

توپولوژی معکوس در BL - جبرها

فرشته فروزش*، سید فرهاد سجادیان
مجتمع آموزش عالی بم، دانشکده ریاضی و محاسبات نرم،
مهتا بدرود
دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دریافت ۹۶/۰۸/۰۴ پذیرش ۹۸/۰۴/۲۵

چکیده

در این مقاله، به معرفی توپولوژی معکوس در BL - جبرها می‌پردازیم و فشردگی، هاسدورف، T_0 و T_1 بودن توپولوژی معکوس روی مجموعه همه فیلترهای اول مینیمال BL - جبر A بررسی می‌شود. همچنین ظریف‌تر بودن توپولوژی زاریسکی از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ را نشان می‌دهیم. در این راستا، ملاحظه می‌شود که تحت شرایطی این دو توپولوژی روی $Min(A)$ معادل می‌شوند. در پایان، با معرفی مفهوم کم-توسیع نشان داده می‌شود نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی زاریسکی، پیوسته است.

واژه‌های کلیدی: فیلترهای اول مینیمال، توپولوژی زاریسکی، توپولوژی معکوس، کم-توسیع.
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۵۵UXX و ۰۳G۲۵.

مقدمه و پیش‌نیازها

اولین بار، مفهوم BL - جبرها به وسیله هایک^۱ معرفی شدند [۵]. او یک برهان جبری از قضیه تمامیت "منطق پایه‌ای" (BL) ارائه داد که بر پایه نرم‌های مثلثی پیوسته بیان شده است. در ادامه تورونن^۲، BL - جبرها را به وسیله سیستم‌های قیاسی بررسی کرد [۱۰].

در حقیقت، BL - جبرها حالت خاص شبکه‌های مانده هستند و آنها بر اساس منطق پایه‌ای چند ارزشی تعریف می‌شوند که به وسیله هایک به صورت جبری مطرح شدند. انگیزه تعریف BL - جبرها بدین صورت است: در ابتدا، BL - جبرها ساختار جبری از منطق گزاره‌ای که منطق پایه‌ای نامیده می‌شوند، به وجود می‌آیند که این منطق‌های پایه‌ای منطق‌های چندارزشی هستند، که عبارتند از: منطق لوکاسویچ^۳، منطق گودل، منطق ضربی است که ارزش درستی گزاره در بازه $[0, 1]$ را نشان می‌دهد. سپس، BL - جبرها یک ساختار جبری برای بررسی t - نرم‌های پیوسته روی $[0, 1]$ ارائه می‌دهند.

در ادامه لئوستین^۴ (۲۰۰۳)، توپولوژی زاریسکی^۵ در BL - جبرها را معرفی کرد که بدین شرح است [۷]:

*نویسنده مسئول frouzesh@bam.ac.ir

1. Hajek
2. Turunen
3. Lukasiewicz
4. Leustean
5. Zariski

فرض کنید F یک فیلتر از BL -جبر A باشد و مجموعه همه فیلترهای اول را با $Spec(A)$ نمایش داده شود و مجموعه‌های $v_A(F) = \{P \in Spec(A) : F \subseteq P\}$ و $u_A(F) = \{P \in Spec(A) : F \not\subseteq P\}$ به ترتیب مجموعه‌های باز و بسته این توپولوژی هستند که خانواده $\{u_A(F)\}_{F \subseteq A}$ ، خانواده مجموعه‌های باز توپولوژی زاریسکی است. او نشان داد که این توپولوژی فضایی، T_0 و فشرده است و برای $a \in A$ مجموعه‌های باز $u_A(a) = \{P \in Spec(A) : a \notin P\}$ تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی زاریسکی روی $Spec(A)$ می‌دهند.

چون در توپولوژی زاریسکی $v_A(F)$ ها مجموعه‌های بسته توپولوژی‌اند اما در توپولوژی معکوس $V_A(F) = v_A(F) \cap Min(A)$ باز در نظر گرفته شده‌اند، از این‌رو این توپولوژی را توپولوژی معکوس نام نهادیم. معرفی توپولوژی معکوس در MV -جبرها که به وسیله فروزش و دیگران انجام شده است [۴]، انگیزه‌ای شد که ما نیز به بررسی و مطالعه توپولوژی معکوس در BL -جبرها بپردازیم.

در این مقاله، ما به معرفی توپولوژی معکوس روی مجموعه همه فیلترهای اول مینیمال A که با $Min(A)$ نمایش داده می‌شود، می‌پردازیم و خواص‌های توپولوژیکی مانند فشرده‌گی، هاسدورف، T_0 و T_1 بودن آن فضا را بررسی می‌کنیم. از آن‌جاکه داریم $Min(A) \subseteq Spec(A)$ ، توپولوژی زیر فضایی زاریسکی را روی $Min(A)$ بررسی کرده و ثابت می‌کنیم توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است. در این راستا، شرایطی برای معادل بودن توپولوژی زاریسکی و توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ بیان می‌کنیم. در پایان، با معرفی مفهوم یک توسیع BL -جبر، به بررسی و مطالعه ارتباط بین فیلترهای اول مینیمال آنها می‌پردازیم. در ادامه، مفهوم کم-توسیع را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم نگاهت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی پیوسته است.

تعاریف و قضایای استفاده شده در اثبات مطالب این مقاله بدین شرح است:

تعریف ۱. [۹]، جبر $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ از نوع $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ مفروض است. A را یک BL -جبر گویند، اگر

$$1. (A, \odot, 1) \text{ یک تکواره جابه‌جایی باشد.}$$

$$2. (A, \wedge, \vee, 0, 1) \text{ مشبکه‌ای با کوچک‌ترین عضو } 0 \text{ و بزرگ‌ترین عضو } 1 \text{ باشد.}$$

$$3. \text{ برای هر } a, b, c \in A, \text{ روابط زیر برقرار باشد:}$$

$$a \odot c \leq b \text{ اگر و تنها اگر } c \leq a \rightarrow b$$

$$a \wedge b = a \odot (a \rightarrow b)$$

$$(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$$

$$(n \text{ بار}) a^n = a \odot \dots \odot a \text{ تعریف می‌کنیم.}$$

قضیه ۲. [۹]، در هر BL -جبر A ، برای هر $a, b, c \in A$ داریم:

$$a^m \vee b^n \geq (a \vee b)^{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ و } a \vee (b \odot c) \geq (a \vee b) \odot (a \vee c)$$

تعریف ۳. [۹]، زیر مجموعه ناتهی F از BL -جبر A را فیلتر می‌نامیم اگر

$$1. \text{ برای هر } a, b \in F \text{ داشته باشیم } a \odot b \in F$$

۲. اگر $a \in F$ ، $a \leq b$ ، آنگاه $b \in F$.

