ بین دو نقطه A و B است. با توجه به مقدار k، عمود منصف AB دایره یا خط است:

۱) $k>1$ $(\omega_B<\omega_A)$: عمودمنصف AB، دایره‌ای به مرکز B است.

۲) $k<1$ $(\omega_B>\omega_A)$: عمودمنصف AB، دایره‌ای به مرکز A است.

۳) $k=1$ $(\omega_B=\omega_A)$: عمودمنصف AB، خطی بین دو نقطه است.

مساحت دایره πr^2 است که شعاع دایره تحت تأثیر مقادیر k و d است. بنابراین مقادیر k و d بر میزان مساحت ناحیه‌های دیاگرام ورونوی مؤثر است. با افزایش مقدار d مساحت دایره افزایش می‌یابد و مقدار k هر چه به ۱ نزدیک‌تر باشد شعاع دایره بزرگ‌تر و مساحت دایره بیش‌تر است.

توجه کنید که براساس ساختار عمودمنصف نقاط وزن‌دار، نواحی ورونوی در دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی برخلاف دیاگرام ورونوی معمولی چندضلعی نیست.

بازی ورونوی وزن‌دار یک بعدی

در بازی ورونوی وزن‌دار، ناحیه بازی براساس دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی بین دو بازیکن تقسیم می‌شود. ابتدا دربازی تک دوری، وقتی که سایت‌ها دارای وزن یک‌سان باشند، یعنی کیفیت امکانات تمام شعب دو سرویس‌دهنده مشابه هستند، برای بازیکن سیاه در ناحیه یک‌بعدی، استراتژی برد ارائه می‌کنیم. سپس بازی ورونوی وزن‌دار با تسهیلات غیرهمسان را بررسی می‌کنیم.

در حالتی که ناحیهٔ بازی، محیط دایره واحد C باشد، بازی ورونوی وزن‌دار تک دوری را می‌توان چنین توصیف کرد. بازیکن سفید، ابتدا بازی را شروع می‌کند و n مهره خود را که دارای وزن هستند، روی محیط دایره قرار می‌دهد. نقطه با بیشینهٔ وزن بازیکن سفید را W_n می‌نامیم. نقطهٔ مجاور W_n، در جهت ساعت‌گرد را W_1 می‌نامیم و $n-2$ نقطه باقی‌مانده بازیکن سفید که بین W_1 و W_n قرار می‌گیرند را در جهت ساعت‌گرد به‌ترتیب W_2 تا W_{n-1} نام‌گذاری می‌کنیم. وزن هر نقطه W_i را با $\omega(W_i)$ که در آن $1\leq i\leq n$ نشان می‌دهیم.

برای $1\leq i\leq n-1$، قسمتی از کمان دایره را که بین دو نقطه W_i و W_{i+1} قرار می‌گیرد بازهٔ d_i و قسمتی از کمان دایره را که بین دو نقطه W_1 و W_n واقع است را بازهٔ d_n می‌نامیم. در هر بازهٔ d_i، $(1\leq i\leq n)$، از بین دو نقطهٔ W_i و W_{i+1} نقطه با وزن کم‌تر را با W'_i و نقطه با وزن بیش‌تر را با W''_i نام‌گذاری می‌کنیم، یعنی داریم:

$$\omega(W'_i)=\min\ \{\omega(W_i),\omega(W_{i+1})\} \qquad (۶)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.8.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.47]

$$\omega(W_i'') = \max \quad \{\omega(W_i), \omega(W_{i+1})\} \tag{۷}$$

که در آن تابع $\omega(.)$ معرف وزن یک نقطه است. هم‌چنین طول کمان d_i را با $|d_i|$ نشان می‌دهیم.

