

کاربرد توزیع گمپرتز-پواسن در نظریه طول عمر

شهرام یعقوبزاده شهرستانی؛ دانشگاه پیام نور، ایران

دریافت ۹۴/۰۹/۰۱

پذیرش ۹۵/۰۸/۰۹

چکیده

توزیع گمپرتز-پواسن یک توزیع طول عمر سه پارامتری با تابع نرخ خطر افزایشی، کاهش‌ی، افزایشی-کاهشی و تک‌مدی شکل^۱ و ترکیبی از توزیع‌های گمپرتز و پواسن بریده شده در نقطه صفر است که در این مقاله پارامترهای این توزیع را به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد کرده و به منظور تأیید برآوردهای محاسبه شده، براساس نمونه تصادفی با حجم‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ از توزیع گمپرتز-پواسن شبیه‌سازی بررسی می‌شود. هم‌چنین به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی و با مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با چند توزیع دیگر طول عمر نشان می‌دهیم این توزیع مدلی مناسب برای برازش به داده‌های مربوط به طول عمر است.

واژه‌های کلیدی: توزیع گمپرتز، توزیع پواسن، توزیع گمپرتز - پواسن، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی.

مقدمه

توزیع گمپرتز نقش مهمی در الگوسازی نرخ مرگ و میر و آزمون‌های مربوط به طول عمر دارد، اسپیکلمن [2]، وترستند [3]. اما چون تابع نرخ خطر آن افزایشی، کاهش‌ی یا ثابت است برای مدل‌بندی پدیده‌هایی که تابع نرخ خطر آن‌ها افزایشی-کاهشی و تک‌مدی شکل باشد مناسب نیست. بنا براین توزیع‌هایی بر اساس توزیع گمپرتز مانند توزیع گمپرتز تعمیم یافته با تابع نرخ خطر کاهشی و تک‌مدی شکل (ال-گوهری) [4] و توزیع گمپرتز-پواسن با تابع نرخ خطر افزایشی، کاهش‌ی، افزایشی-کاهشی و تک‌مدی شکل (یعقوبزاده و همکاران) [1] ارائه شد. در این مقاله در بخش دوم برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن را ارائه کرده و در بخش سوم یک بررسی شبیه‌سازی از توزیع گمپرتز-پواسن انجام می‌دهیم، و هم‌چنین به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی، توزیع گمپرتز-پواسن را با چند توزیع دیگر طول عمر مقایسه می‌کنیم.

برآورد و استنباط

تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز - پواسن به صورت (۱) است:

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)} e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)}}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad x > 0, \alpha, \lambda > 0, \beta \neq 0 \quad (1)$$

که بر اساس نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β و λ [1] به ترتیب

$$\hat{\alpha} = \beta \cdot \left[\sum_{i=1}^n (e^{\beta \cdot x_i} - 1) A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) \right]^{-1} \tag{۲}$$

$$\hat{\beta} = \left\{ \alpha \cdot \left[\sum_{i=1}^n (1 - (1 - \beta x_i) e^{\beta \cdot x_i}) A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) \right] / \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{۳}$$

$$\hat{\lambda} = \left\{ [(e^\lambda - 1) \sum_{i=1}^n A(\alpha, \beta, \lambda, x_i)] / n \right\} \tag{۴}$$

است که در آن (α, β, λ) به صورت مقادیر اولیه پارامترهای (α, β, λ) است و

$$A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) = 1 - \lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

که به راحتی به روش نیوتن-رافسون $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ به دست می‌آید.

وقتی که حجم نمونه بزرگ باشد برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، یعنی $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ توزیع نرمال سه متغیره با میانگین (α, β, λ) و ماتریس کوواریانس $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ دارد [5]. بنا براین داریم:

$$\left((\hat{\alpha} - \alpha), (\hat{\beta} - \beta), (\hat{\lambda} - \lambda) \right) \rightarrow N_{\varphi} \left(\circ, I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) \right)$$

که $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ به صورت (۵) به دست می‌آید:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} -I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} & -I_{\alpha\lambda} \\ -I_{\beta\alpha} & -I_{\beta\beta} & -I_{\beta\lambda} \\ -I_{\lambda\alpha} & -I_{\lambda\beta} & -I_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) & Var(\hat{\beta}) & Cov(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) & Var(\hat{\lambda}) \end{bmatrix} \tag{۵}$$