مجموعه همه فیلترهای A را با $F(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. [۹]، فرض کنید X زیر مجموعه‌ای از BL -جبر A باشد. فیلتر تولید شده به وسیله X را با نماد $\langle X \rangle$

نمایش می‌دهیم. اگر $X = \emptyset$ ، آن‌گاه $\langle X \rangle = \{1\}$ و اگر $X \neq \emptyset$ داریم:

$$\langle X \rangle = \{y \in A : x_1 \odot x_2 \odot \dots \odot x_n \leq y, n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

به‌وضوح اگر $a \in A$ ، آنگاه $\langle a \rangle = \{b \in A : a^n \leq b, n \in \mathbb{N}\}$.

قضیه ۵. [۹]، برای هر خانواده $\{F_i\}_{i \in I}$ از فیلترهای BL -جبر A داریم

$$\bigwedge_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ و } \bigvee_{i \in I} F_i = \langle \bigcup_{i \in I} F_i \rangle$$

قضیه ۶. [۹]، فرض کنید A یک BL -جبر و $a, b \in A$ در این صورت داریم:

۱. اگر $a \leq b$ ، آن‌گاه $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$.

۲. $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle = \langle a \odot b \rangle = \langle a \wedge b \rangle$.

۳. $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \vee b \rangle$.

تعریف ۷. [۹]، فیلتر F از BL -جبر A سره است اگر $F \neq A$ باشد.

- F یک فیلتر سره است اگر و تنها اگر $0 \notin F$ باشد.

- فیلتر سره P از A را اول گوییم، اگر برای هر $a, b \in A$ ، داشته باشیم $a \vee b \in P$. آن‌گاه $a \in P$ یا

$b \in P$ یا به‌طور معادل، فیلتر P را اول گوییم اگر و تنها اگر برای هر دو فیلتر F, G که $F \cap G \subseteq P$ نتیجه

شود $F \subseteq P$ یا $G \subseteq P$.

- فرض کنید A, B دو BL -جبر باشند. تابع $f: A \rightarrow B$ را هم‌ریختی BL -جبری از A به B گوییم، اگر در

شرایط زیر برای هر $x, y \in A$ صدق کند:

$$1. f(0_A) = 0_B$$

$$2. f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$$

$$3. f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y)$$

- مجموعه همه فیلترهای اول BL -جبر A را با $Spec(A)$ نمایش می‌دهیم.

- فیلتر اول F از BL -جبر A را مینیمال گوییم، اگر $Q \in Spec(A)$ موجود باشد به‌طوری‌که $Q \subseteq F$ ، آن‌گاه

$F = Q$ نتیجه شود. مجموعه همه فیلترهای اول مینیمال BL -جبر A را با $Min(A)$ نمایش می‌دهیم.

- زیر مجموعه S از A را \vee -بسته گوییم، اگر $a, b \in S$ ، آن‌گاه $a \vee b \in S$. مجموعه همه \vee -بسته‌ها روی

A را با نماد $S(A)$ نمایش می‌دهیم [۷].

برای هر $s \in S(A)$ در BL -جبر A رابطه θ_s را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in \theta_s \text{ که } x \vee e = y \vee e \text{ و } e \in S \cap B(A) \text{ وجود دارد اگر و تنها اگر } (x, y) \in \theta_s.$$

به‌سادگی مشخص می‌شود که θ_s رابطه هم‌نهشتی است.

اگر $x \in A$ ، $\frac{x}{S}$ را کلاس هم‌ارزی x نسبت به θ_S گویند و مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی نسبت به رابطه θ_S را با نماد $A[S] = \frac{A}{\theta_S}$ نمایش می‌دهند و نگاشت $P_S: A \rightarrow A[S]$ را نگاشت کانونی گویند که با ضابطه $P_S(x) = \frac{x}{S}$ برای هر $x \in A$ مشخص می‌شود. همچنین واضح است که در $A[S]$ برای هر $x, y \in A$ این روابط برقرار است:

$$0 = \frac{0}{S}, 1 = \frac{1}{S}, \frac{x}{S} \vee \frac{y}{S} = \frac{(x \vee y)}{S}, \frac{x}{S} \odot \frac{y}{S} = \frac{(x \odot y)}{S}, \frac{x}{S} \rightarrow \frac{y}{S} = \frac{(x \rightarrow y)}{S}$$

هم‌چنین P_S هم‌ریختی پوشای BL -جبری است.

فیلتر اول P مفروض است. اگر $S = A - P$ باشد، به‌وضوح S - بسته است و در این صورت $A[S]$ را با نماد A_P نمایش می‌دهیم که فیلتر اول آن به‌صورت $PA_P = \{\frac{x}{S} : x \in P\}$ است.

لم ۸. [۹]، فرض کنید A یک BL -جبر باشد. در این صورت داریم

$$\bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P = \bigcap_{Q \in \text{Min}(A)} Q = \{1\}$$

قضیه ۹. [۲] اگر F یک فیلتر از BL -جبر A باشد و S زیر مجموعه ناتهی V -بسته از A باشد، به‌طوری‌که $F \cap S = \emptyset$ ، آن‌گاه یک فیلتر اول P از A وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq P$ و $P \cap S = \emptyset$.
قضیه ۱۰. [۹] اگر $f: A \rightarrow B$ هم‌ریختی BL -جبری باشد و P یک فیلتر اول از B باشد آن‌گاه $f^{-1}(P)$ فیلتر اول از A است.