۱. بازی ورونوی وزن‌دار یک بعدی: سایت‌های همسان

در این بخش فرض می‌کنیم، دو بازیکن سفید و سیاه دارای نقاطی با وزن یک‌سان هستند و برای بازیکن سیاه استراتژی برد ارائه می‌دهیم. بازیکن سیاه قصد دارد در هر بازهٔ d_i یکی از مهره‌های خود را طوری قرار دهد که در نهایت بیش از نیمی از محیط دایره C را از آن خود کند. مهره سیاه، با بیش‌ترین وزن بازیکن سیاه را B_n می‌نامیم. بازیکن سیاه برای هر $1 \le i \le n-1$، نقطهٔ B_i را در بازهٔ d_i و B_n را در بازهٔ d_n طوری قرار می‌دهد تا برندهٔ بازی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که بازیکن سیاه می‌تواند در یک بازهٔ دلخواه $(1 \le i \le n-1)$ طوری B_i را جای‌گذاری کند که نزدیک به نیمی از طول d_i را از آن خود کند.

لم ۱: در بازهٔ دلخواه d_i $(1 \le i \le n-1)$، برای هرعدد حقیقی مثبت ε داده شده که $0 < \varepsilon < L(\frac{|d_i|}{2})$، بازیکن سیاه همواره می‌تواند حداقل $\frac{|d_i|}{2} - \varepsilon$ را به‌خود اختصاص دهد که در آن داریم:

$$L = \frac{\frac{\omega(W_n)-\omega(W_1)}{\omega(W_n)+\omega(W_1)}}{\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\omega(W_{i+1})-\omega(W_i)}{\omega(W_{i+1})+\omega(W_i)}\right|} \tag{۸}$$

اثبات: اگر بازیکن سیاه در بازهٔ d_i، نقطه‌ی B_i با وزن بزرگ‌تر یا مساوی W'_i را به فاصلهٔ ε از W''_i قرار دهد، در این صورت امتیاز بازیکن سیاه در بازهٔ d_i به‌صورت (۹) قابل محاسبه است:

$$S_{B_i} = \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}|W_i - B_i| + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_{i+1})}|W_{i+1} - B_i| \tag{۹}$$

و برای امتیاز بازیکن سفید در بازه d_i داریم:

$$S_{W_i} = \frac{\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}|W_i - B_i| + \frac{\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\omega(W_{i+1})}|W_{i+1} - B_i| \tag{۱۰}$$

حال بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم: $\omega(W_i) < \omega(W_{i+1})$ پس داریم:

$$\omega(W_i) < \omega(W_{i+1}) \quad \to \quad W_i' = W_i\,,\ W_i'' = W_{i+1} \tag{۱۱}$$

در این صورت داریم:

$$|W_{i+1} - B_i| = \varepsilon \tag{۱۲}$$

$$|W_i - B_i| = |d_i| - \varepsilon \tag{۱۳}$$

بنابراین داریم :

$$S_{B_i} = \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}(|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_{i+1})}\varepsilon \tag{۱۴}$$

حال با توجه به انتخاب B_i داریم: $\omega(W_i) \le \omega(B_i)$، بنابراین:

$$S_{B_i} \ge \frac{1}{2}(|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_{i+1})}\varepsilon = \frac{|d_i|}{2} - \frac{\omega(W_{i+1}) - \omega(B_i)}{2\big(\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})\big)}\varepsilon$$

$$\Rightarrow S_{B_i} > \frac{|d_i|}{2} - \frac{\omega(W_{i+1}) - \omega(W_i)}{2\big(\omega(W_i) + \omega(W_{i+1})\big)} \tag{۱۵}$$

$$\Rightarrow S_{B_i} > \frac{|d_i|}{2} - \varepsilon$$

لم ۲: بازیکن سیاه قادر است مهره‌های B_1، B_2، ...، B_{n-1} را به‌گونه‌ای در بازه‌های d_1، d_2، ...، d_{n-1} قرار دهد که در تمامی بازه‌های d_i، $(1 \le i \le n-1)$، امتیاز $\frac{|d_i|}{2} - \varepsilon$ را کسب کند.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.8.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.47]