به طوری که :

$$I_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 l_n}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1)^2 e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \alpha)(\partial \beta)} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

$$+ \frac{\lambda \alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\alpha\lambda} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \alpha)(\partial \lambda)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\beta\alpha} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \beta)(\partial \alpha)} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

$$+ \frac{\lambda \alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 l_n}{\partial \beta^2} = \frac{-2\alpha}{\beta^3} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] - \frac{\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{\beta x_i}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [\beta^2 x_i - \alpha + (1 - \beta^2)e^{\beta x_i}] e^{\beta x_i - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)} \\
I_{\beta\lambda} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\beta)(\partial\lambda)} = \frac{-\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (1 - \beta x_i) e^{\beta x_i - 1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\alpha} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\alpha)} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\alpha)(\partial\lambda)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\beta} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\beta)} = \frac{-\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 l_n}{\partial\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} + \frac{ne^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}.
\end{aligned}$$

در نتیجه فواصل اطمینان دو طرفه ی $(1 - \delta)$ درصدی پارامترهای α ، β و λ عبارتند از:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}, \quad \hat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}, \quad \hat{\lambda} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})}.$$

که $z_{\frac{\delta}{2}}$ صدک بالای $\frac{\delta}{2}$ درصدی توزیع نرمال استاندارد است.

کاربرد با داده‌ها

۱. بررسی شبیه‌سازی

در این بخش به کمک روابط (۲) تا (۴) بخش قبل و بر اساس نمونه‌های شبیه‌سازی شده از توزیع گمپرتز-پواسن و به روش نیوتن-رافسون، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای آن را به دست می‌آوریم که مراحل شبیه‌سازی عبارت است از:

گام اول: از توزیع یک‌نواخت $U(0, 1)$ نمونه‌های تصادفی ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ تایی تولید می‌کنیم.

گام دوم: به کمک گام اول و با توجه به رابطه زیر نمونه‌های تصادفی ۱۰۰ تا ۵۰۰ تایی از توزیع گمپرتز-پواسن با پارامترهای $\alpha = \beta = \lambda = 1$ تولید می‌کنیم که U دارای توزیع $U(0, 1)$ است.

$$X = \frac{1}{\beta} \log \left\{ 1 - \frac{\beta}{\alpha} \log \left[-\frac{1}{\lambda} \log(U + (1 - U)e^{-\lambda}) \right] \right\}$$

گام سوم: به کمک روابط (۲) تا (۴) و به روش نیوتن-رافسون برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β و λ را به دست می‌آوریم.

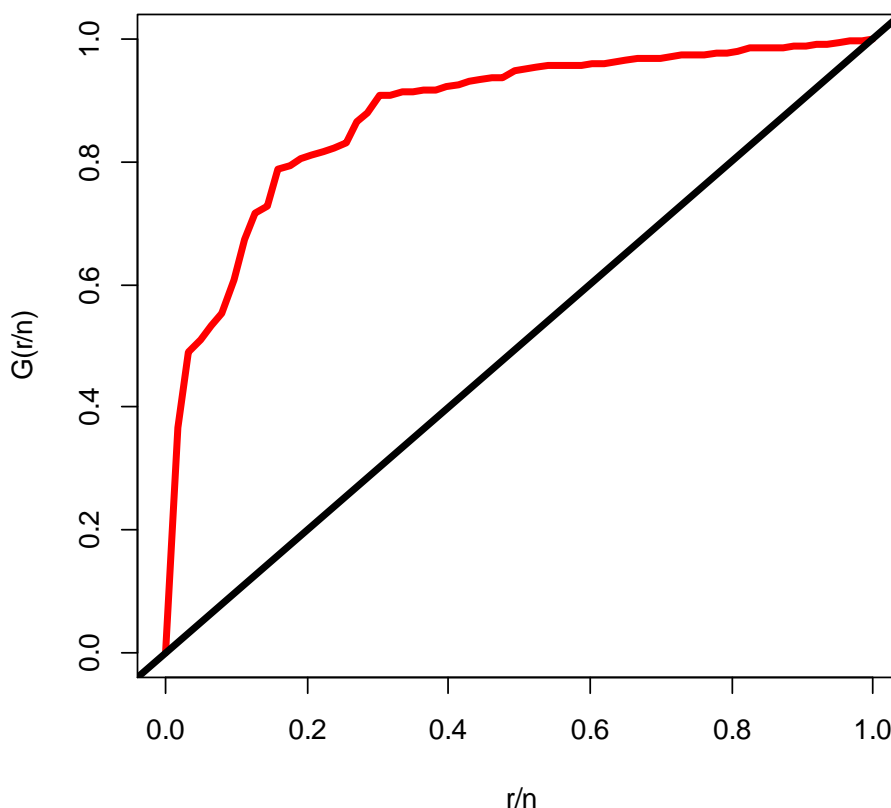
گام چهارم: گام‌های اول تا سوم را ۵۰۰۰ بار تکرار کرده و سپس میانگین برآوردهای پارامترها و میانگین مربعات خطای آن‌ها را به دست می‌آوریم که نتایج در جدول ۱ آمده است.