فرض کنید F یک فیلتر از BL -جبر A باشد. تعریف می‌کنیم:

$$u_A(F) = \{P \in \text{Spec}(A) : F \not\subseteq P\}, U_A(F) = \{P \in \text{Min}(A) : F \not\subseteq P\}$$

$$v_A(F) = \{P \in \text{Spec}(A) : F \subseteq P\}, V_A(F) = \{P \in \text{Min}(A) : F \subseteq P\}$$

اگر $F = \{a\}$ ، آن‌گاه $U_A(F), V_A(F), u_A(F), v_A(F)$ را به‌ترتیب با $U_A(a), V_A(a), u_A(a), v_A(a)$ نمایش می‌دهیم. به‌طوری‌که

$$u_A(a) = \{P \in \text{Spec}(A) : a \notin P\}, U_A(a) = \{P \in \text{Min}(A) : a \notin P\}$$

$$v_A(a) = \{P \in \text{Spec}(A) : a \in P\}, V_A(a) = \{P \in \text{Min}(A) : a \in P\}$$

قضیه ۱۱. [۷]، فرض کنید A یک BL -جبر باشد. برای هر $Y, X \subseteq A$ و $a, b \in A$ داریم:

$$U_A(\langle X \rangle) = U_A(X) \text{ و } V_A(X) = V_A(\langle X \rangle) \quad ۱.$$

$$U_A(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} U_A(X_i) \text{ و } V_A(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} V_A(X_i) \quad ۲.$$

$$U_A(a) \cap U_A(b) = U_A(a \vee b) \quad ۳.$$

$$V_A(X) \cup V_A(Y) = V_A(\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle) \quad ۴.$$

$$U_A(X) \cup U_A(Y) = U_A(\langle X \rangle \cup \langle Y \rangle) \quad ۵.$$

$$\text{اگر } X \subseteq Y \text{، آنگاه } U_A(X) \subseteq U_A(Y) \quad ۶.$$

قضیه ۱۲. [۳]، قرار دهید $\tau = \{u_A(F) : F \in F(A)\}$ و $X = Spec(A)$ در این صورت (X, τ) یک فضای توپولوژیک است.

توپولوژی τ روی X در قضیه ۱۰، ۱۲ را توپولوژی زاریسکی می‌نامیم.

لم ۱۳. [۷]، گردایه $\beta = \{u_A(a)\}_{a \in A}$ یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $Spec(A)$ است.

نتیجه ۱۴. گردایه $\{U_A(a)\}_{a \in A}$ یک پایه برای توپولوژی زیر فضایی روی $Min(A)$ است.

تعریف ۱۵. [۸]، فرض کنید X یک فضای توپولوژی و x_1, x_2 دو نقطه متمایز X باشند:

۱. X را T_0 گوئیم هرگاه یک همسایگی شامل یکی از این دو نقطه موجود باشد به طوری که شامل دیگری نباشد.

۲. X را T_1 گوئیم هرگاه همسایگی‌های u_1 و u_2 به ترتیب شامل x_1 و x_2 موجود باشند به طوری که $x_1 \notin u_2$ و $x_2 \notin u_1$.

۳. X را هاسدورف یا T_2 گوئیم هرگاه همسایگی‌های u_1 و u_2 به ترتیب شامل x_1 و x_2 موجود باشند به طوری که $u_1 \cap u_2 = \emptyset$.

۴. فضای توپولوژی X را صفر بعدی گوئیم هرگاه پایه‌ای برای X موجود باشد که هر عضو آن بسته باشد.

قضیه ۱۶. [۶]، فرض کنید A, B زیر فضاهای فشرده مجزا از فضای هاسدورف X باشند، در این صورت مجموعه‌های U, V مجزا موجودند که به ترتیب شامل A, B هستند.

قرارداد: در این مقاله A را یک BL -جبر در نظر بگیرید.

نتایجی از فیلترهای اول مینیمال در BL -جبرها

در این بخش، به مطالعه فیلترهای اول مینیمال می‌پردازیم. در ادامه، مفهوم توسیع و کم-توسیع در یک BL -

جبر را معرفی می‌کنیم و به بررسی برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

قضیه ۱۷. فرض کنید A یک BL -جبر و F یک فیلتر اول باشد. F فیلتر اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in F, r \in A - F$ موجود باشد به قسمی که $x \vee r = 1$ باشد.

برهان: فرض کنید $F \in Min(A)$ باشد و $x \in F$ موجود باشد به طوری که برای هر $r \in A - F, x \vee r \neq 1$ برقرار باشد. به وضوح $S = \{x \vee r : r \in A - F\}$ یک زیر مجموعه V -بسته است و $\{1\} \in F(A)$.

هم‌چنین $S \cap \{1\} = \emptyset$ است. بنا به قضیه ۹، $Q \in Spec(A)$ وجود دارد به طوری که $\{1\} \subseteq Q$ و $Q \cap S = \emptyset$. دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: فرض کنید $Q \subseteq F$ باشد. چون $F \in Min(A)$ است، از این‌رو، $F = Q$ و در نتیجه $x \in Q$ از طرفی $x \vee 0 = x$ و $0 \notin F$ ، لذا $x \in S$ بنابراین $Q \cap S \neq \emptyset$ که تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $Q \not\subseteq F$ باشد. بنابراین وجود دارد $u \in Q - F$ چون $u \leq u \vee x$ و $u \in Q$ در نتیجه $u \vee x \in Q$ از طرفی $u \vee x \in S$ ، لذا $Q \cap S \neq \emptyset$ که تناقض است.

برعکس، فرض کنید برای هر $r \in A - F, x \in F$ وجود دارد به قسمی که $r \vee x = 1$ نشان می‌دهیم $F \in Min(A)$ فرض کنید $K \in Spec(A)$ به طوری که $K \subsetneq F$ ، بنابراین $x \in F - K$ وجود دارد. حال بنا به

فرض $r \in A - F$ موجود است به قسمی که $r \vee x = 1 \in K$ در نتیجه $r \vee x = 1 \in K$ و چون $x \notin K$ و K اول است، $r \in K$ که تناقض است.

یادآوری می‌کنیم، اگر F فیلتری از A باشد، آنگاه $\{x \in A \mid x \vee y = 1, \forall y \in F\}$ یک فیلتر از A است [۵].

قضیه ۱۸. فرض کنید A یک BL -جبر، $P \in \text{Min}(A)$ و F یک فیلتر با تولید متناهی باشد. در این صورت $F \subseteq P$ اگر و تنها اگر $\text{Ann}_A(F) \not\subseteq P$.

برهان: قرار دهید $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. فرض کنید $F \subseteq P$. از آنجا که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_i \in F \subseteq P$ نتیجه می‌شود $a_i \in P$ ، برای هر $1 \leq i \leq n$. از این‌رو، بنا به قضیه ۱۷، وجود دارد به طوری که $u_i \vee a_i = 1$ برای هر $1 \leq i \leq n$. حال $u = u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_n$ در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم $u \in \text{Ann}_A(F) - P$. به‌وضوح $u \in A - P$. هم‌چنین بنا به تعریف ۴، برای هر $x \in F$ داریم

$$x \leq a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \dots \odot a_{i_n} \text{ و طبق قضیه ۱۷ نتیجه می‌شود:}$$

$$1 = (u \vee a_{i_1}) \odot (u \vee a_{i_2}) \odot \dots \odot (u \vee a_{i_n}) \leq u \vee (a_{i_1} \odot \dots \odot a_{i_n}) \leq u \vee x$$

در نتیجه، برای هر $x \in F$ داریم $u \vee x = 1$ ، بنابراین $u \in \text{Ann}_A(F)$ لذا $\text{Ann}_A(F) \not\subseteq P$.