اثبات: ابتدا بازیکن سیاه در بازهٔ d_1، مهره B_1 با وزن $\omega(W'_1)$ را مطابق لم (۱) جای‌گذاری می‌کند. سپس در هر بازهٔ d_i $(2\leq i\leq n-1)$، اگر نقطه‌ای با وزن $\omega(W'_i)$ استفاده نشده باشد، آن را در این بازه قرار می‌دهد در غیر این صورت، نقطه‌ای با وزن حداقل وزن باقی‌مانده را قرار می‌دهد. بنابراین:

$$\omega(B_1)=\ \omega(W'_1) \qquad (۱۶)$$

و برای سایر مقادیر i، $(2\leq i\leq n-1)$، داریم:

$$\omega(\mathrm{B_i})=\begin{cases}\omega(\mathrm{W'_i}) & \text{اگر مهره‌ای با وزن } \omega(W'_i) \text{ باشد که قبلاً استفاده نشده در} \\ \omega(\mathrm{B_j}) & \text{غیراین‌صورت، اگر } B_j \text{ مهره با کم‌ترین وزن باقی‌مانده باشد}\end{cases} \qquad (۱۷)$$

با چنین انتخابی برای هر i داریم:

$$\omega(\mathrm{B_i})\geq\omega(\mathrm{W'_i}) \qquad (۱۸)$$

و بازیکن سیاه در هر بازهٔ d_i همواره می‌تواند حداقل $\frac{|d_i|}{2}-\varepsilon$ را به‌خود اختصاص دهد.

قضیهٔ ۱: بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است.

اثبات: ابتدا بازیکن سیاه $n-1$ مهره‌اش را در بازه‌های مربوطه براساس لم (۲) و به فاصلهٔ ε، $0<\varepsilon<L(\frac{|d|}{2})$ قرار می‌دهد، که در آن $|d|=min_{1\leq i\leq}\{|d_i|\}$. سپس آخرین نقطه، B_n، را که بیش‌ترین وزن را دارد، در بازهٔ d_n نزدیک به W_n به فاصلهٔ دلخواه $0<\delta<|\mathrm{d}_n|/2$ قرار می‌دهد. حال نشان می‌دهیم بازیکن سیاه برنده است. توجه کنید وزن B_n و W_n با هم برابر است.

$$S_B=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W'_i)}(|d_i|-\varepsilon)+\ \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W"_i)}\ \varepsilon\ \right)+\frac{\delta}{2}+\ \frac{\omega(B_n)}{\omega(B_n)+\omega(W_1)}\ (|d_n|-\delta) \qquad (۱۹)$$

$$S_W=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\omega(W'_i)}{\omega(B_i)+\omega(W'_i)}(|d_i|-\varepsilon)+\ \frac{\omega(W"_i)}{\omega(B_i)+\omega(W"_i)}\ \varepsilon\ \right)+\frac{\delta}{2}+\ \frac{\omega(W_1)}{\omega(B_n)+\omega(W_1)}(|d_n|-\delta) \qquad (۲۰)$$

که در آن S_B و S_W، به‌ترتیب مجموع امتیاز بازیکن سیاه و سفید است. با توجه به رابطهٔ (۱۵) اختلاف امتیاز دو بازیکن برابر است با:

$$S_B-S_W\geq\frac{\omega(W_n)-\omega(W_1)}{\omega(W_n)+\omega(W_1)}(|d_n|-\delta)-\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\omega(W_{i+1})-\omega(W_i)}{\omega(W_{i+1})+\omega(W_i)}\right|\ \varepsilon= \frac{\omega(W_n)-\omega(W_1)}{\omega(W_n)+\omega(W_1)}\left(|d_n|-\delta-\frac{\varepsilon}{L}\right)\geq\frac{\omega(W_n)-\omega(W_1)}{\omega(W_n)+\omega(W_1)}(|d_n|/2-|d|/2)>0 \qquad (۲۱)$$

یعنی امتیاز بازیکن سیاه بیش‌تر است.