با توجه به جدول ۱ نتیجه می‌گیریم که با افزایش حجم نمونه میانگین مربع خطای میانگین برآوردهای ماکسیمم

درست‌نمایی پارامترهای α ، β و λ کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر دقت برآوردها زیاد می‌شود که دلیل خوبی برای معتبر بودن روابط (۲) تا (۴) است.

جدول ۱. میانگین برآورد پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن و میانگین مربعات خطای آن‌ها به کمک شبیه‌سازی

میانگین مربعات خطا	میانگین	پارامترها	حجم نمونه
$3/749 \times 10^{-7}$	۰/۰۰۹۶۵۸۷	$\hat{\alpha}$	۱۰۰
۰/۰۰۱۴۶۱۱	۱/۶۳۴۶۷۱	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۲۱۶۸۷۵	۲/۰۵۴۹۹۵	$\hat{\lambda}$	
$2/342 \times 10^{-8}$	۰/۰۰۴۹۲۸۱	$\hat{\alpha}$	۲۰۰
$3/493 \times 10^{-4}$	۱/۶۱۳۶۲۴	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۳۶۸۳۵	۲/۳۴۲۵۵۸	$\hat{\lambda}$	
$4/0.8 \times 10^{-9}$	۰/۰۰۳۴۱۲۲	$\hat{\alpha}$	۳۰۰
$1/629 \times 10^{-4}$	۱/۵۹۳۹۶۵	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۲۰۴۰۴	۱/۹۶۷۷۵۴	$\hat{\lambda}$	
$4/477 \times 10^{-10}$	۰/۰۰۲۴۴۳۲	$\hat{\alpha}$	۴۰۰
$2/317 \times 10^{-5}$	۱/۶۱۳۵۵۱	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۱۰۴۸۹	۲/۰۵۹۷۸۶	$\hat{\lambda}$	
$5/8.0 \times 10^{-10}$	۰/۰۰۱۹۶۰۵	$\hat{\alpha}$	۵۰۰
$4/127 \times 10^{-5}$	۱/۶۱۷۴۸۳	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۱۱۹۶۷	۲/۰۴۶۳۶۷	$\hat{\lambda}$	



شکل ۱. نمودار TTT-Plot برای داده‌های مربوط به مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتی‌متری

۲. تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش با استفاده از دو مجموعه داده‌های واقعی توزیع گمپرتز-پواسن را با چند توزیع دیگر طول عمر مقایسه می‌کنیم. اولین مجموعه داده‌ها شامل ۶۳ مقدار از مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتی‌متری است که در یک آزمایشگاه فیزیک در انگلستان اندازه‌گیری شده که این داده‌ها در اسمیت و نایلور [6] گزارش شده است. همچنین بارتو-سوزا و همکاران [7] از این داده‌ها برای برازش توزیع بتا نمایی تعمیم یافته و محمودی و سپهدار [8] برای برازش توزیع وایبول پواسن توانی استفاده کردند. ابتدا به کمک نمودار TTT-Plot (آرست [9]) شکل تابع نرخ خطر مربوط به داده‌ها را تشخیص می‌دهیم. این نمودار در شکل ۱ نشان داده شده و بیان‌گر افزایشی بودن تابع نرخ خطر این مجموعه داده‌ها است بنابراین می‌توان توزیع گمپرتز-پواسن را به این مجموعه از داده‌ها برآورد.