برعکس، فرض کنید $\text{Ann}_A(F) \not\subseteq P$. از این‌رو، وجود دارد $x \in \text{Ann}_A(F) - P$. پس برای هر $a_i \in F$ داریم $x \vee a_i = 1 \in P$ زیرا $x \vee a_i = 1 \in P$ و $x \notin P$ ، نتیجه می‌شود برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_i \in P$. بنابراین $F \subseteq P$. **لم ۱۹.** فرض کنید A یک BL -جبر باشد. اگر $x \in A$ ، $1 \neq x$ ، آنگاه $P \in \text{Min}(A)$ وجود دارد به طوری که $x \notin P$. **برهان:** فرض کنید $x \in A$ ، $1 \neq x$ و برای هر $P \in \text{Min}(A)$ داشته باشیم $x \in P$. از این‌رو، $x \in \bigcap_{P \in \text{Min}(A)} P$ بنا به لم ۸ نتیجه می‌شود $\bigcap_{P \in \text{Min}(A)} P = \bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P = \{1\}$ ، بنابراین $x = 1$ که تناقض است.

نکته ۲۰. اگر F, G فیلترهایی از BL -جبر A باشند، در این صورت $U_A(F \wedge G) = U_A(F) \cap U_A(G)$.

برهان: بنا به قضیه ۱۱ قسمت (۶)، چون $F \wedge G \subseteq F, G$ نتیجه می‌شود

$$U_A(F \wedge G) \subseteq U_A(F), U_A(G).$$

بنابراین داریم:

$$U_A(F \wedge G) \subseteq U_A(F) \cap U_A(G).$$

حال فرض کنید $P \in U_A(F) \cap U_A(G)$ باشد. از این‌رو، $F \not\subseteq P$ و $G \not\subseteq P$ و بنا به تعریف ۷ نتیجه می‌شود $F \wedge G \not\subseteq P$ و در نتیجه $P \in U_A(F \wedge G)$ از این‌رو، داریم:

$$U_A(F) \cap U_A(G) \subseteq U_A(F \wedge G).$$

بنابراین

$$U_A(F) \cap U_A(G) = U_A(F \wedge G)$$

نتیجه می‌شود.

تذکر ۲۱. فرض کنید F و G فیلترهای با تولید متناهی از BL -جبر A باشند. در این صورت:

$$F \wedge G \text{ یک فیلتر با تولید متناهی است.} \quad .1$$

۲. $F \vee G$ یک فیلتر با تولید متناهی است.

تعریف ۲۲. فرض کنید B زیر جبری از A باشد. A را توسعه B گویند و با نماد $B \hookrightarrow A$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۳. بازه $A = [0, 1]$ را در نظر بگیرید. برای هر $x, y \in A$ ، عمل‌های \odot, \rightarrow را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$x \odot y = \min\{x, y\}, \quad x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن‌گاه $(A, \min, \max, \odot, \rightarrow, 1)$ یک BL -جبر است [۹].

حال برای هر عدد صحیح $n \geq 2$ مجموعه $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ زیر جبری از A است. از این‌رو، $L_n \hookrightarrow A$ برای هر $n \geq 2$ یک توسعه است.

قضیه ۲۴. فرض کنید $B \hookrightarrow A$ یک توسعه از BL -جبرها باشد. برای هر $Q \in \text{Min}(A)$ ، $P \in \text{Spec}(B)$ وجود دارد به قسمی که $Q \cap B \subseteq P$ ، بعلاوه، اگر $P \in \text{Min}(B)$ باشد، $Q \in \text{Min}(A)$ وجود دارد به قسمی که $P = Q \cap B$.

برهان: قرار دهید $D = \{Q \in \text{Spec}(A) : Q \cap B \subseteq P\}$. بنا به لم زرن، کافی است نشان دهیم $D \neq \emptyset$. فرض کنید $\psi: B \rightarrow B_P$ با ضابطه $\psi(b) = b/S$ ، $\varphi: A \rightarrow A_P$ با ضابطه $\varphi(a) = a/S$ و $\phi: B_P \rightarrow A_P$ با ضابطه $\phi(b/S) = b/S$ باشد. فرض کنید T یک فیلتر ماکسیمال از A_P باشد. قرار دهید $Q = \phi^{-1}(T)$. بنا به قضیه ۱۰، Q یک فیلتر از A است. اما $\phi^{-1}(T)$ یک فیلتر اول از B_P است. بنابراین $\phi^{-1}(T) \subseteq PB_P$. حال فرض کنید $b \in Q \cap B$. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b \in Q &\Rightarrow \varphi(b) = \frac{b}{S} \\ &\Rightarrow \frac{b}{S} \in \phi^{-1}(T) \subseteq PB_P \\ &\Rightarrow \exists t \in P; \frac{b}{S} = \frac{t}{S} \\ &\Rightarrow \exists e \in B(A) \cap S; b \vee e = t \vee e \leq t \in P \\ &\Rightarrow b \vee e \in P, e \notin P \\ &\Rightarrow b \in P. \end{aligned}$$

بنابراین $Q \cap B \subseteq P$ از این‌رو، نتیجه می‌گیریم $D \neq \emptyset$.

رابطه \leq روی D را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\forall Q_1, Q_2 \in D; Q_1 \leq Q_2 \Leftrightarrow Q_2 \subseteq Q_1.$$

به‌وضوح \leq رابطه ترتیبی روی D است. فرض کنید $\{Q_i\}_{i \in I}$ یک زنجیری از D باشد. از این‌رو نتیجه می‌گیریم:

$$\bigcap_{i \in I} Q_i \in \text{Spec}(A), (\bigcap_{i \in I} Q_i) \cap B \subseteq P.$$

$\bigcap_{i \in I} Q_i$ یک کران بالا از زنجیر D است. از این‌رو، بنا به لم زرن، D عضو ماکسیمال F است. حال نشان می‌دهیم $F \in \text{Min}(A)$ فرض کنید $E \in \text{Spec}(A)$ به‌قسمی که $E \subseteq F$ و لذا $F \leq E$ نتیجه می‌شود. بنابراین $E \cap A \subseteq F \cap A \subseteq F \cap B \subseteq P$ و در نتیجه $F = E$ است. بنابراین $F \in \text{Min}(A)$ و اثبات کامل است.