۲. بازی ورونوی وزن‌دار یک‌بعدی: سایت‌های غیرهمسان

در این بخش فرض می‌کنیم، دو بازیکن سفید و سیاه دارای نقاطی با وزن غیرهم‌سان هستند به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{n}\omega(W_i)=\sum_{i=1}^{n}\omega(B_i)$ و برای بازیکن سیاه استراتژی برد ارائه می‌دهیم. بازیکن سفید n نقطهٔ خود را در محیط دایره بازی می‌کند. سپس نوبت بازیکن سیاه است که n نقطه خود را با وزن‌های متفاوت از بازیکن سیاه به گونه‌ای در محیط دایره بازی کند که برنده بازی باشد. همانند بخش قبل بازه‌ها و نقاط بازیکن سفید را در جهت ساعت‌گرد نام‌گذاری می‌کنیم.

لم ۳: در هر بازهٔ دلخواه d_i $(1\leq i\leq n)$ و برای هر عدد حقیقی مثبت ε داده شده، اختلاف امتیاز دو بازیکن سیاه و سفید با فرض $\omega(W_i)\leq\omega(W_{i+1})$ می‌تواند حداکثر $\frac{\omega(B_i)-\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}(|W_{i+1}-W_i|)-\varepsilon/2$ باشد.

اثبات: اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه با توجه به امتیاز دو بازیکن در هر بازهٔ d_i، $1\leq i\leq n$، (براساس روابط (۹) و (۱۰)) بدین‌صورت است:

$$\frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\ \omega(W_i)}|W_i-B_i|+\frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_{i+1})}|W_{i+1}-B_i|$$
$$-(\frac{\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\ \omega(W_i)}|W_i-B_i|+\frac{\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\ \omega(W_{i+1})}|W_{i+1}-B_i|)$$
$$=\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\ \omega(W_i)}|W_i-B_i|+\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\ \omega(W_{i+1})}|W_{i+1}-B_i| \tag{۲۲}$$

در هر بازهٔ d_i، بدون این‌که از کلیت مسئله کم شود، فرض می‌کنیم: $\omega(W_i)<\omega(W_{i+1})$. اگر بازیکن سیاه نقطهٔ B_i را در نزدیکی نقطه با وزن بیش‌تر بازیکن سفید یعنی W_{i+1} و در فاصلهٔ ε از آن قرار دهد، داریم:

$$|W_{i+1}-B_i|=\varepsilon \quad ,|W_i-B_i|=|W_{i+1}-\ W_i|-\varepsilon \tag{۲۳}$$

آن‌گاه اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه برابر است با:

$$\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\ \omega(W_i)}(|W_{i+1}-\ W_i|-\varepsilon)+\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\ \ \omega(W_{i+1})}\varepsilon$$
$$=\ \frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\ \omega(W_i)}(|W_{i+1}-\ W_i|+\left[\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\ \omega(W_{i+1})}-\ \frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}\right]\varepsilon \tag{۲۴}$$

با توجه به $\omega(\mathrm{W_i})<\omega(\mathrm{W_{i+1}})$ داریم:

$$\left[\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i)+\ \omega(W_{i+1})}-\ \frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}\right]<-\frac{1}{2} \tag{۲۵}$$

پس اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه کم‌تر است از:

$$\frac{\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)}(|W_{i+1}-\ W_i|)\text{-}\frac{1}{2}\varepsilon \tag{۲۶}$$

با توجه به رابطهٔ (۲۶)، درمورد وزن نقاط بازیکن سیاه و سفید در بازهٔ d_i چهارحالت رخ می‌دهد:

۱. وزن نقطهٔ بازیکن سیاه بیش‌تر از وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازهٔ d_i باشد یا بیش‌تر از وزن یک نقطه بازیکن سفید و برابر با دیگر وزن نقطه بازیکن سفید باشد.