اکنون به کمک این داده‌ها توزیع گمپرتز-پواسن^۱ را با توزیع‌های بتا نمایی تعمیم یافته^۲، وایبول پواسن توانی^۳ و گمپرتز-لگاریتمی^۴ با تابع‌های چگالی زیر

$$f_{BGE}(x; \alpha, \lambda, a, b) = \frac{\alpha\lambda}{B(a, b)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a\alpha-1} [1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^{b-1}, x > 0$$

با

$$\alpha, \lambda, a, b > 0$$

و

$$f_{EWP}(x; \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \frac{\alpha\lambda\theta}{(e^\theta - 1)} \beta^\lambda x^{\lambda-1} e^{-(\beta x)^\lambda} (1 - e^{-(\beta x)^\lambda})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta x)^\lambda})^\alpha}, x > 0$$

با

$$\alpha, \beta, \lambda, \theta > 0$$

و

$$f_{GL}(x; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha\lambda e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)} (-\log(1-\lambda))^{-1} \left\{ 1 - \lambda \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)} \right] \right\}^{-1}$$

با $\alpha > 0, \beta \neq 0, 0 < \lambda < 1$ مقایسه می‌کنیم که نتایج در جدول ۲ شامل برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌ها ی مقایسه شده به همراه معیارهای اطلاع آکائیک^۵، اطلاع بی‌زی^۶، اطلاع آکائیک سازگار^۷ و اطلاع هانان-کوئین^۸ که در زیر تعریف می‌شوند آمده است و آن مدلی انتخاب می‌شود که دارای معیارهای کوچک‌تری باشد.

$$AIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k,$$

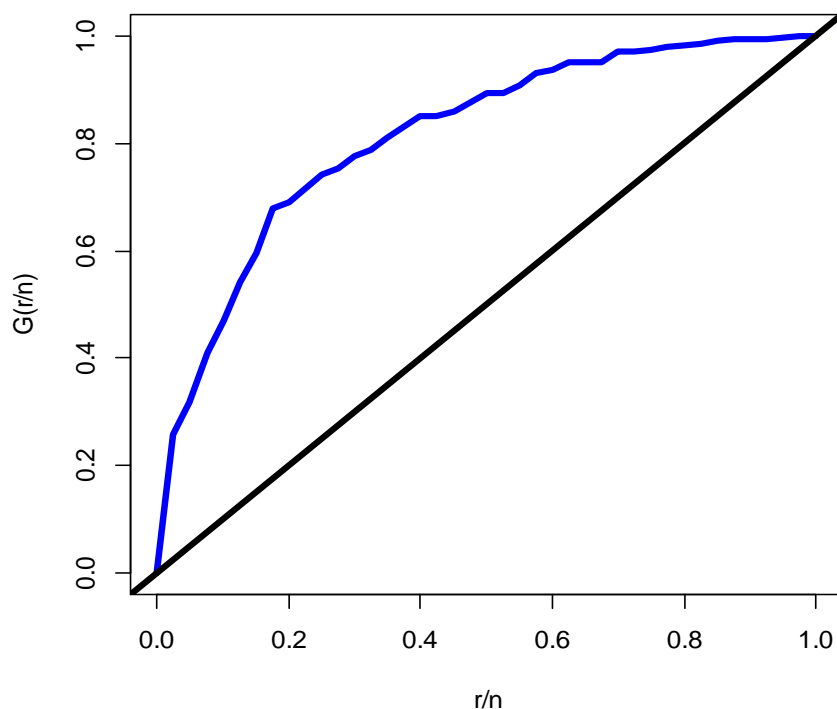
$$BIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k \log(n),$$

$$HQIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k \log(\log(n)),$$

$$CAIC = -2l(\hat{\Theta}) + \frac{2kn}{n-k-1}.$$

1. Gompertz-Poisson (GP)
2. Beta Generalized Exponential (BGE)
3. Exponentiated Weibull-Poisson (EWP)
4. Gompertz-Logarithmic (GL)
5. Akaike information criterion (AIC)
6. Bayesian information criterion (BIC)
7. Consistent Akaike information criterion (CAIC)
8. Hannan-Quinn information criterion (HQIC)