تعریف ۲۵. توسیع $A \hookrightarrow B$ از BL -جبرها را کم-توسیع گویند اگر برای هر $P \in \text{Min}(A)$ داشته باشیم

$$P \cap B \in \text{Min}(B)$$

در صورتی که $A \hookrightarrow B$ کم-توسیع باشد، نگاشت $\psi: \text{Min}(A) \rightarrow \text{Min}(B)$ را با ضابطه $\psi(P) = P \cap B$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۲۶. با توجه به مثال ۲۳، به‌وضوح $F(A) = \{F_a, F'_a : a \in A\}$ به‌طوری‌که $F_a = (a, 1], F'_a = [a, 1]$ است. از این‌رو فیلتر اول مینیمال آن $P = \{1\}$ است، لذا $\text{Min}(A) = \{P\}$. حال فرض کنید $B = L_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. مشاهده می‌شود که فیلتر اول مینیمال آن $P' = \{1\}$ است، از این‌رو، $\text{Min}(B) = \{P'\}$ در نتیجه داریم، $P \cap B = \{1\} \in \text{Min}(B)$ و بنابراین $A \hookrightarrow B$ یک کم-توسیع است.

قضیه ۲۷. توسیع $A \hookrightarrow B$ کم-توسیع است اگر و تنها اگر در صورتی که $P \in \text{Min}(A)$ و $b \in P \cap B$ باشد، $a \in B - P$ وجود داشته باشد به قسمی که $a \vee b = 1$.

برهان. فرض کنید $A \hookrightarrow B$ کم-توسیع باشد، $P \in \text{Min}(A)$ ، $b \in P \cap B$ و $P \cap B \in \text{Min}(B)$. بنا به قضیه ۱۸، $Ann_B(b) \not\subseteq P \cap B$. بنابراین $a \in Ann_A(b)$ وجود دارد به‌قسمی که $a \notin P \cap B$ از این‌رو $a \in B - P$ وجود دارد به قسمی که $a \vee b = 1$. برعکس، فرض کنید $P \in \text{Min}(A)$ و $P \cap B \notin \text{Min}(B)$ بنا به قضیه ۱۷، $b \in P \cap B$ وجود دارد به‌قسمی که $a \in B - P$ و $a \vee b \neq 1$ که تناقض است.

نتایج از توپولوژی زاریسکی و توپولوژی معکوس در BL -جبرها

در این بخش، توپولوژی معکوس روی $\text{Min}(A)$ را تعریف می‌کنیم و ارتباط آن را با توپولوژی زاریسکی روی $\text{Min}(A)$ بررسی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم تحت شرایطی این دو توپولوژی معادل می‌شوند و به بررسی برخی خواص و ویژگی‌های توپولوژی معکوس می‌پردازیم. در پایان، ثابت می‌کنیم نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیرفضایی زاریسکی، پیوسته است.

قضیه ۲۸. توپولوژی زاریسکی روی $\text{Min}(A)$ صفر بعدی و هاسدورف است.

برهان: بنا به نتیجه ۱۴ داریم $\{U_A(a)\}_{a \in A}$ یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $\text{Min}(A)$ است. ثابت می‌کنیم $U_A(a) = V_A(Ann_A(a))$. فرض کنید $P \in U_A(a)$. در این صورت $P \in \text{Min}(A)$ و $a \notin P$. حال بنا به قضیه ۱۸ نتیجه می‌شود $Ann_A(a) \subseteq P$ از این‌رو، $P \in V_A(Ann_A(a))$ و در نتیجه

$$U_A(a) \subseteq V_A(Ann_A(a)).$$

اکنون فرض کنید $K \in V_A(Ann_A(a))$. در این صورت $K \in \text{Min}(A)$ و $Ann_A(a) \subseteq K$. بنا به قضیه ۱۸ داریم $a \notin K$ از این‌رو، $K \in U_A(a)$ و در نتیجه $V_A(Ann_A(a)) \subseteq U_A(a)$. بنابراین $V_A(Ann_A(a)) = U_A(a)$. چون $V_A(Ann_A(a))$ در توپولوژی زاریسکی بسته است، پس $U_A(a)$ نیز بسته است و در نتیجه اعضای پایه $\{U_A(a)\}_{a \in A}$ هم باز و هم بسته هستند، به‌عبارت دیگر $\text{Min}(A)$ صفر بعدی است. حال ثابت می‌کنیم $\text{Min}(A)$ هاسدورف است. فرض کنید $P_1, P_2 \in \text{Min}(A)$ متمایز باشند از آن‌جاکه $P_1 \neq P_2$ داریم $P_1 \not\subseteq P_2$ و $P_2 \not\subseteq P_1$. فرض کنیم $P_1 \not\subseteq P_2$ در این صورت وجود دارد $a \in P_1$ به‌طوری‌که $a \notin P_2$. قرار می‌دهیم $U = U_A(a)$ و

$U \cap V = U_A(a) \cap$ اما $P_1 \in V$ و $P_2 \in U$ داریم $V = U_A^c(a) = V_A(a) = U_A(Ann_A(a))$
 $U_A(Ann_A(a)) = U_A(a) \cap U_A^c(a) = \emptyset$ بنابراین $Min(A)$ هاسدورف است.
 لم ۲۹. فرض کنید A یک BL -جبر باشد. گردایه $\beta = \{V_A(F) : F \in F(A)\}$ یک پایه توپولوژی برای $Min(A)$ است.

برهان: برای هر $P \in Min(A)$ ، $F_0 = \{1\}$ فیلتری از BL -جبر A است به طوری که $F_0 = \{1\} \subseteq P$. بنابراین $P \in V_A(F_0)$. فرض کنید $V_A(F), V_A(G) \in \beta$ ، طبق قضیه ۱۱ قسمت (۲) نتیجه می شود
 $V_A(F) \cap V_A(G) = V_A(F \cup G) = V_A(F \vee G)$.

بنابراین β یک پایه توپولوژی برای $Min(A)$ است.

تعریف ۳۰. توپولوژی تولید شده به وسیله پایه $\{F\}$ فیلتر با تولید متناهی از $A = \{V_A(F) : F \in F(A)\}$ توپولوژی معکوس برای $Min(A)$ می نامیم و با نماد $Min^{-1}(A)$ نمایش می دهیم.