$$\omega(W_i)\ ,\ \omega(W_{i+1})\leq\omega(B_i) \tag{۲۷}$$

۲. وزن نقطهٔ بازیکن سیاه بین وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازهٔ $\mathrm{d_i}$ باشد یا ممکن است برابر با یکی از وزن نقطه بازیکن سفید باشد.

$$\omega(\mathrm{W_i})\ <\omega(\mathrm{B_i})<\ \omega(\mathrm{W_{i+1}}) \tag{۲۸}$$

۳. وزن نقطهٔ بازیکن سیاه کم‌تر از وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازهٔ $\mathrm{d_i}$ باشد یا کم‌تر از وزن یک نقطه بازیکن سفید و برابر با دیگر وزن نقطه بازیکن سفید باشد.

$$\omega(W_i)\ ,\ \omega(W_{i+1})>\omega(B_i) \tag{۲۹}$$

۴. وزن نقطهٔ بازیکن سیاه برابر با وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازهٔ باشد.

قضیهٔ۲: در صورتی که واریانس توزیع نقاط سیاه و سفید را به‌ترتیب با δ_{b}^2 و δ_w^2 نشان دهیم، بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است اگر $\delta_{\mathrm{b}}^2\ \leq\ \delta_w^2$.

اثبات: با توجه به لم (۳)، $\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)$ نقش مؤثری در اختلاف امتیاز بازیکن سیاه و سفید در بازهٔ d_i دارد. باتوجه به این‌که $|d_i|$ و ε مقادیر مثبتی هستند، در علامت رابطهٔ بالا تنها عبارت $\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i)$ تأثیر دارد.

با توجه به چهار حالت ذکرشده برای وزن نقاط بازیکن سیاه داریم:

در حالت اول رابطهٔ (۲۶) مثبت است و بازیکن سیاه امتیاز بیش‌تری را در این بازه دارد. در حالت دوم چنان‌که در لم (۱) نشان دادیم بازیکن سیاه امتیاز $|d_i|/2-\varepsilon$ را به‌دست می‌آورد. در حالت سوم $\omega(W_i),\ \omega(W_{i+1})>$

$\omega(B_i)$ رابطهٔ مذکور منفی است و بازیکن سیاه امتیاز کم‌تری را در این بازه دارد. در حالت چهارم اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه صفر است.

در حالت سوم که بازیکن سیاه امتیاز کم‌تری را به‌دست می‌آورد، برای جبران کمبود امتیاز از بازه‌های حالت اول استفاده می‌کند. در رابطهٔ (۲۶)، مؤلفه‌های دیگری در مقدار اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه تأثیر دارد. با توجه به این‌که:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(W_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega(B_i) \qquad (۳۰)$$

میانگین وزن نقاط سفید و سیاه برابرند و داریم:

$$\overline{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega(W_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega(B_i)}{n} \qquad (۳۱)$$

$$\omega(B_i)\text{-}\omega(W_i) = \omega(B_i)\text{-}\omega(W_i) + \overline{\omega} - \overline{\omega} = (\omega(B_i) - \overline{\omega}) - (\omega(B_i) - \overline{\omega}) \qquad (۳۲)$$

حال می‌توان پراکندگی وزن نقاط را نسبت به میانگین وزن نقاط در بازهٔ d_i به‌عنوان ملاک ارزیابی در نظر گرفت. اگر بازیکن سیاه نقطه‌ای با اختلاف وزن بیش‌تری با میانگین نسبت به بازیکن سفید داشته باشد، آن‌گاه نقاط دیگر بازیکن سیاه اختلاف وزن بیش‌تری با میانگین خواهند داشت. بنابراین پراکندگی نقاط بازیکن سیاه بیش‌تر از بازیکن سفید است. در این صورت است که حالت سوم بیش‌تر رخ می‌دهد و بازیکن سیاه نمی‌تواند کمبود امتیاز را جبران کند و برنده شود. پس زمانی که پراکندگی نقاط بازیکن سیاه بیش‌تر از بازیکن سفید است بازیکن سیاه نمی‌تواند برنده باشد. پراکندگی نقاط بازیکن سیاه برابراست با:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |\omega(B_i) - \overline{\omega}|}{n} \qquad (۳۳)$$