به طوری که $l(\hat{\theta})$ مقدار عددی لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌زای برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، k تعداد پارامترها، n حجم نمونه است. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که توزیع گمپرتز-پواسن برازش بهتری به داده‌ها در مقایسه با توزیع‌های مقایسه شده دارد که شکل ۳ نیز این مطلب را تأیید می‌کند. دومین مجموعه داده‌ها مربوط به مدت زمان از کار افتادگی (10^3 h) توربوشارژهای یک نوع موتور است که داده‌ها در ایکسو و همکاران [10] گزارش شده است. چنان‌که مشخص است به کمک نمودار TTT-Plot (شکل ۲) تابع نرخ خطر مربوط به داده‌ها افزایشی است. بنا براین برازش توزیع گمپرتز-پواسن به این مجموعه داده‌ها پیشنهاد می‌شود.



شکل ۲. نمودار TTT-Plot برای داده‌های مربوط به زمان خرابی توربوشارژهای یک نوع موتور

اکنون با استفاده از این داده‌ها به مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با توزیع‌های بتا نمایی تعمیم یافته، توزیع بتا

گمپرتز^۱ [11] با تابع چگالی احتمال

$$f_{BG}(x; \theta, \gamma, \alpha, \beta) = \frac{\theta e^{\gamma x}}{B(\alpha, \beta)} e^{-\frac{\beta \theta}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} \left[1 - e^{-\frac{\theta}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} \right]^{\alpha - 1}, \quad x > 0, \theta, \gamma, \alpha, \beta > 0$$

و توزیع گمپرتز تعمیم یافته^۲ با تابع چگالی احتمال

$$f_{GG}(x; \lambda, c, \theta) = \lambda \theta e^{cx} e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)} \right)^{\theta - 1}, \quad x > 0, \lambda, c, \theta > 0$$

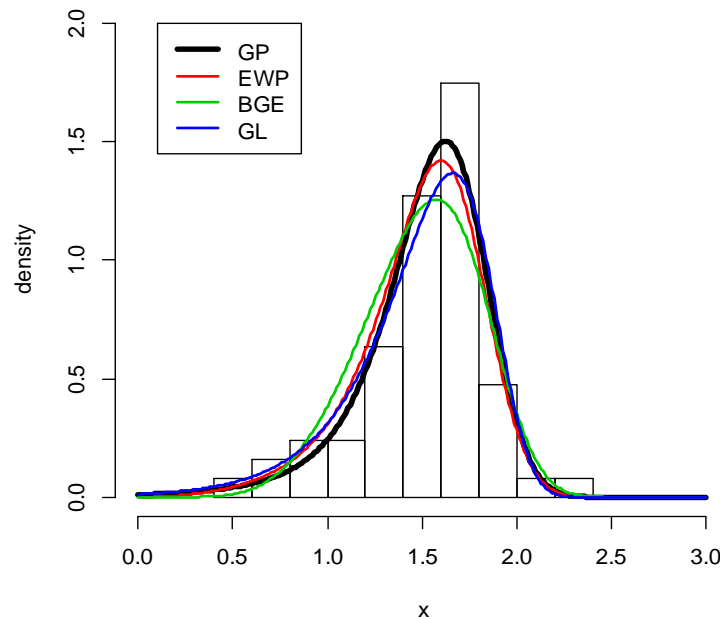
به کمک برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها مقایسه می‌کنیم. جدول ۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های اشاره شده در جدول ۲ را برای این دسته از توزیع‌ها نشان می‌دهد با توجه به این نتایج نیز مشخص می‌شود که توزیع بتا گمپرتز-پواسن نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری دارد که شکل ۴ نیز این مطلب را تأیید می‌کند.