مثال ۳۱. BL -جبر $A = \bar{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{0, a, b, 1\}$ را در نظر بگیرید، که \bar{Z} مجموعه اعداد صحیح منفی است به قسمی که $1 \leq a, b \leq 0 \leq -1 \leq -2 \leq \dots \leq -\infty$ و a, b غیر قابل مقایسه اند. $[6]$ عمل های \odot, \rightarrow را بدین صورت تعریف می کنیم:

\rightarrow	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	a	b	1	\odot	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	a	b	1
$-\infty$	1	\dots	1	1	1	1	1	1	1	$-\infty$	$-\infty$	\dots	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
-3	$-\infty$	\dots	1	1	1	1	1	1	1	-3	$-\infty$	\dots	-6	-5	-4	-3	-3	-3	-3
-2	$-\infty$	\dots	-1	1	1	1	1	1	1	-2	$-\infty$	\dots	-5	-4	-3	-2	-2	-2	-2
-1	$-\infty$	\dots	-1	1	1	1	1	1	1	-1	$-\infty$	\dots	-4	-3	-2	-1	-1	-1	-1
0	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	1	1	1	1	0	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	0	0	0
a	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	b	1	b	1	a	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	a	0	a
b	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	a	a	1	1	b	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	0	b	b
1	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	a	b	1	1	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	a	b	1

به سادگی می توان نشان داد تنها فیلترهای A عبارتند از:

$$F_1 = \{1\}, F_2 = \{b, 1\}, F_3 = \{a, 1\}, F_4 = \{0, a, b, 1\}, F_5 = A - \{-\infty\},$$

$$F_n = \{x \in A : x \geq n, n \in \mathbb{Z}\}$$

داریم $X = Min(A) = \{F_2, F_3\}$ در نتیجه داریم:

$$V_A(F_1) = X, V_A(F_2) = \{F_2\}, V_A(F_3) = \{F_3\}, V_A(F_4) = \emptyset, V_A(F_5) = V_A(F_n) = V_A(A) = \emptyset$$

بنابراین $\tau = \{\emptyset, \{F_2\}, \{F_3\}, X\}$ روی فضای $X = Min(A)$ توپولوژی معکوس است.

تذکر ۳۲. مجموعه $\beta = \{V_A(a) : a \in A\}$ یک زیر پایه برای توپولوژی $Min^{-1}(A)$ است.

برهان: واضح است $Min(A) = \bigcup_{a \in A} V_A(a)$. طبق قضیه های ۵ و ۱۱ قسمت (۲) و (۱) داریم

$$\begin{aligned} V_A(F) &= V_A(\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle) = V_A(\langle a_1 \rangle \vee \langle a_2 \rangle \vee \dots \vee \langle a_n \rangle) \\ &= V_A(\langle \bigcup_{i=1}^n \langle a_i \rangle \rangle) = V_A(\bigcup_{i=1}^n \langle a_i \rangle) \\ &= V_A(\langle a_1 \rangle) \cap V_A(\langle a_2 \rangle) \dots \cap V_A(\langle a_n \rangle) = \bigcap_{i=1}^n V_A(a_i) \end{aligned}$$

لم ۳۳. توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است.

برهان: مشابه تذکر ۳۲ نتیجه می‌گیریم $V_A(F) = \bigcap_{i=1}^n V_A(a_i)$. حال بنا به قضیه ۲۸ و نکته ۲۰ داریم:

$$\bigcap_{i=1}^n V_A(a_i) = \bigcap_{i=1}^n U_A(Ann_A(a_i)) = U_A(\bigvee_{i=1}^n Ann_A(a_i)) .$$

چون $V_A(F)$ برای هر فیلتر متناهی F از A یک مجموعه باز از توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ است، بنابراین توپولوژی زاریسکی ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است.

در این قضیه، نشان می‌دهیم تحت شرایط خاص، توپولوژی معکوس با توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ معادل می‌شوند.

قضیه ۳۴. فرض کنید A یک BL -جبر باشد. اگر برای هر $a \in A$ ، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود باشد به طوری که

$$Ann_A(\langle a \rangle \vee F) = \{1\} \text{ و } F \subseteq Ann_A(a)$$

برهان: بنا به لم ۳۳ می‌دانیم توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ از توپولوژی معکوس ظریف‌تر است. برای اثبات کافی

است نشان دهیم برای هر $a \in A$ ، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود است به طوری که $U_A(a) = V_A(F)$. فرض

کنید $P \in U_A(a)$. در این صورت داریم $a \in A - P$. حال بنا به فرض، فیلتر با تولید متناهی F از A وجود دارد

به طوری که $F \subseteq Ann_A(a)$ و $Ann_A(\langle a \rangle \vee F) = \{1\}$. اگر $x \in F$ ، در این صورت $x \in Ann_A(a)$ و $x \vee a = 1$

چون $a \notin P$ ، از این‌رو، $x \in P$. بنابراین $F \subseteq P$. لذا $P \in V_A(F)$ و در نتیجه

$U_A(a) \subseteq V_A(F)$. فرض کنید $V_A(F) \not\subseteq U_A(a)$. بنابراین $P \in Min(A)$ وجود دارد به طوری که $F \subseteq P$ و

$a \in P$ ثابت می‌کنیم $\langle a \rangle \vee F \subseteq P$. فرض کنید $t \in \langle a \rangle \vee F$. در این صورت طبق تعریف ۴، داریم

$b \in F \subseteq P$ به طوری که $a^n \odot b \leq t$. پس $t \in P$ از این‌رو، $\langle a \rangle \vee F \subseteq P$. اما $Ann_A(\langle a \rangle \vee F) = \{1\}$.

در نتیجه $Ann_A(\langle a \rangle \vee F) \subseteq P$ که با قضیه ۱۸ در تناقض است. بنابراین $V_A(F) \subseteq U_A(a)$. در نتیجه

$$U_A(a) = V_A(F)$$

مسئله باز: آیا دو توپولوژی معکوس و زاریسکی روی $Min(A)$ بدون دو شرط قضیه ۳۴ معادل می‌شوند؟

مثال ۳۵. [۹]. BL -جبر $A = \{0, a, b, c, 1\}$ به قسمی که $0 \leq c \leq a, b \leq 1$ در نظر بگیرید. عمل‌های

\odot, \rightarrow را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

	0	c	a	b	1		0	c	a	b	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	c	0	c	c	c	c
a	0	b	1	b	1	a	0	c	a	c	a
b	0	a	a	1	1	b	0	c	c	b	b
1	0	c	a	b	1	1	0	c	a	b	1

به سادگی می توان نشان داد $F_1 = \{1, a\}, F_2 = \{1, b\}, F_3 = \{1, a, b, c\}$ فیلترهای اول A هستند. در این صورت داریم، $X = Spec(A) = \{F_1, F_2, F_3\}$ هم چنین

$V_A(\{1\}) = Spec(A), V_A(F_1) = \{F_1, F_3\}, V_A(F_2) = \{F_2, F_3\}, V_A(F_3) = \{F_3\}, V_A(A) = \emptyset$
در نتیجه $X = Spec(A)$ با فضای $\tau = \{V_A^c(F) : F \in F(A)\} = \{\emptyset, \{F_2\}, \{F_1\}, \{F_2, F_1\}, X\}$ تشکیل
توپولوژی زاریسکی می دهد.