از طرفی پراکندگی وزن نقاط نسبت به میانگین آنها با واریانس نقاط مرتبط است و هر چه پراکندگی وزن نقاط نسبت به میانگین بیش‌تر باشد. واریانس (انحراف معیار) نقاط برای n بازه بیش‌تر است و از طرفی واریانس شاخص پایدارتری نسبت به پراکندگی آنها است.

$$\delta_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\omega(B_i) - \overline{\omega})^2}{n} \ \text{و}\ \delta_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\omega(W_i) - \overline{\omega})^2}{n} \qquad (۳۴)$$

پس زمانی که واریانس نقاط بازیکن سیاه بیش‌تر از واریانس نقاط بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه نمی‌تواند برنده شود. بنابراین همیشه استراتژی برد برای بازیکن سیاه وجود ندارد و به وزن‌های نقاط دو بازیکن مرتبط است. زمانی که واریانس بازیکن سیاه کمتر یا مساوی واریانس بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه می‌تواند برنده شود.

لم۴: اگر داشته باشیم $\delta_b^2 \le \delta_w^2$، بازیکن سیاه قادر است مهره‌های B_1، B_2، ...، B_{n-1} را به‌گونه‌ای در بازه‌های d_1، d_2، ...، d_{n-1} قرار دهد که برندهٔ بازی شود.

اثبات: بازه‌های d_i را براساس کم‌ترین وزن نقاط دو سر آن به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم و بازه‌های مرتب شده را مجدداً نام‌گذاری می‌کنیم: $D = \{D_1, D_2, D_3, \dots, D_n\}$. هم‌چنین نقاط بازیکن سیاه را با توجه به وزن آنها به صورت صعودی مرتب کرده و مجددا نام‌گذاری می‌کنیم: B_1، B_2، ...، B_{n-1}. بازیکن سیاه نقطهٔ با کوچک‌ترین وزن را در بازهٔ D_1 و به فاصلهٔ ε از نقطه سفید با وزن بیش‌تر قرار می‌دهد. این روند را در بازه‌های D_i ادامه می‌دهد.

با توجه به چهار حالت ذکر شده و اختلاف امتیاز دو بازیکن در لم (۳)، بازیکن سیاه می‌تواند در حالت اول امتیاز مثبت، در حالت دوم $|d_i|/2 - \varepsilon$ امتیاز، در حالت سوم امتیاز منفی و در حالت چهارم امتیاز صفر را به‌دست بیاورد.

با فرض این‌که k تعداد بازه‌های حالت اول و m تعداد بازه‌های حالت سوم و l تعداد بازه‌های حالت دوم باشد. برای این‌که مجموع امتیازهای به‌دست آمدهٔ بازیکن سیاه از امتیازهای از دست رفتهٔ او بیش‌تر باشد، باید داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega(B_i)-\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)} |d_i| - \varepsilon_1 < \sum_{q=1}^{l} \left|\frac{\omega(B_q)-\omega(W_q)}{\omega(B_q)+\omega(W_q)}\right| |d_q| - \varepsilon_2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega(B_j)-\omega(W_j)}{\omega(B_j)+\omega(W_j)} dj - \varepsilon_3 \quad (۳۵)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega(B_i)-\omega(W_i)}{\omega(B_i)+\omega(W_i)} |d_i| - \varepsilon < \sum_{q=1}^{l} \frac{1}{2} |d_q| + \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega(B_j)-\omega(W_j)}{\omega(B_j)+\omega(W_j)} |dj| \quad (۳۶)$$

با توجه به $\delta_b^2 \leq \delta_w^2$، بازیکن سیاه می‌تواند برنده بازی شود.