1. Beta Gompertz (BG)

2. Generalized Gompertz (GG)

جدول ۲. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های مقایسه‌توزیع‌ها برای داده‌های مربوط به مقاومت الیاف شیشه‌ها

HQIC	CAIC	BIC	AIC	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	پارامتر	توزیع‌ها
				۰/۱۰۲۱۱۵۸	α	GP
۳۵/۲۴	۳۳/۱۲	۵۱/۵۷	۳۲/۷۱	۲/۳۷۳۰۴۳	β	
				۳/۶۶۷۸۷۶	λ	
				۰/۵۷۹۰۲۵۷	α	EWP
۳۴/۷۹	۳۴/۸۱	۵۹/۲۷	۳۴/۲	۰/۶۴۶۶۸۲۶	β	
				۵/۴۹۹۵۸۵	λ	
				۲/۴۶۵۳۰۷	θ	
				۲۴/۲۳۴۲۳	α	BGE
۴۲/۶۲	۳۹/۹۴	۶۴/۳۹	۳۹/۲۵	۰/۹۴۹۹۱۵۹	λ	
				۰/۳۷۸۶۲۱۳	a	
				۹۱/۵۴۴۷۶	b	
				۰/۱۶۴۶۷۲	α	GL
۳۸/۱۱	۳۵/۹۹	۵۴/۴۴	۳۵/۵۸	۳/۳۶۳۹۱۹	β	
				۰/۵۳۳۰۱۸۲	λ	



شکل ۳. نمودار تابع‌های احتمال توزیع‌های مقایسه شده بر اساس نتایج جدول ۱

هم‌چنین به کمک آماره‌های آزمون نیکویی برازش کرامر-ون میس^۱، آندرسن و دارلینگ^۲، واتسن^۳، کولموگوروف-اسمیرنوف^۴ و لیانو-شیموکاوا^۵ که در ادامه تعریف می‌شوند با توجه به دو مجموعه داده‌های اشاره شده به مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با سایر توزیع‌های ذکر شده می‌پردازیم که نتایج در جدول ۴ آمده است. با توجه به جدول ۴ مقادیر

1. Crame'r-VonMisses (CM)
2. Anderson and Darling (AD)
3. Watson (W)
4. Kolmogorov-Smirnov (K-S)
5. Lio-Shimokava (L-S)

آماره‌های آزمون نیکویی برازش برای توزیع گمپرتز - پواسن براساس هر دو مجموعه از داده‌ها نسبت به سایر مدل‌ها کوچک‌تر است. بنا براین توزیع گمپرتز - پواسن برازش بهتری به داده‌ها در مقایسه با توزیع‌های دیگر دارد.

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

$$U_n^2 = W_n^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})}{n} - \frac{1}{2} \right]^2$$

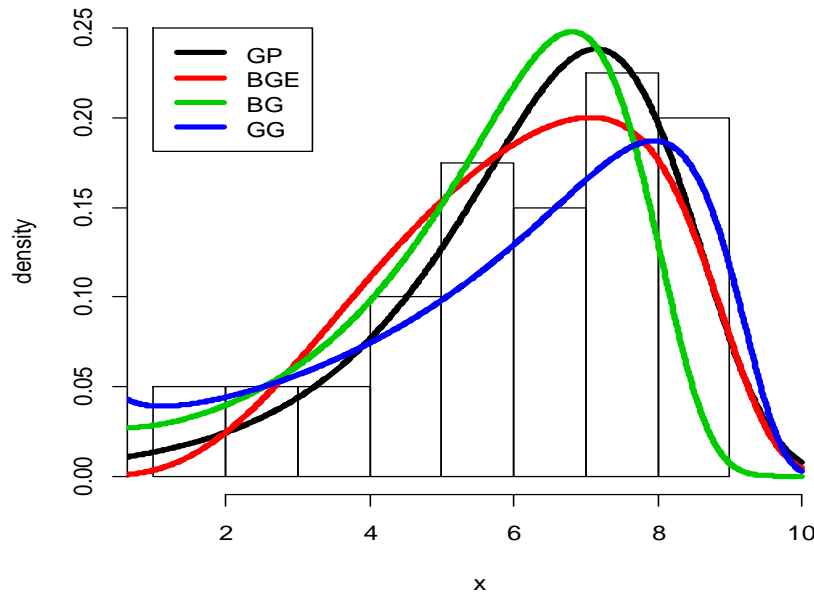
$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\log(F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})) + \log(1 - F(x_{n+1-i}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}))]$$

$$D_n = \max_i \left[\frac{i}{n} - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}), F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{i-1}{n} \right]$$