به وضوح $Min(A) = \{F_2, F_1\}$ هم چنین داریم:

$V_A(\{1\}) = Min(A), V_A(F_1) = \{F_1\}, V_A(F_2) = \{F_2\}, V_A(F_3) = \emptyset, V_A(A) = \emptyset$
بنابراین $\tau = \{V_A^c(F) : F \in F(A)\} = \{\emptyset, \{F_2\}, \{F_1\}, \{F_2, F_1\}$ یک توپولوژی زیر
فضایی زاریسکی روی $Min(A)$ است.

بعلاوه، توپولوژی تولید شده به وسیله $\beta = \{\emptyset, \{F_1\}, \{F_2\}, \{F_1, F_2\}\}$ یک پایه توپولوژی معکوس برای $Min(A)$ است.

هم چنین این مثال در شرایط قضیه ۳۴ نیز صدق می کند.

یادآوری می کنیم برای هر $a \in A$ ، $u_A(a)$ در $Spec(A)$ فشرده است [۷]. از قضیه ۱۱ قسمت (۵) برای هر فیلتر
با تولید متناهی $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ داریم:

$$U_A(F) = U_A(V_{i=1}^n \langle a_i \rangle) = \bigcup_{i=1}^n U_A(\langle a_i \rangle) = \bigcup_{i=1}^n U_A(a_i)$$

از این رو، $U_A(F)$ فشرده است.

قضیه ۳۶. فرض کنید A یک BL -جبر باشد. برای هر $a \in A$ ، $V_A(a)$ در $Min^{-1}(A)$ فشرده است.

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم هر پوشش باز از عناصر پایه برای $V_A(a)$ دارای یک زیر پوشش متناهی
است. از برهان قضیه ۲۸ نتیجه می گیریم

$$U_A(Ann_A(a)) = V_A(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_A(a_i) = \bigcup_{i \in I} U_A(Ann_A(a_i))$$

چون $U_A(Ann_A(a))$ در توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ فشرده است، بنابراین زیر مجموعه متناهی J از I
موجود است به طوری که $V_A(a) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_A(Ann_A(a_i)) = \bigcup_{i=1}^n V_A(a_i)$. در نتیجه $V_A(a)$ یک مجموعه
فشرده از $Min^{-1}(A)$ است.

قضیه ۳۷. توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ فشرده، فضای T_0 و T_1 است.

برهان: به وضوح $Min(A) = V_A(1) = \{P \in Min(A) : 1 \in P\}$ پس بنا به قضیه ۳۶ فشرده گی $Min^{-1}(A)$

نتیجه می شود. فرض کنید $P_1, P_2 \in Min(A)$ به طوری که $P_1 \neq P_2$. در این صورت $P_1 \not\subseteq P_2$ و $P_2 \not\subseteq P_1$
فرض کنید $P_1 \not\subseteq P_2$. بنابراین $a \in P_1$ وجود دارد به طوری که $a \notin P_2$. قرار دهید $U = V_A(a)$ ، پس $P_1 \in U$ و

$P_2 \notin U$ بنابراین $Min^{-1}(A)$ فضای T_0 است. فرض کنید P و Q دو فیلتر اول مینیمال متمایز باشد و

$a \in P - Q$. حال از قضیه ۱۷ نتیجه می گیریم وجود دارد به طوری که $a \vee x = 1$ و $x \in A - P$

و در نتیجه $a \vee x \in Q - P$. بنابراین $x \in Q - P$ و $P \in V_A(a) - V_A(x)$ و $Q \in V_A(x)$. بنابراین $P \in V_A(a)$

و $P \notin V_A(x)$ به طور مشابه $Q \in V_A(x)$ و $Q \notin V_A(a)$. از این رو $Min^{-1}(A)$ فضای T_1 است.

قضیه ۳۸. $Min^{-1}(A)$ یک فضای توپولوژی هاسدورف است.

برهان: فرض کنید P و Q دو فیلتر اول مینیمال متمایز از BL - جبر A باشند به طوری که $P \neq Q$ از این رو، $a \in P - Q$ ، $b \in Q - P$ موجود هستند. بدیهی است که $\langle a \rangle \subseteq P$ ، $\langle b \rangle \subseteq Q$ و چون $P, Q \in Min(A)$ بنا به قضیه ۱۸، داریم $Ann_A(\langle a \rangle) \not\subseteq P$ ، $Ann_A(\langle b \rangle) \not\subseteq Q$. از این رو، داریم:
 $Q \in V_A(b)$ و $Q \in U_A(Ann_A(\langle a \rangle))$ ، $P \in U_A(Ann_A(\langle b \rangle))$ ، $P \in V_A(a)$.

بنا به قضیه ۲۸ چون توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ یک فضای هاسدورف است، پس

$$V_A(a) \cap V_A(b) = U_A(Ann_A(\langle a \rangle)) \cap U_A(Ann_A(\langle b \rangle)) = \emptyset.$$

قضیه ۳۹. فرض کنید $H \subseteq Min^{-1}(A)$ هم باز و هم بسته است اگر و تنها اگر فیلترهای با تولید متناهی F و G موجودند به طوری که $V_A(F) = H$ ، $F \wedge G = 1$ و $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$.