گزاره: بازی ورونوی وزن‌دار با نقاط وزن همسان حالت خاصی از بازی ورونوی وزن‌دار مهره‌های غیرهمسان است به‌طوری که در استراتژی برد بازیکن سیاه تنها یکی از بازه‌هایی که امتیاز بیش‌تری دارد را برای برد استفاده می‌کند.

بازی ورونوی وزن‌دار دو بعدی: سایت‌های با وزن همسان

در بازی ورونوی دوبعدی بررسی استراتژی برد بازیکن‌ها مشابه حالت یک‌بعدی نیست. تاکنون در بازی ورونوی دوبعدی به بررسی استراتژی برد برای بازی تک دوری و در موارد خاص چون ناحیهٔ مستطیلی با نسبت ρ پرداخته شده است. فرض می‌کنیم وزن‌های نقاط دو بازیکن یک‌سان و بازی تک‌دوری است. در حالت دوبعدی، محاسبهٔ ناحیه‌های دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی آسان نیست. زیرا همانند دیاگرام ورونوی معمولی نواحی ورونوی چندضلعی ساده نیست.

در بازی تک‌دوری، در ابتدا بازیکن سفید تمام نقاط خود را قرار می‌دهد. سپس نوبت به بازیکن سیاه که نقاط خود را قرار دهد. بازیکن سیاه دارای این امتیازبرای برد است که از وضعیت بازی بازیکن اول آگاه است. در ادامه به بررسی استراتژی برد برای بازیکن سیاه می‌پردازیم.

تعریف ۳: یک ناحیهٔ ورونوی را متقارن می‌نامیم اگر سایت نظیرش مرکز تقارن آن باشد. به‌عبارت دیگر با وصل کردن هر نقطه روی مرز آن به سایت نظیرش و امتداد آن به همان اندازه، نقطه‌ای روی مرز ناحیه به‌دست آید. در غیر این صورت آن را نامتقارن می نامیم.

در دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی، ناحیه‌های ورونوی وزن‌دار متقارن نیستند، مگر این‌که ناحیه‌های ورونوی دایره باشند. زیرا مرزهای ناحیه‌های ورونوی از کمآنهای دایره آپولونیوس بین نقطه‌ها به‌وجود می‌آیند. این ویژگی ناحیه‌های ورونوی وزن‌دار به برد بازیکن سیاه کمک می‌کند به‌طوری که بازیکن سیاه می‌تواند با استفاده از ناحیه‌های نامتقارن برنده بازی شود.

هنگامی که تمامی وزن نقاط دو بازیکن سیاه و سفید برابر باشد دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی دیاگرام ورونوی معمولی است. در این صورت استراتژی برد به‌وسیله فکت و همکارانش ارائه شده است [۴]. حال نشان می‌دهیم در حالتی که وزن‌ها برابر نباشند ولی دو بازیکن دارای مهره‌هایی با وزن‌های یکسان باشند، بازیکن سیاه می‌تواند برنده شود.

لم ۵: در بازی ورونوی با وزن نقاط همسان، بازیکن سیاه می‌تواند نقاط خود را به‌گونه‌ای در نواحی ورونوی حریف جای‌گذاری کند که یا نزدیک به نیمی از مساحت ناحیهٔ ورونوی یک نقطه سفید و یا بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی بازیکن سفید را به‌دست آورد.

اثبات: در دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی، ناحیه‌های ورونوی وزن‌دار به دوصورت متقارن و نامتقارن هستند. در نواحی ورونوی متقارن می‌توان خط l را طوری در نظر گرفت که مساحت ناحیه ورونوی را به دو ناحیهٔ مساوی تقسیم کند و سایت متناظرش (نقطه بازیکن سفید W_i) روی این خط قرار داشته باشد. بازیکن سیاه با وزن یک‌سان با وزن W_i می‌تواند نزدیک به نیمی از مساحت این ناحیهٔ ورونوی را به‌دست آورد. بنابراین در ناحیه‌های ورونوی متقارن بازیکن سیاه می‌تواند برای هر ε دلخواه نزدیک به نیمی از مساحت ناحیهٔ ورونوی W_i یعنی $(s_i/2 - \varepsilon)$ را به‌دست آورد که