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\max_i \left[\frac{i}{n} - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}), F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{i-1}{n} \right]}{\sqrt{F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) [1 - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})]}}$$

جدول ۳. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های مقایسه‌ی توزیع‌ها برای دومین مجموعه داده‌ها

HQIC	CAIC	BIC	AIC	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	پارامتر	توزیع‌ها
۱۶۷/۶۹	۱۶۶/۵۳	۱۸۱/۹۹	۱۶۵/۸۶	۰/۰۰۸۵۹۵۳	α	GP
				۰/۶۱۲۶۳۸۳	β	
				۰/۳۱۳۳۰۹۸	λ	
۱۷۰/۰۶	۱۶۸/۵۰	۱۸۹/۱۳	۱۶۷/۶۲	۳۶/۱۷۶۸۲	α	BGE
				۰/۱۸۹۱۳۸۳	β	
				۰/۱۲۸۰۹۷۷	a	
				۱۴۱۵/۳۷۵	b	
۱۶۹/۷۴	۱۶۸/۴۴	۱۸۸/۸۰	۱۶۷/۲۹	۰/۰۰۲۱۲۲۱	θ	BG
				۰/۹۴۹۰۷۵۸	γ	
				۰/۵۴۳۷۰۹۱	α	
				۰/۵۴۷۷۶۵۸	β	
۱۷۵/۲۷	۱۷۴/۱۱	۱۸۹/۵۸	۱۷۳/۴۴	$۳/۳۵ \times 10^{-۶}$	λ	GG
				۱/۴۸۸۵۱۰	c	
				۰/۱۸۹۳۱۶۳	θ	



شکل ۴. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های مقایسه شده بر اساس نتایج جدول ۳
 جدول ۴. مقادیر آمارهای آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های اول و دوم

توزیع‌ها	آماره‌ها				
	CM	W	AD	K-S (p-value)	L-S
GP	۰/۱۰۱۳۰۳۶	۱۵/۳۶۱۰۶	۰/۶۳۲۸۹۲۰	۰/۱۰۳۲ (۰/۵۱۳)	۰/۲۹۹۰۲۴۶
EWP	۰/۱۱۴۱۱۲۵	۱۵/۳۶۷۱۰	۰/۶۹۰۸۵۳۸	۰/۱۱۶۶ (۰/۳۵۹)	۰/۳۹۷۰۱۵۱
BGE	۰/۲۸۸۲۵۶۸	۱۵/۵۱۵۸۱	۱/۴۹۳۳۶۹	۰/۱۷۲۵ (۰/۰۴۷)	۰/۵۳۹۹۵۷۴
GL	۰/۱۵۶۷۶۱۸	۱۵/۴۰۶۲۸	۰/۸۷۸۶۸۳۶	۰/۱۲۷۵ (۰/۲۵۷)	۰/۴۰۹۵۴۸۴
		دوم	داده‌های	مجموعه	
GP	۰/۰۳۸۴۳۶۱	۹/۵۴۵۵۳	۰/۲۶۷۱۵۳۵	۰/۰۸۷۱ (۰/۹۲۲)	۰/۳۲۱۴۸۹۸
BGE	۰/۰۸۱۱۷۶۶	۳۰/۷۳۰۲۷	۰/۵۱۴۰۶۱۹	۰/۱۰۳۹ (۰/۷۸۱)	۰/۶۵۱۲۳۱۹
BG	۰/۴۹۷۴۷۶۰	۹/۹۱۱۶۹۱	۴/۳۹۶۶۰۲	۰/۳۱۶۲ (۰/۰۰۰)	۲/۵۶۰۹۷۰
GG	۰/۲۰۵۰۱۲۷۰	۹/۶۶۵۰۱۷	۱/۳۷۶۵۰	۰/۱۵۲۹ (۰/۳۰۷)	۰/۸۵۴۴۸۲۵