برهان: فرض کنید H زیر مجموعه هم باز و هم بسته از $Min^{-1}(A)$ باشد. طبق قضیه ۳۷ نتیجه می‌شود زیر مجموعه H فشرده است. از این رو، دارای پوشش باز متناهی مانند $H = \bigcup_{i=1}^n V_A(F_i)$ است. بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۴) داریم

$$H = \bigcup_{i=1}^n V_A(F_i) = V_A(\bigcap_{i=1}^n F_i) = V_A(\bigwedge_{i=1}^n F_i)$$

بنا به تذکر ۱۸، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود است به طوری که $H = V_A(\bigwedge_{i=1}^n F_i) = V_A(F)$ از طرفی می‌دانیم متمم H نیز هم باز و هم بسته است، بنابراین فیلتر با تولید متناهی G از A موجود است به قسمی که

$$Min(A) - H = V_A(G).$$

بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۲) خواهیم داشت:

$$\emptyset = V_A(F) \cap V_A(G) = V_A(F \cup G) = V_A(F \vee G)$$

در نتیجه برای هر $P \in Min(A)$ داریم $P \not\subseteq F \vee G$. از طرفی بنا به تذکر ۲۱ نتیجه می‌شود $F \vee G$ یک فیلتر با تولید متناهی است. حال بنا به قضیه ۱۸ نتیجه می‌شود برای هر $P \in Min(A)$ ، $P \subseteq Ann_A(F \vee G)$.
هم‌چنین بنا به لم ۸ داریم:

$Ann_A(F \vee G) \subseteq \bigcap_{P \in Min(A)} P = \{1\}$. پس $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$. بنابراین بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۵) داریم:

$$Min(A) = V_A(F) \cup V_A(G) = V_A(F \cap G) = V_A(F \wedge G)$$

و چون برای هر $P \in Min(A)$ داریم $F \wedge G \subseteq P$ از این رو، $F \wedge G = \{1\}$.

برعکس، چون $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$ برای هر $P \in Min(A)$ داریم $P \subseteq Ann_A(F \vee G)$. حال بنا به تذکر ۲۱ و قضیه ۱۸ نتیجه می‌شود $F \vee G \not\subseteq P$. پس برای هر $P \in Min(A)$ داریم

$$P \in U_A(F \vee G)$$

$$P \in U_A(F \vee G) = U_A(\langle F \cup G \rangle) = U_A(F \cup G) = U_A(F) \cup U_A(G) = V_A^c(F) \cup V_A^c(G)$$

بنابراین $Min(A) = V_A^c(F) \cup V_A^c(G)$. در نتیجه $\emptyset = V_A(F) \cap V_A(G)$ از این رو داریم:

$$Min(A) = V_A(1) = V_A(F \wedge G) = V_A(F \cap G) = V_A(F) \cup V_A(G).$$

در نتیجه $V_A(F)$ متممی از $V_A(G)$ است، از این رو، $H = V_A(F)$.
قضیه ۴۰. فرض کنید توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ فضای هاسدورف، صفر بعدی و فشرده باشد، و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a \wedge b = 1$. آن گاه فیلترهای با تولید متناهی F, G از A موجود هستند به طوری که $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$ و $b \in G, a \in F$.
برهان: فرض کنید $Min^{-1}(A)$ فضای هاسدورف، صفر بعدی، فشرده باشد و فرض کنید $a, b \in A$ به طوری که $a \wedge b = 1$. بنا به قضیه ۱۱ قسمت (۳) داریم:

اکنون، از فشردگی $Min^{-1}(A)$ و بسته بودن $U_A(a)$ و $U_A(b)$ ، فشردگی آنها نیز نتیجه می‌شود. بنا به قضیه ۱۶ و چون $Min^{-1}(A)$ صفر بعدی است، یک مجموعه هم باز و هم بسته مانند H از $Min(A)$ موجود است به طوری که $H \cap U_A(b) = \emptyset, U_A \subseteq H$. بنا به قضیه ۳۹ فیلترهای با تولید متناهی F, G که به ترتیب شامل a, b هستند به طوری که

$$H = V_A(F), V_A(G) = Min(A) - H, F \wedge G = \{1\}, Ann_A(F \vee G) = \{1\}.$$

قضیه ۴۱. فرض کنید $A \hookrightarrow B$ کم - توسیع از BL -جبرها باشد. نگاشت $\psi: Min(A) \rightarrow Min(B)$ با ضابطه $\psi(P) = P \cap B$ نسبت به هر دو توپولوژی زاریسکی و معکوس، پیوسته است.
برهان. فرض کنید F فیلتری از B باشد و $b \in B$. داریم:

$$\psi^{-1}(V_B(I)) = \{P \in Min(A): I \subseteq P\} = V_A(I)$$

و

$$\psi^{-1}(U_B(b)) = \{P \in Min(A): b \notin P\} = U_A(b)$$

بنابراین نگاشت ψ نسبت به هر دو توپولوژی زاریسکی و معکوس است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، توپولوژی معکوس در BL -جبرها را روی مجموعه همه فیلترهای اول مینیمال تعریف کردیم و نشان دادیم فضای حاصل از توپولوژی معکوس، فشرده، هاسدورف، T_1 و T است. همچنین ثابت کردیم توپولوژی زاریسکی روی همه فیلترهای اول مینیمال A که با $Min(A)$ نمایش می‌دهیم، ظریفتر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است. در ادامه، نشان دادیم که تحت شرایطی این دو توپولوژی روی $Min(A)$ با هم معادل می‌شوند. در پایان، مفهوم کم-توسیع را تعریف کردیم و با استفاده از آن نشان دادیم نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی زاریسکی، پیوسته است.

منابع

1. Di Nola A., Georgescu G., Iorgulescu A., "Pseudo BL -algebra: Part I", Mult. Val. Logic, 8 (2002) 673-714.

2. Di Nola A., Georgescu G., Iorgulescu A., "Pseudo *BL*-algebra: Part II", *Mult. Val. Logic*, 8 (2002) 717-750.
3. Eslami E., Haghani F., "Pure filters and stable topology on *BL*-algebras", *Kybernetika*, No.3, 45 (2009) 491-506.
4. Forouzesh F., Sajadian F., Bedrood M., "Inverse topology in *MV*-algebras", *Mathematica Bohemica*, No. 3, 144 (2019) 273-285.
5. Hajek P., "Metamathematics of Fuzzy Logic", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
6. Iorgulescu, A., "Algebras of logic as *BCK*-algebras", Bucharest university of Economics, Romania(2008).
7. Leustean L., "The prime and maximal spectra and the reticulation of *BL*- algebras", *Central European Journal of Mathematics* 1 (2003) 382-397.
8. Munkres J. R., "Topology", Dorling Kindersely, India, Second Edition, (2006).
9. Piciu D., " Algebras of fuzzy logic", Ed. Universitaria, Cariova, (2007).
10. Turunen E., "*BL*-algebras of basic fuzzy logic", *Mathware and soft computing*, 6 (1999) 46-61.