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.8.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.47]

در آن s_i مساحت ناحیه ورونوی متناظر با نقطه سفید W_i است. در ناحیه‌های ورونوی نامتقارن خط l را طوری در نظر می‌گیریم که نقطه بازیکن سفید W_i روی خط l باشد و ناحیه ورونوی به دو قسمت نامساوی از نظر مساحت تقسیم شود. بازیکن سیاه نقاط با وزن یک‌سان را در نزدیکی نقطه سفید W_i در سمتی از خط l که مساحت بیش‌تر است، به‌گونه‌ای قرار می‌دهد که بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی را به‌دست آورد. پس بازیکن سیاه در ناحیه‌های نامتقارن می‌تواند بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی W_i را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۳: بازیکن سیاه در ناحیه دوبعدی با وزن نقاط همسان دارای استراتژی برد است.

اثبات: با توجه به لم (۵) بازیکن سیاه در ناحیه‌های ورونوی متقارن می‌تواند نزدیک به نیمی ازمساحت ناحیه‌های ورونوی را به‌دست آورد و در ناحیه‌های ورونوی نامتقارن بازیکن سیاه با نقاط با وزن یکسان سایت‌های آن می‌تواند بیش از نیمی از مساحت آن ناحیه ورونوی را به‌دست آورد. حال کافیست براساس مجموع امتیاز مازادی که بازیکن سیاه از نواحی نامتقارن به‌دست می‌آورد (مقدار آن را α بنامید)، ε را طوری انتخاب کنیم که اختلاف امتیاز مثبت شود، یعنی: $\varepsilon < \alpha/n$.

بحث و نتیجه‌گیری

دراین پژوهش، بازی ورونوی وزن‌دار تک دوری را در ناحیه پیوسته یک‌بعدی و دوبعدی برای نقاط وزن‌دار همسان بررسی کرده و استراتژی برد برای بازیکن سیاه ارائه کردیم و نشان دادیم در حالت یک‌بعدی، در بازی ورونوی وزن‌دار با نقاط غیرهمسان، زمانی که واریانس توزیع نقاط بازیکن سیاه کم‌تر یا مساوی از واریانس توزیع نقاط بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه می‌تواند استراتژی برد داشته باشد. هم‌چنین در حالت دوبعدی، با استفاده از این حقیقت که ناحیه ورونوی وزن‌دار مضربی به‌صورت نامتقارن است، نشان دادیم که بازیکن سیاه در بازی تک دوری، همواره می‌تواند برنده باشد. مسئله مذکور، در حالت‌هایی که بازی در بیش از یک دور انجام شود یا تعداد بازیکن‌ها بیش از دو باشد هم‌چنان باز است.

منابع

1. Ahn S. H., Cheng S., Cheong O., Golin M., van Oostrum R.,"Competitive facility location along a highway", In 7th Annual International Computing and Combinatorics Conference, LNCS, 2108, (2001) 237-246.
2. Bandyapadhyay S., Banik A., Das S., Sarkar H.,"Voronoi game on graphs", Theor, Comput, Sci., 562 (2015) 270-282.
3. Cheong O., Har-Peled S., Linial N., Matousek J.,"The one-round Voronoi game", Discrete & Computational Geometry, 31(1) (2004) 125-138.
4. Fekete S. P., Meijer H., "The One-Round Voronoi Game Replayed", Comput. Geom., 30(2), (2005) 81-94.
5. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N., "Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams", John Wiley & Sons (2009).
6. O'Rourke J., "Computational Geometry in C", Cambridge University Press (1998).
7. Rasheed M. M., Hasan M., Rahman M. S., "Maximum Neighbour Voronoi Games", WALCOM 2009, LNCS 5431 (2009) 93-104.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.8.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.47]