هم‌چنین ماتریس کوواریانس مجانبی (۵) بر اساس هر دو مجموعه داده‌ها که در محاسبه فواصل اطمینان مجانبی

و انجام آزمون فرض پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن نقش عمده‌ای دارد به ترتیب بدین صورت است:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 14938 & 3503.2 & -157.08 \\ 3503.2 & 14.060 & -17.573 \\ -157.08 & -17.573 & 2.9890 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000012 & 0.000356 & 0.002739 \\ 0.000356 & 0.000922 & 0.013277 \\ 0.002739 & 0.013277 & 0.556562 \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 8.52 \times 10^5 & 104.82 & -156.89 \\ 104.82 & 0.04632 & 0.01256 \\ -156.89 & 0.01256 & 0.05224 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.82 \times 10^{-6} & -0.00430 & 0.00065 \\ -0.00430 & 31.881 & -2.0581 \\ 0.00065 & -2.0581 & 2.1592 \end{bmatrix}$$

بنا بر این فاصله اطمینان مجانبی نود و پنج درصدی پارامترهای α ، β و λ بر اساس مجموعه داده‌های اول به ترتیب

برابر (۰/۱۰۸۹، ۰/۰۹۵۳)، (۲/۴۳۲۶، ۲/۳۱۳۵) و (۵/۱۳۰۱، ۲/۲۰۵۷) و بر اساس مجموعه داده‌های دوم به ترتیب

برابر (۰/۰۰۸۸، ۰/۰۰۸۳)، (۰/۶۵۱۲، ۰/۵۴۷۸) و (۳/۱۹۳۴، ۲/۵۶۶۷) است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به کمک روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن که یکی از توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های سری توانی گمپرتز است برآورد شده و با استفاده از معیارهای اطلاع مختلف و آماره‌های آزمون نیکویی برازش و به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی و مقایسه با چند توزیع دیگر طول عمر، نشان دادیم که مدلی مناسب برای برازش به داده‌ها است. بنا براین به نظر می‌رسد که توزیع گمپرتز-پواسن می‌تواند مدلی مناسب برای طول عمر باشد. هم‌چنین با برآورد ماتریس کوواریانس مجانبی پارامترها، فاصله اطمینان مجانبی پارامترها را بر اساس مجموعه داده‌های واقعی به دست آوردیم.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر و داوران مجله برای بررسی مقاله نهایت تشکر را دارند.

منابع

1. یعقوب‌زاده ش.، شادرخ ع.، یارمحمدی مسعود، "معرفی یک توزیع جدید طول عمر از خانواده توزیع‌های سری توانی گمپرتز"، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، دوره ۱۷، شماره ۲ (۱۳۹۴).
2. Spiegelman M., "Introduction to Demography", Rev. ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press (1968).
3. Wetterstrand W. W. H., "Recent Mortality Experience Described by Gompertz's and Makeham's Laws--Including a Generalization", Paper presented at Actuarial Research Conference at Ball State University, August. (1978) ARCH.
4. El-Gohary A., Alshamrani A., Al-Otaibi A. N., "The generalized Gompertz", Applied Mathematical Modelling, 37(2013) 13-24.
5. Gupta R. D., Kundu D., "Generalized exponential distributions", Aust. N. Z. J. Stat. 41 (1999) 173-188.
6. Smit R. L., Nalor J. C., "A comparison of maximum likelihood Bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution", Applied Statistics, 36(1987) 358-369.
7. Barreto-Souza W., "The beta Generalized exponential distribution", Journal of statistical Computation and Simulation. 2 (2010) 159-172.
8. Mahmoudi E., Sepahdar A., "Exponentiated Weibull-Poission distribution: Model, properties and applications Lifetime distribution", Mathematics and Computers in. 92 (2013) 76-97.
9. Aarset M. V., "How to identify bathtub hazard rate", IEEE Transactions Reliability, 36 (1987) 106-108.
10. Xu K., Xie M., Tang L. C., Ho S. L., "Application of neural networks in forecasting engine systems reliability", Applied Soft Computing, 2 (4) (2003) 255-268.
11. Jafari A., Tahmasebi S., Alizadeh M., "The Beta-Gompertz distribution", Revista Colombiana de Estadística. 37 (2014) 136-156.